

### СТРУКТУРА ПРОЕКТИВНО ПЛОЩИННИХ ПІДГРАФІВ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ЗАДАНОЇ ПОВЕРХНІ

**Вступ.** Основні визначення та позначення узяті з [1, 2]. Розглянемо *задачу* вивчення метричних властивостей підграфа  $G \setminus v$ , де  $v$  довільна вершина графа-обструкцій  $G$  неорієнтованого роду  $k$ ,  $k \geq 1$ , які визначатимуть множини точок приєднання одного підграфа до іншого і дозволятиме будувати прототипи графів-обструкцій із числом вершин більшим 10 неорієнтованого роду більшого ніж  $k$ . Певним чином з цієї задачею пов'язана гіпотеза Ердьоша [3] про покриття графів-обструкцій неорієнтованої поверхні роду  $k$ , де  $k \geq 1$ , найменшою за включенням множиною із  $k+1$ -го графа гомеоморфного  $K_{3,3}$ , або  $K_5$ . В роботі [4] гіпотеза конструктивно доведена для 35-ти мінорів графів-обструкцій проективної площини  $N_1$ , множини 62-х із не більшим ніж 10-ма вершинами графів-обструкцій та їхніх розщеплень для поверхні Клейна  $N_2$ , а також деяких графів-обструкцій для поверхонь  $N_3$  та  $N_4$ . В роботі [5] доведено існування скінченної множини графів-обструкцій для неорієнтованої поверхні. Подібна задача розглядалася в [6], де розглядалися моделі-прототипи графів-обструкцій. Прототипом графа-обструкції неорієнтованого роду  $k$ , будемо називати графи, що мають власним підграфом граф-обструкцію неорієнтованого роду  $k$ ,  $k \geq 1$ . В роботах [7, 8] розглядалась дотична задача покриття множини вершин найменшою кількістю циклів-границь 2-кліток, поняття кліткової відстані наведено в [9, 10]. Тут досліджено граничні межі орієнтованого роду графів, утворених з площинних графів і простої зірки, приклеєної до деяких його вершин. Гіпотетично можливо їх отримати шляхом рекурсивного  $\varphi$ -перетворення графа-обструкції проективної площини та копії його площинного підграфа, заданого на вершинах, ребрах чи частинах ребер, або простих ланцюгах, тобто досяжним частинам так званого графа-основи (графа гомеоморфного графу Куратовського і вкладеного в проективну площину). Вважатимемо, що замість одного підграфа може бути кілька копій підграфів графів-обструкцій проективної площини.

*Розглядається задача дослідження метричних властивостей площинних та проективних підграфів графів-обструкцій неорієнтованого роду  $k$ ,  $k \geq 2$ . Основний результат: теореми 1, 2 і лема 3 як основа для алгоритма побудови прототипів графа-обструкції заданого неорієнтованого роду.*

**Ключові слова:**  *$\varphi$ -перетворення графів, неорієнтована поверхня, прототипи графів-обструкцій.*

Стаття має вступ та дві частини, в яких досліджено структурні властивості підграфів графів-обструкцій для неорієнтованої поверхні, поданих як  $\varphi$ -образ одного з графів Куратовського та, щонайменше одного, площинного графа. Наведено метричні властивості мінімальних вкладень підграфів графів-обструкцій для неорієнтованих поверхонь і основний результат – теореми 1 та 2.

### Частина 1

Нехай задано мінімальне вкладення  $f$  графа  $G$  до неорієнтованої поверхні  $N$ , яке реалізує число досяжності  $t$ ,  $t_G(M, N) = t$ , тобто це найменша по включенню підмножина  $\{s_i\}_{i=1}^t$  множини  $S_G(N, f)$ ,  $S_G(N, f) = N \setminus f(G)$ , складена з кліток на границях яких розташовано точки з множини  $M$ . Кожен граф  $G$  неорієнтованого роду  $k$ ,  $k \geq 1$ , може бути поданим наступним перетворенням:  $\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$ , як  $\varphi$ -образ графа  $H$  та зірки  $St_n(g_0)$ , приєднаної всіячими вершинами  $g_i$  до точок  $a_i$ , де задана множина  $M$  точок графа  $H$ ,  $M = \{a_i\}_{i=1}^m$ ,  $M \subseteq (\partial s_1 \cup \partial s_2) \cap H^0$ , яка розміщується на границях кліток  $s_1, s_2, \dots, s_t$  множини  $N \setminus f'(H)$ , де  $t \geq 2$ ,  $m \geq 2$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , мінімальним вкладенням  $f'$ ,  $f': H \rightarrow N'$ .

Аналогічно характеристикам вкладення графа до орієнтованої поверхні на підмножині  $\{s_i, s_j, s_k\}$  множині  $S_G(N, f)$ , визначимо характеристику  $\theta$ ,  $\theta = 1$ , множини  $M$  коли виконується умова  $\partial s_i \cap \partial s_j \cap \partial s_k \neq \emptyset$ , тобто є, щонайменше, одна спільна точка на їхніх границях, яка є центром кліткової зірки, утвореної із трьох кліток  $\{s_i, s_j, s_k\}$ , або визначено характеристику  $\partial\theta$ ,  $\partial\theta = 1$ , якщо довільні пари цих кліток мають на границях, мінімум, одну спільну точку, тобто утворюють клітковий цикл довжини 3, утворених із трьох кліток  $\{s_i, s_j, s_k\}$ .

*Позначення 1.* Позначатимемо  $\angle(s_i, s_j)$  та називатимемо кутом між клітками чи псевдоклітками  $s_i, s_j$  множини  $S_G(N, f)$  найменшу по включенню зірку графа  $G$  з центром в  $a$ ,  $a \in G^0 \cap (\partial s_i \cap \partial s_j)$ , із множиною ребер-променів, розташованих з одного боку щодо точки перетину границь кліток  $s_i, s_j$ . Саме ці ребра чи їхні частини вкладатимемо до ленти Мебіуса, приклеєної до площини, для утворення псевдоклітки, на границі якої розміщуються об'єднання границь  $s_i, s_j$ . На 4-й та 5-й картах рис. 1 показано кут між пофарбованими 2-клітками та вкладення його на ленту Мебіуса, приклеєну до елементарного диска поверхні  $N$ .

*Позначення 2.* Нехай задане мінімальне вкладення  $f$  графа  $H$  до неорієнтованої поверхні  $N$ . Позначатимемо  $\alpha(\angle(s_1, s_2))$  операцію перетворення ребер  $e_1, e_2$ ,  $f(e_1) \subset \partial s_1, f(e_2) \subset \partial s_2$ , зі спільною вершиною  $a$  кліток  $s_1, s_2$ , де  $f(e_1) \cup f(e_2) \subseteq \partial s_{12}$ , причому вкладення  $f$  графа  $H$  в  $N$  розміщує на границях кліток  $s_1, s_2$  множини  $f(M)$ ,  $f(M) = f(\{a_i\}_{i=1}^m)$ .

Наведемо алгоритм 1 який за поліноміальний час видає вкладення  $f$  вхідного графа  $G$  до поверхні  $N'$  неорієнтованого роду  $\gamma(N')$ , де має місце нерівність  $\gamma(N') \geq \gamma(G) + 1$ , а множина  $N' \setminus f(G)$  містить тільки 2-клітки та псевдоклітки.

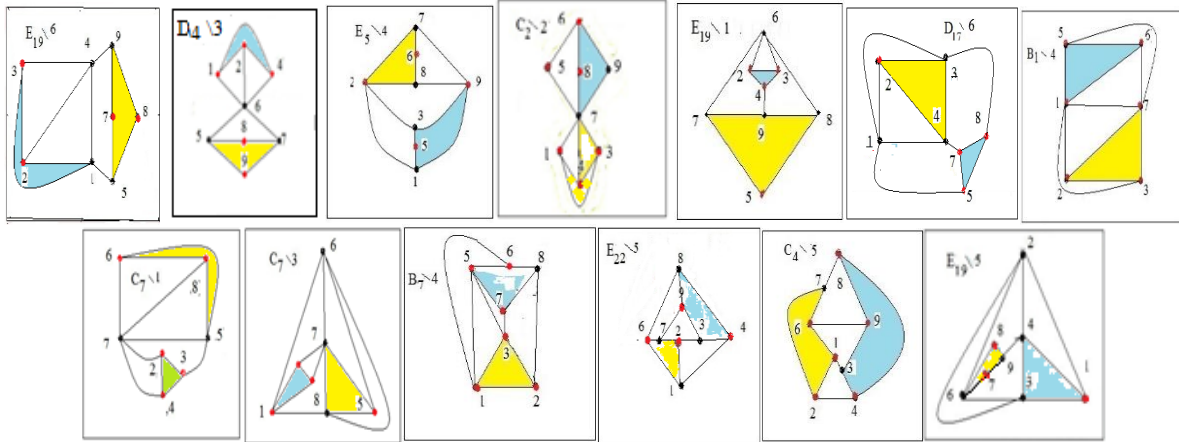


РИС. 1. Площинні підграфи проективних мінорів із множиною  $M$  з червоних вершин на границях зафарбованих кліток з числом досяжності 2 та клітковою відстанню 2 між двома виділеними кольором клітками-гранями на границях яких розташовані підмножини множини  $M$

**Алгоритм 1**

*Вхід:* подано скінчений граф  $G$  неорієнтованого роду  $k$ ,  $k \geq 1$ , як  $\varphi$ -образ графа  $H$  та зірки

$St_n(g_0)$ , наступним перетворенням:  $\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$ , тобто всячі вершини

$g_i$  зірки  $St_n(g_0)$  приєднано до точок  $a_i$  з множини точок  $M$  графа  $H$ , де  $M = \{a_i\}_{i=1}^m$ , яка мінімальним вкладенням  $f'$ ,  $f': H \rightarrow N'$  розміщується на границях кліток  $s_1, s_2, \dots, s_t$  множини  $N \setminus f'(H)$ , де  $t \geq 2$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $m \geq 2$ . Нехай задане мінімальне вкладення  $f$  графа  $H$  до неорієнтованої поверхні  $N$ , яке реалізує число досяжності  $t$ ,  $t_H(M, N) = t$ , множини точок  $M$ .

*Функція  $A$*  (вхідні клітки  $s_1, s_2$ ; вихідна клітка  $s$ ). Виконується операція  $\alpha(\angle(s_1, s_2))$  перетворення ребер  $e_1, e_2$ ,  $f(e_1) \subset \partial s_1, f(e_2) \subset \partial s_2$ , зі спільною вершиною  $a$  кліток  $s_1, s_2$ , де  $f(e_1) \cup f(e_2) \subseteq \partial s_{12}$ , причому вкладення  $f$  графа  $H$  в  $N$  розміщує на границях кліток  $s_1, s_2$  множини  $f(M)$ ,  $f(M) = f(\{a_i\}_{i=1}^m)$ . Приклеїмо до клітки  $s_{12}$  ленту Мебіуса наступним чином. Розщепимо довільну внутрішню точку  $f(x_i)$  ребра  $e_i$ ,  $e_i = (a_i, b_i)$  на точки  $x_i', x_i''$ , де  $i = 1, 2$ . Виріжемо в середині  $s_{12}$  елементарний диск з центром в  $x_i$  та розташуємо на його границі діаметрально протилежні пари точок  $(x_1', x_2'')$ ,  $(x_1'', x_2')$  як кінцеві точки частин перехрещених ребер на площині елементарного диска. Отримаємо таким чином псевдоклітку  $s$  неорієнтованої поверхні  $N'$ , де  $\gamma(N') = \gamma(N) + 1$ ,  $\partial s = \partial s_1 \cup \partial s_2$ , в яку можливо вкласти ту частину зірки  $f'(St_n(g_0))$ , яка приклеєна до точок множини  $f(M) \cap \partial s$  і таким чином матимемо вкладення графа  $G$  в поверхню  $N'$ .

*Вихід:* Множина  $R$  кліток чи псевдокліток неорієнтованої поверхні  $N'$ ,  $\gamma(N') \geq \gamma(G) + 1$ , границі яких не перетинаються, а на їхніх границях розташовані всі точки множин  $M$ .

*Початкові значення:*  $S := \{s_i\}_{i=1}^t$ ;  $\partial S := \{\partial s_i\}_{i=1}^t$ ;  $R := \emptyset$ .

Для параметра  $i$ , що міняється від 1 до  $|S|$  кроком 1 виконати циклічні дії.

Виберемо клітку  $s_1$ ,  $s_1 \in S$ .

Для параметра  $j$ , що міняється від  $i+1$  до  $|S|$  кроком 1 виконати циклічні дії.

Виберемо клітку  $s_j$ ,  $s_j \in S$ ;

якщо  $\partial s_j \cap \partial s_1 \neq \emptyset$ , то виконати:

початок дій;

$s := A(s_1, s_j)$ .

Перенумеруємо елементи множини  $S := S \setminus \{s_1, s_j\} \cup s$ ;

$R := R \cup \{s\}$ .

Перейти на мітку Крок\_1.

кінець дій;

Крок\_2: Кінець циклу по  $j$ .

Крок\_1: Кінець циклу по  $i$ .

Кінець алгоритму 1.

*Твердження 1.* Алгоритм 1 для зв'язного графа  $G$  неорієнтованого роду  $\gamma(G)$  на  $n$  вершинах та  $q$  ребрах із заданою множиною точок з числом досяжності  $t$  за поліноміальний час  $O(|S|^2)$ ,  $|S| = 2 - \gamma(G) - n + q$ , коректно будує множину ізольованих кліток вкладення графа до неорієнтованої поверхні, де  $1 \leq t \leq |S|$ .

Шляхом застосування наведеного алгоритму можливо довести леми 1 та 2.

*Лема 1.* Мають місце такі твердження.

1. Дві зірки, що перетинаються по внутрішнім точкам висячих ребер на площині елементарного диску, можливо вкласти без перетину у внутрішніх точках до елементарного диску площини із приклеєною до нього лентою Мебіуса.

2. Якщо ребро  $e$  перетинає ребра трикутника  $K_3$ , розташованого на площині елементарного диска, то *справедливі* наступні твердження:

а) ребра графа  $K_4$  можливо вкласти на ленті Мебіуса, приклеєній до елементарного диска так, щоб вкладалися без перетину на ленті Мебіуса пара ребер, схрещених на евклідовій площині, та одне з двох паралельних ребер;

б) якщо ребро  $e$  перетинає ребро, що є основою трикутника, то на приклеєну ленту Мебіуса можливо, або вкласти ребро  $e$  чи всі ребра трикутника;

в) якщо ребро  $e$  не перетинає інше ребро, що є основою трикутника, то можливо вкласти на приклеєну ленту Мебіуса ребро  $e$  та два суміжних з ним ребра трикутника, а ребро, що є основою трикутника – не вкладається на ленту Мебіуса.

*Лема 2.* Нехай на множині  $S_G(N, f)$  задано множину з кліткових зірок із, мінімум, двома клітками-променями із спільною точкою – центром зірки та кліткових циклів довжиною не менше 3. Мають місце такі співвідношення.

1. Нехай задано кліткову зірку чи клітковий цикл довжини 3. Для утворення однієї кітки, яка б містила на своїй границі об'єднання границь кліток зірки чи клітковий цикл довжини 3, необхідно приклеїти дві ленти Мебіуса до поверхні  $N$ .

2. Пара кліток зі спільною вершиною на границях перетворюється на одну псевдоклітку, яка містить на границі об'єднання двох границь шляхом приклеювання ленти Мебіуса.

3. Шляхом приклеювання ленти Мебіуса до місця вкладення спільної вершини кожної пари кліток з множини  $S_G(N, f)$  неорієнтованої поверхні  $N$  можливо утворити поверхню  $N'$  роду

$\gamma(N')$ , де  $\gamma(N') = \gamma(N) + \kappa$ , на якій множина  $M \in$  досяжною, тобто виконується рівність  $t_G(M, N') = 1$ , де  $\kappa$  – число всіх можливих кутів, які утворені під час перетворень кожної пари кліток з множини  $S_G(N, f)$  чи множини новоутворених псевдокліток, що мають спільні точки на своїх границях.

*Визначення 1.* Нехай задано мінімальне вкладення  $f$  графа  $G$  до неорієнтованої поверхні  $N$ , яке реалізує число досяжності  $t$ ,  $t_G(M, N) = t$ . Будемо називати клітковою довжиною  $d_G(s_i, s_j, f)$  між границями кліток  $s_i, s_j$  із заданими на них підмножинами  $L_i, L_j$  вершин зв'язного графа  $G$ , де  $L_i \subseteq G^0 \cap \partial s_i$ ,  $L_j \subseteq G^0 \cap \partial s_j$ ,  $\{s_i, s_j\} \subset S_G(N, f)$ , потужність  $|J|$  найменшої по включенню впорядкованої множини  $J$ ,  $J = \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+k}, s_j\}$ ,  $J \subseteq S_G(N, f)$ , де послідовні пари кліток мають на своїх границях, мінімум одне, спільне ребро. Причому підмножину множини  $J$ , складену із не менше ніж двох послідовних кліток зі спільною вершиною на границях, будемо рахувати як одну клітку. Також будемо вважати, що на множині  $J$  задано особливий простий клітковий ланцюг  $L_{ij}$ ,  $L_{ij} = L(s_i, s_j)$ , який з'єднує клітки  $s_i, s_j$  кліткового графа для графа  $G$ . У випадку незв'язного графа  $G$  одна з кліток множини  $J$  буде не 2-кліткою і не псевдокліткою.

*Визначення 2.* Будемо позначати  $T$ ,  $T = T_G(M, N)$ , та називати деревом досяжності множини точок  $M$ ,  $M = \{a_i\}_{i=1}^m$ , зв'язного графа  $G$ , при заданому мінімальному вкладенні  $f$  графа  $G$  до неорієнтованої поверхні  $N$ , яке реалізує число досяжності  $t$ ,  $t_G(M, N) = t$ , пару множин  $(\{s_i\}_1^t, \{L_{ij}\})$ , де  $\{L_{ij}\}$  – найменша по включенню множина особливих кліткових ланцюгів  $L(s_i, s_j)$  що, або безпосередньо, або як об'єднання кількох послідовних ланцюгів зі спільним кінцем одного та початком іншого, що з'єднують всі пари кліток  $s_i, s_j$  та мають найменшу суму довжин взяту по всім  $L_{ij}$  із множини  $\{L_{ij}\}$ .

*Визначення 3.* Для множини точок  $M$ ,  $M = \{a_i\}_{i=1}^m$ , площинного графа  $G$  з числом досяжності  $t_G(M, \Sigma_0)$ , де  $t_G(M, \Sigma_0) = t$ ,  $t \geq 2$ , будемо називати клітковою довжиною  $d_G(M, t)$ , де  $d_G(M, t) = \min_{\forall f \in fGN} \sum_{\forall s_i, s_j \in T} d_G(s_i, s_j, f)$ , між підмножинами  $L_i, L_j$  множини  $M$ ,  $M = L_i \cup L_j$ ,  $L_i \cap L_j = \emptyset$ , розташованими на границях довільних кліток  $s_i, s_j$ ,  $\{s_i, s_j\} \subset S_G(\Sigma_0, f)$ , що реалізують число досяжності  $t_G(M, \Sigma_0)$ , де  $fGN$  – множина всіх неізоморфних вкладень графа  $G$  до  $\Sigma_0$ , що реалізують число досяжності  $t_G(M, \Sigma_0)$  множини точок  $M$ .

*Визначення 4.* Будемо називати множини  $M$ ,  $M = \{a_i\}_{i=1}^m$ , точок графа  $G$  з числом досяжності  $t$ , де  $t_G(M, \Sigma_0) = t$ , критичною відносно кліткової довжини  $d_G(M)$  при операції видалення довільного елемента  $a_i$ , якщо має місце нерівність  $d_G(M \setminus a_i) < d_G(M)$ , чи відносно операції стискання ребра  $u = (ab)$  в точку  $a'$  (якщо  $\{a, b\} \subset M$ , то замість  $M$  розглядатимемо множину  $M' = (M \setminus (a, b)) \cup \{a'\}$ ), якщо має місце нерівність  $d_{Gu}(M') < d_G(M)$ .

*Визначення 5.* Будемо називати граф  $G$  мінімальним відносно  $d_G(M)$  при операції видалення або стискання у точку довільного ребра  $u$ , якщо, або  $d_{Gu}(M) + 1 = d_G(M)$ ,  $d_{Gu}(M') < d_G(M)$ , де  $Gu$  – граф зі стиснутим у точку  $a'$  ребром  $u = (a, b)$  та  $M' = (M \setminus \{a, b\}) \cup a'$ .

*Твердження 2.* Кожен граф  $G$  неорієнтованого роду  $k$ ,  $k \geq 1$ , поданий перетворенням:  $\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$ , як  $\varphi$ -образ площинного графа  $H$  та зірки  $St_n(g_0)$ , приєднаної висячими вершинами  $g_i$  до точок  $a_i$ , де  $M$  – задана множина точок графа  $H$ ,  $M = \{a_i\}_{i=1}^m$ ,  $M \subseteq (\partial s_1 \cup \partial s_2) \cap H^0$ , яка розміщується на границях кліток  $s_1, s_2, \dots, s_t$  множини  $\Sigma_0 \setminus f(H)$ , де  $t \geq 2$ ,  $m \geq 2$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , мінімальним вкладенням  $f$ ,  $f: H \rightarrow \Sigma_0$ , та задовольняє наступним співвідношенням.

1. Якщо  $t_H(M, \Sigma_0) = 2$ ,  $k \geq 2$ , то  $d_H(M) = k - 1$ .

2. Якщо  $t_H(M, \Sigma_0) = 3$ ,  $\theta_H(M, \Sigma_0) = 1$ ,  $k = 2$ , то  $d_H(M) = 1$ .

3. Серед ребер підграфа  $H$  можуть бути несуттєві відносно числа досяжності заданої множини точок чи кліткової відстані цієї ж множини при видаленні ребра, чи стисканні ребра у точку.

*Доведемо співвідношення 1.* Нехай граф  $G$  неорієнтованого роду  $k$ ,  $k = 2$ , –  $\varphi$ -образ наступного перетворення:  $\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$ , тобто до площинного графа  $H$  приєднано зірку  $St_n(g_0)$  шляхом ототожнення пар  $(a_i, g_i)$ , утворених точками  $a_i$  графа  $H$ , та висячими вершинами  $g_i$ , де  $i = 1, 2, \dots, m$ . Будемо вважати, що  $M$  – задана множина точок графа  $H$  має число досяжності 2, де  $M = \{a_i\}_{i=1}^m$ , тобто мінімальним вкладенням  $f$  графа  $H$  до евклідової площини  $\Sigma_0$  розміщується на границях двох кліток  $s_1, s_2$ , де  $\{s_i\}_1^2 \subseteq \Sigma_0 \setminus f(H)$ . Оскільки  $t_H(M, \Sigma_0) = 2$ , то існує клітковий ланцюг між клітками  $s_1, s_2$  довжиною  $d$ ,  $d \geq 1$ . Розглянемо два вичерпні випадки.

1. Припустимо, що існують ребра  $e_1, e_2$ , такі, що  $f(e_1) \subset \partial s_1, f(e_2) \subset \partial s_2$ , зі спільною вершиною  $a$ . Видалимо з цих ребер частини  $e_1', e_2'$ , де  $e_1' \cap e_2' \cap G^0 = a$ , та розщепимо вершину  $a$  на дві вершини  $a', a''$ , які є центрами двох зірок  $St_G(a')$ ,  $St_G(a'')$ , одна з яких містить  $f(e_1' \cup e_2' \setminus \{a\}) \cup \{a'\}$  та розглянемо нову клітку  $s$ , яка утворилася з двох кліток  $s_1, s_2$  при розщепленні вершини  $a$  та має границю  $\partial s$ , де  $\partial s = \partial s_1 \cup \partial s_2$ . До клітки  $s$  приклеїмо ленту Мебіуса  $L$  на яку розмістимо вкладенням  $f'$  зірку  $St_G(a')$ ,  $f'(St_G(a')) \subset L$ , тобто перехрестимо висячі ребра зірки  $e_1', e_2'$ ,  $e_1, e_2$  та ототожнимо вершини  $a', a''$  у вершину  $a$ . Побудуємо вкладення  $f'$ ,  $f': H \rightarrow N_1$ , де  $f'|H \setminus St_H^1(a'') = f|H \setminus St_H^1(a'')$ ,  $f'|St_H^1(a') = f|St_H^1(a')$ , яке робить множину  $M$  досяжною на проєктивній площині, що дозволяє продовжити  $f'$  до вкладення у клітку  $s$  образу зірки  $f'(St_n(g_0))$ . Тим самим отримуємо, що неорієнтований рід  $\gamma(G) = 1$ . Припущення неправильне. Випадок 1 неможливий.

2. Вважатимемо, що немає ребер  $e_1, e_2$ ,  $f(e_1) \subset \partial s_1, f(e_2) \subset \partial s_2$ , зі спільною вершиною  $a$ , але є клітковий ланцюг  $L$ ,  $L = L_{f(G)}(s_1, s_2)$  довжиною не менше 1, який містить щонайменше три клітки  $s_1, s_{12}, s_2$ , де  $f(e_1) \cup f(e_2) \subseteq \partial s_{12}$ , причому вкладення  $f$  графа  $H$  в  $\Sigma_0$ , розміщує на границях кліток  $s_1, s_2$  множину  $f(M)$ ,  $f(M) = f(\{a_i\}_{i=1}^m)$ . Приклеїмо до кліток  $s_1, s_{12}, s_2$  евклідової площини дві ленти Мебіуса наступним чином. Розщепимо внутрішню точку  $f(x_i)$  ребра  $e_i$ ,  $e_i = (a_i, b_i)$  на точки  $x_i', x_i''$ , де  $i = 1, 2$ . Виріжемо на  $\Sigma_0$  елементарний диск з центром в  $x_i$  та розташуємо на його границі

діаметрально протилежні точки  $x_i', x_i''$  як кінцеві точки частин ребра  $e_i$ . Отримаємо клітку  $s$  поверхні  $N_2$ , де  $\partial s = \partial s_1 \cup \partial s_{12} \cup \partial s_2$ , в яку можливо вкласти зірку  $f'(St_n(g_0))$  і таким чином отримати мінімальне вкладення графа  $G$  у поверхню  $N_2$ , тобто  $\gamma(G) = 2$ . Тоді матимемо рівність  $d_H(M) = k - 1$ , що й треба довести. Доведення співвідношення 1 закінчене.

Доведення співвідношення 2 для  $k > 2$  аналогічне наведеному для співвідношення 1.

Співвідношення 3 матиме схематичне доведення. На рис. 2 наведені всі неізоморфні площинні підграфи непроективних мінорів, що є мінімальним відносно видалення ребер чи стискання їх у точку, як відносно кліткової відстані 2, так і числа досяжності 2 заданих множин червоних вершин, які приєднуються попарно до кінцевих точок ребер простих зірок.

Доведення твердження 2 закінчено.

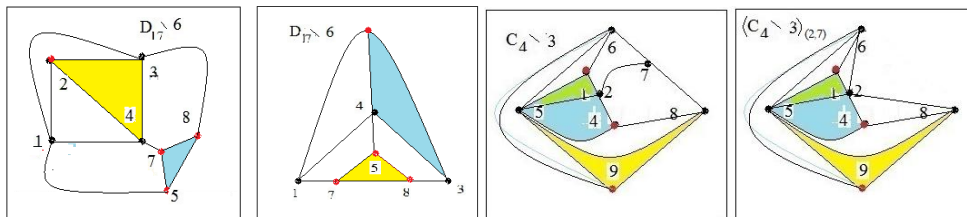


РИС. 2. Підграфи мінорів проективної площини  $D_{17}$  та  $C_4$  як приклад до твердження 2, де ребро  $(1,3)$  є несуттєвим при видаленні відносно числа досяжності 2 та клітковою відстанню  $d_H(M) = 2$ , де  $M = \{2,5,7,8\}$  підграф  $C_4 \setminus 3$  має несуттєве ребро  $(2,7)$  при операції стискання у точку відносно відстані між двома довільними клітками множини кліток, яка реалізує число досяжності множини  $\{1,4,8,9\}$  точок графа  $C_4 \setminus 3$

**Теорема 1.** Нехай граф  $G$  має площинний підграф  $H$ ,  $H = G \setminus v$ ,  $v$  – вершина графа  $G$  поданого як  $\varphi$ -образ  $\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$ , де  $v := g_0$ , а підграф  $H$  – мінімальний відносно  $d_H(M)$ ,  $d_H(M) = k$ , при операціях видалення чи стискання у точку довільного його ребра, а множина  $M$  мінімальна щодо  $d_H(M)$ ,  $M = \{a_i\}_{i=1}^m$ ,  $t_H(M, \Sigma_0) = t$ ,  $\theta_H(M, \Sigma_0) = \theta$ ,  $\partial\theta_H(M, \Sigma_0) = \partial\theta$ ,  $\theta \geq 0$ ,  $\partial\theta \geq 0$ ,  $m \geq k \geq 1$ . Граф  $G$  або його підграф є граф-обструкцією неорієнтованого роду  $\gamma(G)$ , де  $\gamma(G) \leq k + 1$ , якщо має місце одна з таких умов:

- 1)  $t = 2$ ;
- 2)  $((t = 3) \wedge ((\theta = 1) \vee (\partial\theta = 1)))$ .

Доведення при умові 1 впливає з твердження 2 та полягає в побудові вкладення графа  $G$  в евклідову площину із приклеєними  $k + 1$  лентами Мебіуса, на яких розміщено по одному спільному ребру сусідніх границь кліткового ланцюга. Нехай граф  $G$  неорієнтованого роду подано як  $\varphi$ -образ  $\varphi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$  та виконуються умови теореми 1. Оскільки за визначенням граф  $G$  є граф-обструкцією неорієнтованого роду  $\gamma(G)$  тоді й тільки тоді, коли кожне ребро  $u$  графа  $G$  є суттєвим відносно роду як при операції видалення, так і при стисканні в точку. Якщо ребро  $u$ ,  $u \in G^1$ , матиме прообраз  $u'$ , де  $u' \in H^1$ , то видалення чи стискання у точку ребра  $u$  призводить до таких самих дій над  $u'$ . Оскільки площинний граф  $H$  мінімальний відносно  $d_H(M)$  при операціях

видалення чи стискання у точку довільного ребра, то існуватиме клітковий ланцюг  $L(s_1, s_2)$ , що з'єднуватиме клітки  $s_1$  та  $s_2$ , на границях яких розташовується множина  $M$ , та матиме довжину  $d$ ,  $d = d_H(M) - 1$ . Стискання у точку ребра  $u$  призводить до таких самих дій над  $u'$ . Якщо ребро  $u$ ,  $u \in G^1$ , матиме прообраз  $u'$ , де  $u' = (a_1, g_0)$ ,  $u' \in St_n(g_0)^1$ , то видалення ребра  $u$  означитиме видалення з множини  $M$  кінцевої вершини  $a_1$ , що за умови критичності множини  $M$  відносно  $d_H(M)$ , матимемо нерівність  $d_G(M \setminus a_1) < d_G(M)$ . Стискання у точку ребра  $u$  призводить до стискання у точку  $a_0$  ребра  $u'$  і означитиме подання графа  $G_u$  як  $\phi$ -образу графа  $H'$  та  $St_m(a_0)$ , де  $H' \subset H$ .

Використаємо метод індукції по  $d$ . База індукції  $d = 1$ . Побудуємо, згідно леми 1, вкладення  $f$  графа  $H$  в поверхню  $N_2$ , тоді має місце нерівність  $\gamma(G \setminus u) \leq 2$  та при цьому вкладенні  $f$  множина  $M$  буде досяжною на поверхні  $N_2$ . Аналогічно для бази індукції  $d = 2$  матимемо доведену теорему 1. Зробимо індукційний крок від  $d = k - 1$  до  $d = k$ ,  $k > 2$ . У випадку, коли  $d = k$ , де  $d_H(M) = k + 1$ , матимемо, щонайбільше,  $k + 1$  ленту Мебіуса приклеєну до кліток ланцюга  $L(s_1, s_2)$  так, щоб на кожній розмістити  $k + 1$  ребро графа  $H$ , які належать границям послідовних пар кліток ланцюга  $L(s_1, s_2)$ . Тоді матимемо нерівність  $\gamma(G) \leq k + 1$ . Доведемо методом від протилежного, що граф  $G$  – граф-обструкція неорієнтованого роду  $\gamma(G)$ . Припустимо, що ребро  $u$ ,  $u \in G^1$ , є несуттєвим відносно  $d_H(M) = k + 1$  при операції видалення. Оскільки підграф  $H$  є мінімальним відносно  $d_H(M)$  при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра, то  $u \in H^1$ . Із визначення 3 випливатиме, що кожне ребро графа  $H$  є спільним для границь двох послідовних кліток деякого кліткового ланцюга  $L(s_1, s_2)$  довжини  $k$ , тому підграф  $H \setminus u$  матиме клітковий ланцюг  $L'$  довжини  $k - 1$ , утворений з ланцюга  $L(s_1, s_2)$  довжини  $k$  шляхом видалення ребра  $u$  на спільній границі двох кліток. Видалимо у графі  $H \setminus u$  всі несуттєві ребра відносно  $d_{H \setminus u}(M)$ , де  $d_{H \setminus u}(M) = k - 1$ , при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра. Отримаємо підграф  $H'$  із заданою множиною вершин  $M$  з числом досяжності 2 та відстанню  $k - 1$  між двома підмножинами  $M$ , є мінімальним відносно  $d_H(M)$  при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра. Тоді за індукційним припущенням матимемо граф-обструкцію  $G'$ , неорієнтованого роду  $\gamma(G')$ , де  $\gamma(G') \leq k$ , якщо виконаємо  $\phi$ -перетворення графа  $H'$  та  $St_m(g_0)$ , задане наступним чином:

$$\phi: (H' + St_m(g_0), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G', \{a_j\}_1^m),$$

де  $St_m(g_0)$  – квазізірка з центром у вершині  $g_0$  та  $m$  ребрами-променями, що суміжні вершинам з множини  $X_2$ ,  $X_1$  підмножина множини точок графа  $H$ ,  $X_1 = \{x_{1j}\}_1^m$ , матиме число досяжності  $t_1$  та характеристики  $\theta_1, \partial\theta_1$ , то  $\gamma(G') \leq 0 + 2 - 1 - (\theta_1 + \partial\theta_2) + k4 - st$ . Зауважимо, що в нашому випадку  $\theta_1 + \partial\theta_2 = 0$  і  $k4 - st = 0$ , де  $k4 - st$  – число додаткових 2-ручок приклеєних до клітки  $s$  з множини  $N_r \setminus f(H)$  при вкладенні  $f: H \rightarrow N_r$ ,  $r = 2 - 1 - (\theta_1 + \partial\theta_1)$ , із  $st$  – стороннім доступом до тих точок приєднання на границі  $\partial s$  клітки  $s$  (до якої приклеєно  $r$  штук 2-ручок і вкладено квазізірку), що при ототожненні пар точок приєднання  $(x_{1j}, x_{2j})$  породжують  $k4$  різних підграфів гомеоморфних  $K_4$ , чи  $K_{2,3}$ . Доведення для умови 1 завершено.



Доведення теореми 1 для умови 2. Доведення випливає з твердження 2 та побудови вкладення графа  $G$  в евклідову площину із приклеєними, мінімально, двома лентами Мебіуса, на яких розміщено, щонайменше, по одному спільному ребру з тих двох, що мають спільну точку та належать границям суміжних кліток трьохкліткової зірки для випадку  $\theta=1$ , чи по два суміжних ребра, що належать границям суміжних кліток кліткового простого циклу довжини 3 для випадку  $\partial\theta=1$ .

Нехай  $k=2$  і виконується умова  $((t=3) \wedge ((\theta=1) \vee (\partial\theta=1)))$ . Це означатиме, є три клітки  $s_1, s_2, s_3$  з множини  $\Sigma_0 \setminus f(H)$ , які на своїх границях містять множину заданих точок  $M$ , де  $M = \{a_i\}_{i=1}^m$ , та з яких утворено, або зірку, або трикутник. Розглянемо випадок, коли границі кліток  $s_1, s_2, s_3$  містять мінімум одну спільну вершину  $a$  графа  $G$ . Позначимо  $St_{n_{ij}}(a)$  зірку, що розміщена між границями кліток  $s_i, s_j$ , де  $n_{ij} = n_{ji}$ ,  $i, j=1, 2, 3$ , та розглянемо дві з них  $St_{n_{12}}(a)$ ,  $St_{n_{23}}(a)$  та вважатимемо, що  $n_{12} \geq n_{23} \geq 1$ . На кожному ребрі  $(a, g_r)$  зірки  $St_{n_{12}}(a)$  чи  $St_{n_{23}}(a)$  виберемо внутрішню точку  $x$  та розщепимо її на дві вершини  $x'$ ,  $x''$ , утворюючи два нових ребра,  $(a, x')$ ,  $(x'', g_r)$  з одного висячого ребра  $(a, g_r)$ . Переставимо кінцеві вершини висячих ребер  $(a, x')$  з спільною вершиною  $a$  в оберненому порядку слідування (перше з останнім, друге з передостаннім, і так далі) та розмістимо ці переставлені вершини на границі елементарного диску  $D_1$ , вирізаному в площині біля розщеплених точок ребер, утворюючи пари  $(x', x'')$  діаметрально протилежних точок на границі елементарного диску  $D_1$ , які попарно отождивимо в точку  $x$  ребра  $(a, g_r)$  зірки  $St_{n_{12}}(a)$ . Виконавши такі операції для кожного ребра  $(a, g_r)$ , побудуємо вкладення  $f'$ ,  $f': H \rightarrow N_1$ , шляхом розміщення всіх ребер  $(a, g_r)$  зірки  $St_{n_{12}}(a)$  на ленті Мебіуса, як продовження вкладення  $f$ , причому замість кліток  $s_1, s_2$  буде клітка  $s_{12}$ , де  $\partial s_{12} = \partial s_2 \cup \partial s_1$ . Для зірки  $St_{n_{23}}(a)$  аналогічні дії потрібні для побудови вкладення  $f''$ , де  $f'': H \rightarrow N_2$ , як продовження вкладення  $f'$ , тільки замість  $s_1, s_2$  буде  $s_{12}$ , а замість кліток  $s_{12}, s_3$  буде клітка  $s_{123}$ , де  $\partial s_{123} = \partial s_{12} \cup \partial s_3$ ,  $f''(M) \subset \partial s_{123}$ . Продовжимо вкладення  $f''$  до вкладення  $f'''$ , де  $f''': G \rightarrow N_2$ , шляхом вкладення зірки  $St_n(g_0)$  до клітки  $s_{123}$ . Тоді матиме місце нерівність  $\gamma(G) \leq 2$ . Доведення при умові 2 закінчено. Приклади площинні підграфи проективних мінорів із заданими трьома підмножинами множини  $M$  червоних вершин (розташованою на границях трьох зафарбованих кліток) з числом досяжності 3 та клітковою відстанню 1 чи 0 між парами довільних підмножин множини  $M$ . На першій, другій та четвертій картах три зафарбовані клітки утворюють кліткову зірку, на третій клітковий цикл довжини 3, а на п'ятій карті є граф  $C_4 \setminus 3$  із стиснутим у точку ребром  $(2,7)$ , на шостій карті показано клітковий ланцюг довжини 1

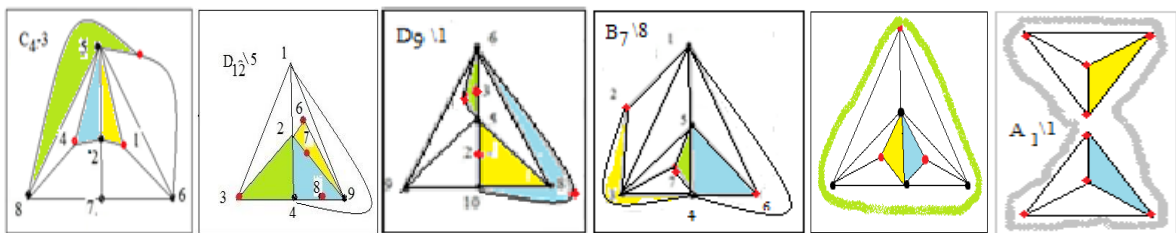


РИС. 3. Площинні підграфи проективних мінорів із заданими трьома підмножинами множини  $M$  червоних вершин (розташованою на границях трьох зафарбованих кліток) з числом досяжності 3 та клітковою відстанню 1 чи 0 між парами довільних підмножин множини  $M$ . На першій, другій та четвертій картах три зафарбовані клітки утворюють кліткову зірку, на третій клітковий цикл довжини 3, а на п'ятій карті є граф  $C_4 \setminus 3$  із стиснутим у точку ребром  $(2,7)$ , на шостій карті показано клітковий ланцюг довжини 1

*Наслідок 1.* Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді матимуть місце твердження.

1. Видалення довільного ребра  $e$  графа  $H = G \setminus v$  не змінюватиме число досяжності  $t$  множини  $M$  точок приєднання до графа  $H \setminus e$  висячих точок зірки  $St_n(g_0)$ , де  $M = \{a_i\}_{i=1}^m$ ,  $t_{H \setminus e}(M, \Sigma_0) = t$ ,  $m \geq t$ ,  $t = 2$ .

2. Якщо граф  $G$  є граф-обструкцією неорієнтованого роду  $\gamma(G)$ , де  $\gamma(G) \leq k + 1$ ,  $\theta = 1$ , то видалення довільного ребра  $e$ ,  $e = (a, b)$ , підграфа  $H = G \setminus v$ , або зменшує на 1 обидві характеристики  $t_H(M, \Sigma_0)$  і  $\theta_H(M, \Sigma_0)$ , або існує вкладення частини  $H'$  підграфа  $H$  із однією з кінцевих вершин ребра  $e = (a, b)$ , нехай  $a$ , до середини клітки  $s'$ ,  $s' \in S_H(M, \Sigma_0)$ , (наприклад, це симетричне відображення відносно простого ланцюга на границі з іншою кліткою  $s'$ , що є суміжною через спільну вершину  $b$ ), де множини кліток  $S_H(M, \Sigma_0)$  реалізує характеристику  $t_H(M, \Sigma_0)$ .

Структура площинних графів  $H$  із клітковими відстанями 2 та 3 показана на рис. 4.

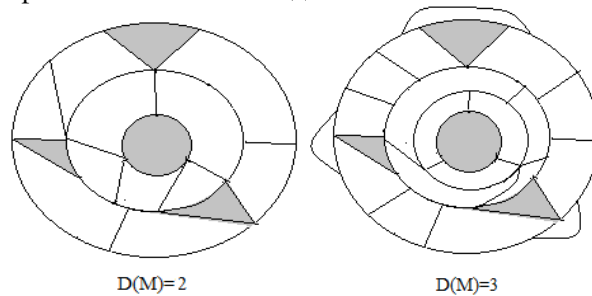


РИС. 4. Приклад площинного графа  $H$  із клітковими відстанями 2 та 3 для множини точок  $M$ , розміщеної на границях чотирьох сірих кліток, відповідно зліва-направо

*Твердження 3.* Нехай граф  $G$  має площинний підграф  $H$  та  $d_H(M) = k$ , де множина  $M$  мінімальна стосовно  $d_H(M)$ ,  $M = \{a_i\}_{i=1}^m$ ,  $t_H(M, \Sigma_0) = t$ , підграф  $H$  мінімальний стосовно  $d_H(M)$  при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра і граф  $G$  подано як  $\phi$ -образ  $\phi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$ . Якщо мають місце умови теореми 1,  $t = 2$ ,  $k > 2$ , то матимемо наступні співвідношення.

1. Існує вкладення площинного графа  $H$  в  $N_3$  при якому довільний найкоротший клітковий ланцюг, що з'єднує клітки, на границях яких розташована задана множина точок, замінимо на інший неклітковий ланцюг у якого одна з кліток є 2-ручкою, приклеєною до початкової та передостанньої кліток ланцюга; також є псевдоклітка утворена з кінцевої клітки та приклеєної до неї ленти Мебіуса.

2. Площинний граф  $H$  складається з  $k$  концентричних кілець, утворених із замкнутих кліткових ланцюгів (де початкова та кінцева клітки мають границі із мінімально одним спільним ребром), із границями кліток досяжності множини  $M$  як центральний та зовнішній цикли  $k$  концентричних кілець.

*Твердження 4.* Нехай граф  $G$  поданий як  $\phi$ -образ  $\phi(H + St_n(g_0), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$  має проєктивно площинний підграф  $H$ ,  $H = G \setminus v$  – мінімальний відносно  $d_H(M)$  при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра  $e$ ,  $e \in H^1$ , де  $d_H(M) = k$ ,  $M$  множина точок мінімальна відносно  $d_H(M)$ ,  $M = \{a_i\}_{i=1}^m$ ,  $t_H(M, \Sigma_0) = t$ ,  $m \geq t \geq 2$ .

Якщо  $t = 2$ ,  $k > 2$  та виконуються умови теореми 1, то матимемо співвідношення.

1. Не існуватиме вкладення проективно площинного графа  $H$  в  $N_3$  при якому довільний найкоротший клітковий ланцюг, (що з'єднує клітки, на границях яких розташована задана множина точок), замінено на інший неклітковий ланцюг, у якого одна з кліток є 2-ручкою, приклеєною до початкової та передостанньої кліток найкоротшого кліткового ланцюга, та є псевдоклітка, утворена з кінцевої клітки найкоротшого кліткового ланцюга та приклеєної до неї ленти Мебіуса.

2. Проективно площинний граф  $H$  має підграфи – кліткові зірки, які складаються з вершин та ребер на границях кліток із мінімально однією спільною точкою та мають попарно щонайменше одне спільне ребро на границі цих кліток, серед яких має бути одна з двох кліток, що реалізують на проективній площині число досяжності 2 множини точок  $M$ .

3. Видалення довільного ребра у графа  $G$ , або зменшуватиме рід  $\gamma(H)$  проективно площинного підграфа  $H$ , або зменшуватиме на 1 число досяжності  $t$ ,  $t_H(M, N_1) = t$ , відносно проективної площини, множини  $M = \{a_i\}_{i=1}^m$  точок приєднання до графа  $H$  всячих точок зірки  $St_n(g_0)$ , або одночасно зменшить на 1 рід  $\gamma(H)$  та матиме місце рівність  $t_{H \setminus u}(M, \Sigma_0) = t + 1$ .

На рис. 5 наведено приклади проективних підграфів  $H$  мінорів проективної площини із заданими двома непустими підмножинами множини виділених точок цих графів.

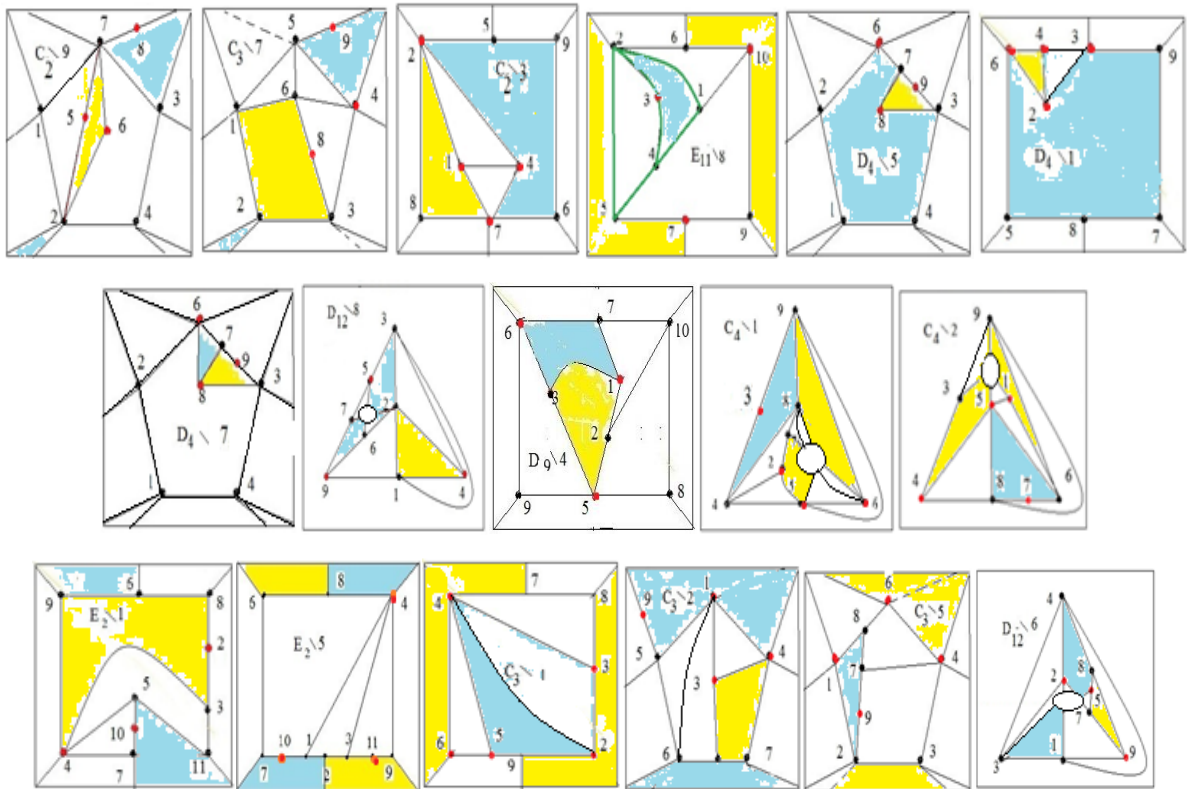


РИС. 5. Проективні підграфи мінорів проективної площини із заданими двома непустими підмножинами множини  $M$ , складеної з червоних вершин і розташованої на границях зафарбованих кліток, з числом досяжності 2 та клітковою відстанню 1 (між двома підмножинами  $M$ ).

*Твердження 5.* Нехай граф  $G$  неорієнтованого роду 2 має проєктивно площинний підграф  $H$ ,  $H = St_m(H') \cup H''$ , мінімальний відносно  $d_H(M)$  при операціях видалення чи стискання у точку довільного ребра, де  $d_H(M) = k$ , множина  $M$  – мінімальна відносно  $d_H(M)$ ,  $M = \{a_i\}_{i=1}^m$ ,  $t_H(M, N_1) = t$ , причому граф  $G$  подано як  $\varphi$ -образ  $\varphi: (K + St_m(H'), \sum_{i=s}^m (a_i + g_i)) \rightarrow (G, \{a_i^*\}_{i=1}^m)$ , де  $m \geq 1$ ,  $H', H''$  – невідроджені підграфи чи частини графа  $H$ , а граф  $K$  гомеоморфний  $K_5$  чи  $K_{3,3}$ . Матимемо наступні співвідношення.

1. Видалення довільного ребра  $e$ ,  $e \in H'$ , призводить до одного з трьох наступних випадків:
  - а) зменшує рід графа  $H$  відносно  $K$ ;
  - б) породжує вкладення графа  $G \setminus e$  в  $N_1$  та ребер  $St_m(H') \setminus e$  до основної 2-клітки  $s_0$  та псевдо-клітки  $s_1$ ,  $\{s_0, s_1\} \subseteq N_1 \setminus f(K)$ , графа  $K$ , (подібне розпаданню  $St_m(H') \setminus e$  на дві непусти частини, вкладені до псевдоклітки  $s_1$  та до 2-клітки  $s_0$ , тобто в різні клітки відносно графа  $K$ ;
  - в) зменшує на 1 рід  $\gamma(G)$  і граф  $G \setminus e$  не матиме підграфа ізоморфного  $K$ .

2. Підграф  $H$  має наступні властивості:

- а) є пара ребер  $(e_0, e_1)$ , що належать простим реберним ланцюгам  $(L_0, L_1)$ , відповідно, вкладені з перетином до евклідової площини основної клітки  $s_0$ , а пара кінцевих точок пари ланцюгів  $(L_0, L_1)$ , які належить підграфу  $H$ , розташовані на границі  $\partial s_0$ , розділять одна другу та не розділяють кінцеві точки третього реберного ланцюга  $L_2$ , який, можливо, містить таке ребро графа  $K$ , що входить до числа перехрещених на площині пар ребер графа  $K$ .

На рис. 6 показано структуру проєктивних підграфів  $H$  мінорів проєктивної площини із співвідношення 1. Приклади проєктивних підграфів  $H$  мінорів проєктивної площини із множинами множини виділених точок цих графів показано на рис.7.

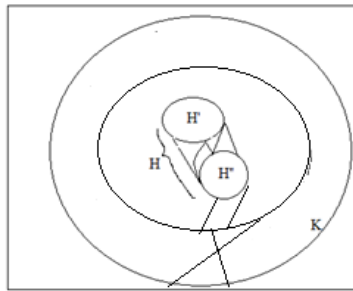


РИС. 6. Структура графа  $G$  із твердження 5

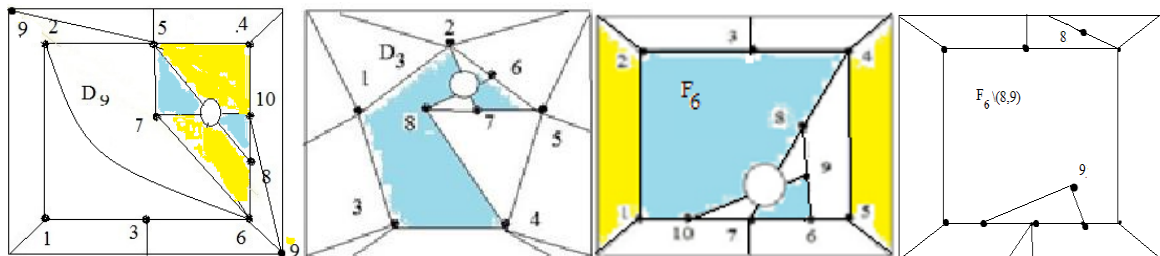


РИС. 7. Графи  $D_9, D_3, F_6$  ілюструють співвідношення 1 та 2 твердження 5, граф  $D_9$  матиме підграф  $K$  гомеоморфний  $K_{3,3}$  на множині вершин  $\{1,2,3,4,5,6, 8,10\}$  та підграфи  $H', H''$  на кінцевих вершинах наступних ребер  $\{(7,5), (9,5), (9,6), (9,10), (7,10), (7,6)\}$ ,  $\{(8,5), (4,5), (8,6), (8,10), (4,10)\}$ , відповідно.

**Теорема 2.** Кожен граф-обструкція  $G$  із  $n$  вершинами,  $n \geq 10$ , неорієнтованого роду  $k$ ,  $k > 0$ , можливо подати одним із варіантів:

1) об'єднання  $k$  копії графів гомеоморфних  $K_{3,3}$ ,  $K_5$ ,  $K_4$  чи  $K_5 \setminus e$ ;

2)  $\varphi$ -образ двох графів-обструкцій  $G_i$  неорієнтованого роду  $k_i$  заданого наступним чином

$$\varphi: \left( \sum_{i=1}^2 G_i, \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^m (L_{1j} + L_{2j}) \right) \rightarrow (G, \{L_i^*\}_{i=1}^m),$$

де  $L_{1i}, L_{2i}$  – прості ланцюги чи підланцюги довжини  $l_{ij} \geq 0$

графів  $G_i$ , причому можливим є ототожнення пари, нехай це  $L_{1j'}, L_{1j''}$  графа  $G_1$ , із парою  $L_{2j'}, L_{2j''}$

які належать одному простому циклу графа  $G_2$ , де  $k \leq \sum_{i=1}^2 k_i$ ,  $k_i \geq 1$ .

*Доведення* для варіанту 1). Нехай  $G$  – довільний граф-обструкція із  $n$  вершинами,  $n \geq 10$ , неорієнтованого роду  $k$ . Для  $k = 2$  в [4] конструктивно доведена справедливість гіпотези про подання графа  $G$  як об'єднання двох графів гомеоморфних одному з графів Куратовського для 35-ти мінорів графів-обструкцій проективної площини  $N_1$ .

Матиме місце допоміжна лема: якщо граф  $G \setminus u$  є блоком, то існуватиме простий цикл на якому розташовані вершини  $\{a, b\}$ , який належатиме мінімальному по включенню підграфу чи частині гомеоморфному  $K_4$  чи  $K_5 \setminus u$ . Доведемо цю допоміжну лему. Кожне довільне ребро  $e = (a, b)$  графа-обструкції  $G$  неорієнтованого роду  $k$ ,  $k \geq 1$ , можливо розмістити на ленті Мебіуса разом із, щонайменше, одним ребром  $e' = (a', b')$ , що схрещуються на поверхні меншого неорієнтованого роду, та кінцеві вершини яких розміщені на простому циклі мінімальної довжини 4. Видалення довільного ребра  $e = (a, b)$  графа-обструкції  $G$  неорієнтованого роду  $k$  призводить до того, що довільний підграф  $G \setminus e$  неорієнтованого роду  $k - 1$  містить множину  $M = \{a, b\}$  із числом досяжності 2 та розміщену на границях двох кліток із, як мінімум, одною спільною точкою. Згідно визначення кліткової відстані  $D_{G \setminus e}(M)$  матимемо, що  $D_{G \setminus e}(M) = 0$ . Позначимо  $M'$  найменший по включенню локальний площинний підграф чи частину графа  $G$  з вершинами  $a, b$ . Для нього можливими є чотири випадки, із яких тільки два випадки є різними з точністю до гомеоморфізму, наведені на рис. 8. У випадку 1) є спільне ребро для границь кліток з точками  $a, b$ , то існує локальний площинний підграф  $M'$  ізоморфний  $K_4$  із двома виділеними точками  $a, b$  як кінцевими вершинами видаленого ребра. Додане ребро  $e = (a, b)$  породжує підграф  $M' \cup (a, b)$  гомеоморфний графу  $K_{3,3}$ . У випадку 2) є клітковий кут у спільній точці границь обох кліток з точками  $a, b$ . Тобто є локальний площинний підграф  $M'$  ізоморфний  $K_5 \setminus u$  із двома виділеними точками  $a, b$  як кінцевими вершинами ребра  $e = (a, b)$ . Додавання ребра  $(a, b)$  до  $M'$  породжуватиме граф, що стягуватиметься до  $K_5$ . Таким чином, кожне ребро належатиме підграфу гомеоморфному одному із графів Куратовського чи тому, що стискається до одного з них.

З іншого боку, якщо рід більше 1, то окрім ребер підграфа Куратовського є принаймні декілька ребер графа-обструкції роду 2, які не належать до виділеного підграфа  $M' \cup (a, b)$ , але мають належати до іншого, щонайменше, одного підграфа, гомеоморфного  $K_{3,3}$  чи  $K_5$ , відмінного від виділеного підграфа, тобто серед графів покриття ребер різними є, щонайменше, два. Доведення допоміжної леми закінчене. Аналогічним буде доведення для випадку, коли граф  $G \setminus u$  не є блоком.

Використаємо метод індукції по  $\gamma(G)$  – неорієнтованому роду графа  $G$  із  $n$  вершинами, де  $k = \gamma(G)$ . База індукції: для  $k = 2$  в [4] конструктивно доведена справедливість гіпотези про подання графа  $G$ , як об'єднання двох графів гомеоморфних одному з графів Куратовського для 35-ти мінорів графів-обструкцій проєктивної площини  $N_1$ .

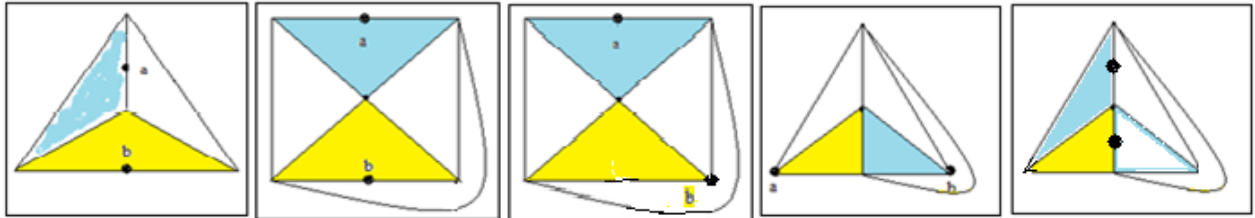


РИС. 8. На 1-й та 2-й картах варіанти 1 та 2 для підграфа  $M'$ , відповідно, на 3-й, 4-й і 5-й картах підграф  $M'$ , можливо привести до одного з перших двох варіантів

Виконаємо індукційний крок:  $k - 1 \Rightarrow k$ , де  $k = \gamma(G)$ . Для довільного ребра  $u$ ,  $u = (a, b)$ , графа  $G$  існує пара  $(u, u')$  ребер розміщених на ленті Мебіуса. Множина ребер графа  $G \setminus u$ , який матиме рід  $\gamma(G \setminus u)$ , де  $k = \gamma(G \setminus u) + 1$ , та містить підграф  $H$  – граф-обструкцію яка, за припущенням, покриватиметься множиною підграфів  $G_i$ , де  $i = 1(1)k - 1$ , графа  $G$  чи його частин гомеоморфних  $K_{3,3}$ ,  $K_5$ ,  $K_4$ ,  $K_5 \setminus e$ . Розглянемо підграф на множині ребер  $G^1 \setminus H^1$ . З умови, що  $G$  – граф-обструкція впливатиме наявність іншого ребра  $u'$ , яке разом з  $u = (a, b)$ , належить підграфу чи його частині розташовані на ленті Мебіуса. Оскільки граф  $G \setminus u'$  є блоком, то згідно допоміжної леми існуватиме простий цикл  $z$  на якому розташовані кінцеві вершини ребер  $u, u'$ , які на площині розділяють одна другу, утворюючи підграф чи частину гомеоморфну  $K_4$  або  $K_5 \setminus e$ . Множину ребер циклу  $z$  об'єднаємо із множиною  $W \cup \{u, u'\}$ , де  $W$  – множина всіх тих ребер з  $G^1 \setminus H^1$ , що мають, щонайменше одну спільну кінцеву вершину із циклом  $z$ . Позначимо підграф графа  $G$  з множиною ребер  $z^1 \cup W \cup \{u, u'\}$  через  $G_k$ . Тоді маємо вкладення графа  $G$  в неорієнтовану поверхню  $N_k$  як суму вкладень підграфів  $G$  в  $N_k$ , а саме підграфа  $G_k$  в  $N_1$  та підграфа  $H$  до  $N_{k-1}$  зі спільною множиною точок приєднання цих підграфів. Припустимо, що є непокрите ребро  $u'' = (a'', b'')$ , яке не належить до  $G_k$ . Оскільки граф  $G \setminus u''$  міститиме підграф  $G_k \cup H$ , то застосовуючи вищенаведені міркувань для ребра  $u''$  матимемо нерівність  $\gamma(G \setminus u'') \geq k$ , яка суперечить визначенню графа  $G$  як графа-обструкції. Припущення неправильне. Таким чином, кожне непокрите ребро в графі  $G \setminus u$  покриватиметься в  $G$  підграфом  $G_k$  гомеоморфними  $K_{3,3}$ ,  $K_5$ ,  $K_4$  або  $K_5 \setminus e$ . Доведення варіанту 1) закінчене.

*Доведення для варіанту 2).* Використаємо наведені вище аргументи та вважатимемо, що кілька зірок подібних  $St_G(a')$  може бути. Позначимо  $G_1$  підграф графа  $G$  породжений парою непокрытих ребер та ребер графа  $G$ , що мають кінцевими вершинами пари точок приєднання, а  $G_2$  – підграф графа  $G$  породжений множиною всіх покритих ребер та тих ребер графа  $G$ , що мають кінцевими

вершинами пари точок приєднання. Тоді спільними для цих є  $L_{1i}, L_{2i}$  – прості ланцюги чи підланцюги довжини  $l_{ij} \geq 0$  графів  $G_i$ , причому можливим є ототожнення пари, нехай це  $L_{1j'}, L_{1j''}$  із парою  $L_{2j'}, L_{2j''}$ , які належать одному простому циклу графа  $G_2$ .

Доведення теореми 2 закінчене.

## Частина 2

Розглянемо задачу побудови графів-обструкцій неорієнтованого роду на основі множини відомих графів-обструкцій, але не більш ніж на 10 вершинах для неорієнтованого роду  $k$ , а саме, повної для проективної площини чи неповної для інших поверхонь, зокрема, поверхні Клейна. Моделлю чи прототипом граф-обструкції  $G$  неорієнтованого роду 2 будемо називати граф більшого неорієнтованого роду, отриманий шляхом приклеювання у доступних частинах частини чи підграфа, гомеоморфного  $K_5$  чи  $K_{3,3}$ , щонайменше однієї копії площинного підграфа  $H$  граф-обструкції  $G$ , чи побудований, до певної міри, на зразок цього підграфа  $H$ .

Існує інший спосіб побудови графів обструкцій заданого неорієнтованого роду шляхом розділення кінцевих точок приєднання до границі основної клітки графа-основи схрещених пар графів меншого роду як аналога схрещених ребер, що розділятимуть пари кінцевих вершин на колі евклідової площини. Для цього використаємо метод  $\phi$ -перетворень та метод рекурсивних аналогій, або їх комбінацію. Приклади використання метода аналогій та методу  $\phi$ -перетворень наведено на рис. 9, 10 і 11, відповідно.

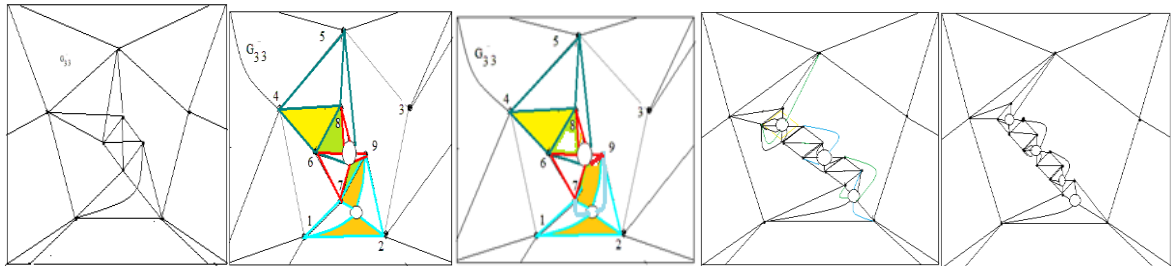


РИС. 9. На перших трьох картах граф-обструкція  $G_{33}$  мінімально вкладена на  $N_3$ , де клітки з границями (1, 7, 9, 2) та (4, 6, 8) мають кліткову відстань 1, а його аналогії на 4-й та 5-й картах

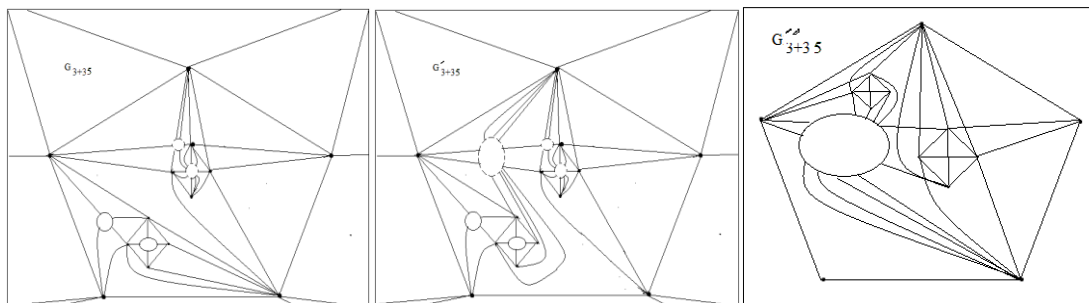


РИС. 10. Графи неорієнтованого роду не більше 6, отримані шляхом склейки графів  $G_3$  та  $G_{35}$  по підграфу  $K_5$

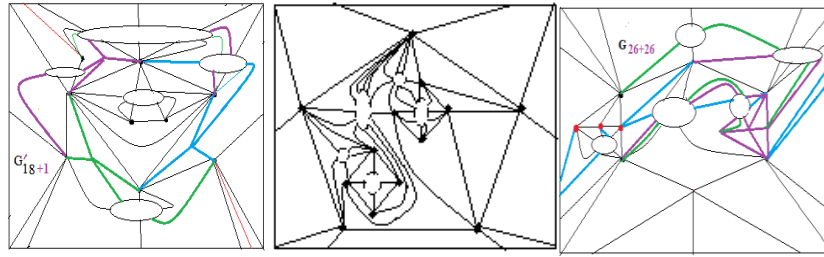


РИС. 11. Графи неорієнтованого роду не більше 6, отримані шляхом склейки графів  $G_1$  та  $G_{18}$  по підграфу  $K_5$  (перша карта), графів  $G_3$  та  $G_{33}$  по підграфу  $K_5$  (друга карта), двох копій графа  $G_{26}$  по підграфу  $K_6$ , (третья карта) зліва направо

*Визначення 6.* Будемо називати  $L_2(H_1, H_2)$  простим ланцюгом довжини 2 із двох графів  $H_1, H_2$ , гомеоморфних  $K_4$ , таке об'єднання  $H_1 \cup H_2$ , коли  $H_1^1 \cap H_2^1 \in$  або  $K_2^1$ , або  $K_3^1$ . Називатимемо об'єднання  $\bigcup_{i=1}^n H_i$  графів  $H_1, H_3, \dots, H_{n-1}, H_2$ , гомеоморфних  $K_4$ , простим ланцюгом  $L_n(H_1, H_2)$  – довжини  $n, n > 2$ , якщо перетини  $H_i^1 \cap H_{i+1}^1$  кожної пари  $(H_i, H_{i+1})$ , де  $i = 3, 4, \dots, n-1$ , та перетини  $H_1^1 \cap H_3^1, H_4^1 \cap H_3^1, \dots, H_{n-1}^1 \cap H_2^1$  пар  $(H_1, H_3), (H_4, H_3), (H_{n-1}, H_2)$  відповідно, матимуть множину спільних ребер  $K_2^1$ , або  $K_3^1$ .

*Лема 3.* Нехай  $\epsilon$  простий ланцюг  $L_n(H_1, H_2)$  із  $n$  графів  $H_1, H_3, \dots, H_{n-1}, H_2$ , гомеоморфних  $K_4$ , приєднаний до графа  $H$ , гомеоморфного  $K_5$  чи  $K_{3,3}$  та вкладеного до проективної площини, наступним  $\phi$ -перетворенням:  $\phi(H + L_2(H_1, H_2), \sum_{i=s}^2 (h_i + e_i)) \rightarrow (G, \{h_i^*\}_{i=1}^2)$ , де пара несуміжних ребер  $e_1, e_2, e_i \in H_i^1$ , ототожнюється з парою ребер  $h_i$ , що належить до границі найбільшої клітки  $s$  графа  $H$  з ребрами  $h_i, i = 1, 2$ . Мають місце твердження.

1. Якщо перетини  $H_1^1 \cap H_3^1, H_4^1 \cap H_3^1, \dots, H_{n-1}^1 \cap H_2^1$  пар  $(H_1, H_3), (H_4, H_3), (H_{n-1}, H_2)$  відповідно, матимуть множину спільних ребер  $K_2^1$ , то матимемо наступні співвідношення:

а) якщо  $n = 2$  та ребра  $h_i$  несуміжні, то граф  $G$  – граф-обструкція роду 2 та при видаленні спільного ребра графів  $H_1, H_2$  одна з двох зірок зі схрещеними ребрами вкладається до псевдоклітки  $s'$  із спільним ребром з  $s$ ;

б) якщо  $n = 2$  та ребра  $h_i$  суміжні, то при видаленні спільного ребра графів  $H_1, H_2$  одна з двох зірок зі схрещеними ребрами вкладається до псевдоклітки  $s'$  із спільним ребром з 2-кліткою  $s$  та граф  $G$  – граф-обструкція роду 2;

в) якщо ланцюг  $L_n(H_1, H_2)$  має, щонайменше, три графи, то несуттєвими ребрами графа  $G$  відносно роду при видаленні будуть ребра із  $H_3^1$ .

2. Якщо перетини  $H_1^1 \cap H_3^1, H_4^1 \cap H_3^1, \dots, H_{n-1}^1 \cap H_2^1$  пар  $(H_1, H_3), (H_4, H_3), (H_{n-1}, H_2)$ , відповідно, матимуть множину спільних ребер  $K_3^1$ , то матимемо наступні співвідношення:



а) якщо до графа  $H$  приклеїти по простим реберним ланцюгам  $L_1, L_2$  два різні ланцюги  $L_2(H_1, H_2), L_2(H_1', H_2')$ , де  $L_1, L_2$  без спільних ребер графа  $H$ , або  $L_1 = L_2$ , то граф  $G$  – граф-обструкція роду 3.

Приклади графів, побудованих за твердженнями леми 3, показані на рис. 12

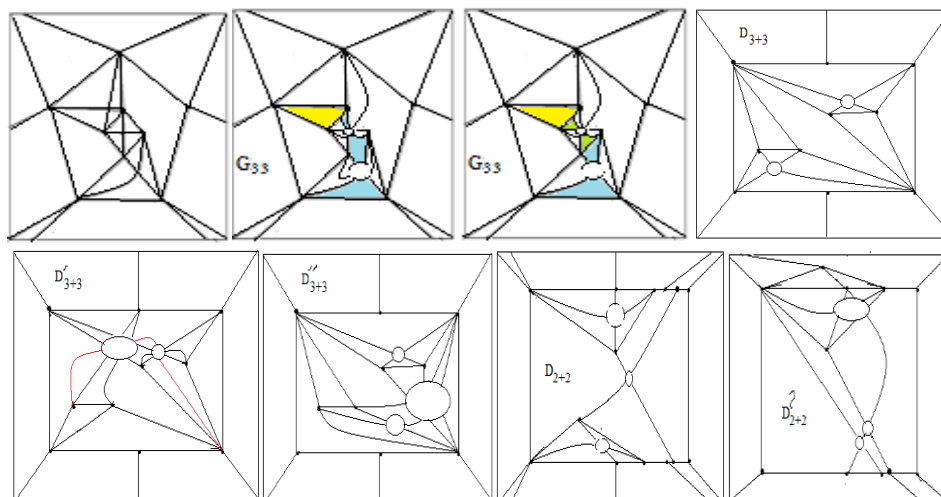


РИС. 12. Графи та граф-обструкції неорієнтованого роду 3 та 4, отримані шляхом склейки по підграфу  $K_{3,3}$  двох графів  $G_3$  та склейки графів  $G_2$  по підграфу  $K_{3,3}$

#### Список літератури

1. Хоменко М. П. φ-перетворення графів. Препринт ИМ АНУ. Киев. 1973. 383 с.
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ АНУ. Киев. 1970. 299 с.
3. Mohar B., Thomassen C. Graphs on Surfaces. Johns Hopkins University Press, 2001. 412 p. <https://www.sfu.ca/~mohar/Book.html>
4. Hur S. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. Phd, Ohio State University, 2008. [http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc\\_num=osu1209141894](http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=osu1209141894)
5. Archdeacon D., Huneke P. A Kuratowski Theorem for Nonorientable Surfaces. *Journal of combinatorial theory. Series B.* 1989. **46**. P. 173–231. [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(89\)90043-9](https://doi.org/10.1016/0095-8956(89)90043-9)
6. Петренюк В.І. Про структуру площинних підграфів графів-обструкцій неорієнтованої поверхні заданого роду. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2021. № 33. С. 105–109. [Google Scholar](https://scholar.google.com/citations?user=petrenjukvi)
7. Bienstock D., Dean N. On obstructions to small face covers in planar graphs, *J. Combin. Theory. Ser. B.* 1992. **55**. P. 163–189. <https://doi.org/10.1016/0095-8956%2892%2990040-5>
8. Bienstock D., Monma C.L. On the complexity of covering vertices by faces in a planar graph. *SIAM J. Comput.* 1988. **17**. P. 53–76. <https://doi.org/10.1137/0217004>
9. Mohar B. Face Covers and the Genus Problem for Apex Graphs. *Journal of Combinatorial Theory. Series B.* 2001. **82**. P. 102–117. <https://doi.org/10.1006/jctb.2000.2026>
10. Mohar B. Apex graphs with embeddings of face-width three. *Discrete Mathematics.* 1997. **176**. P. 203–210. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(96\)00363-9](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(96)00363-9)

Одержано 14.07.2022

**Петренюк Володимир Ілліч,**

кандидат фізико-математичних наук, доцент

Центральноукраїнського національного технічного університету, Кропивницький,

[petrenjukvi@i.ua](mailto:petrenjukvi@i.ua)

<https://orcid.org/0000-0001-7313-9642>

**Петренюк Дмитро Анатолійович,**

кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник  
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,  
[guitar\\_player@ukr.net](mailto:guitar_player@ukr.net)

**Оришака Олег Володимирович,**

кандидат технічних наук, доцент  
Центральноукраїнського національного технічного університету, Кропивницький.  
[oryshaka\\_o\\_v@ukr.net](mailto:oryshaka_o_v@ukr.net)

UDC 519.85

Volodymyr Petrenjuk<sup>1</sup>\*, Dmytro Petreniuk<sup>2</sup>, Oleh Oryshaka<sup>1</sup>

## Structure of Projective Planar Subgraphs of the Graph Obstructions for Fixed Surface

<sup>1</sup> Central Ukrainian National Technical University

<sup>2</sup> V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv

\* Correspondence: [petrenjukvi@i.u](mailto:petrenjukvi@i.u)

Consider the problem of studying the metric properties of a subgraph  $G \setminus v$ , where  $v$  is an arbitrary vertex of obstruction graphs  $G$  of a nonorientable genus, which will determine the sets of points of attachment of one subgraph to another and allow constructing prototypes of graphs-obstruction with number of vertices greater than 10 nonorientable genus greater than 1. This problem is related to Erdosh's hypothesis [3] on the coverage of obstruction graphs of an undirected surface of the genus  $k$ , where  $k > 0$ , the smallest inclusion of the set of  $k + 1$ st graph of the homeomorphic  $K_5$ , or  $K_{3,3}$ , in [4] constructively proved for 35 minors of obstruction graphs of the projective plane, a set of 62 with no more than 10 vertices of obstruction graphs and their splits for the Klein surface, as well as some obstruction graphs for other surfaces. In [5], the existence of a finite set of obstruction graphs for a non-orienting surface was proved. A similar problem was considered in [6], where models or prototypes of obstruction graphs were considered. The prototype of the graph-obstruction of the undirected genus, we will call the graphs that have their own subgraph graph-obstruction of the undirected genus. In [7, 8] the tangent problem of covering the set of vertices with the smallest number of cycles-boundaries of 2-cells was considered, the concept of cell distance is given in [9, 10], where the boundaries of an oriented genus of graphs formed from planar graphs and a simple star glued to some of its peaks. Hypothetically, it is possible to obtain them by recursive  $\varphi$ -transformation of the graph-obstruction of the projective plane and a copy of its planar subgraph given on vertices, edges or parts of edges, or simple chains, i.e. achievable parts of the so-called graph-basis (graph of homeomorphic graph Kuratovsky plane). We assume that instead of one subgraph there can be several copies of subgraphs of graphs-obstructions of the projective plane. The article has an introduction and two parts, in which the structural properties of subgraphs of obstruction graphs for an undirected surface, presented as a  $\varphi$ -image of one of the Kuratovsky graphs and at least one planar graph, are investigated. The metric properties of the minimal embeddings of the subgraphs of the obstruction graphs for undirected surfaces are considered, and the main result is Theorems 1, 2, and Lemma 3 as the basis of the prototype construction algorithm.

**Keywords:**  $\varphi$ -transformation of graphs, nonorientable surface, prototypes of graph-obstruction.