

УДК 531.36:534.1:62-755

© 2005

Г. Б. Филимохин, В. В. Пирогов

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ОСИ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА
СВЯЗАННЫМИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ

Введение. Исследования устойчивости движения связанных абсолютно твердых тел (АТТ) являются актуальными задачами механики [1, 3 – 10, 12]. Такими системами могут быть искусственные спутники Земли или космические аппараты, положение которых в пространстве стабилизируется вращением [1, 3, 4, 6, 9, 10, 12], роторы, уравниваемые автобалансирами [5, 7], и другие системы [8, 11, 13]. В работе [6] рассмотрена задача стабилизации положения оси вращения твердого тела маятниками. При этом исследована устойчивость основного движения системы (в котором стабилизируемое тело вращается вокруг собственной центральной оси) в малом с помощью первого метода Ляпунова. Работа [1] посвящена решению аналогичной задачи, где рассмотрена устойчивость всех установившихся движений системы путем исследования на условный экстремум полной (кинетической) энергии системы. В работе [7] исследована задача об уравнивании ротора связанными АТТ.

В настоящей работе рассмотрена задача стабилизации оси вращения тела этими же связанными АТТ. Для исследования устойчивости установившихся движений применяется как первый метод Ляпунова, так и исследование на условный экстремум.

§1. Описание модели системы. Пусть система - изолированная и состоит из стабилизируемого несущего тела (в дальнейшем просто тело) массой M (рис. 1, *a*). В идеальном случае оно должно вращаться вокруг собственной главной центральной оси W , проходящей через центр масс тела – точку O . Предполагаем, что тело симметрично относительно плоскости N , проходящей через точку O , и перпендикулярную оси W . Внутри тела, в плоскости N находится неподвижная относительно тела материальная точка D массой m_d , которая создает неуравновешенность (рис. 1, *a*). Для ее компенсации внутрь тела на невесомый подвес установлены связанные АТТ (рис.1, *б*), имеющие неподвижные точки K_i на оси W . АТТ одинаковы и имеют следующие массо-инерционные характеристики относительно главных осей X_1, X_2, X_3 , изображенных на рисунке 1, *г*, и выходящих из точек K_i , [5]:

$$I_1 = A, \quad I_2 = I_3 = B, \quad \vec{l}_G = (0, 0, -l)^T. \quad (1.1)$$

Здесь: I_1, I_2, I_3 – осевые моменты инерции АТТ; \vec{l}_G – радиус-вектор центра масс АТТ относительно точки K_i ; t – знак транспонирования. Общий центр масс связанных АТТ – точка G , находится в одной плоскости с точками O, D . В этой же плоскости находится и центр масс системы - точка C (рис. 1, *в*). Заметим, что в силу особенностей системы любая ось, параллельная оси W , является главной осью инерции системы.

Проведем через точку O вспомогательные оси U, V, W , жестко связанные с телом, причем ось U направим в сторону точки D , а ось V – так, чтобы система координат была правой. Обозначим через J_O осевой момент инерции тела относительно оси W , и через ω – угловую скорость вращения тела. Координаты точки D относительно осей U, V, W имеют вид $(e, 0, 0)$.

Движение тела определяем относительно осей X, Y, Z , которые выходят из центра масс системы – точки C , и параллельны, соответственно, осям U, V, W (рис. 1, *в*).

Центр масс изолированной системы движется прямолинейно и равномерно. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что он неподвижен.

Для описания движения АТТ используем вспомогательные оси U_i , которые выходят из точек K_i и параллельны оси U , и оси Ξ_i , которые выходят из точек K_i и получаются из осей U_i после их поворота на угол ψ вокруг оси W (рис. 1, б).

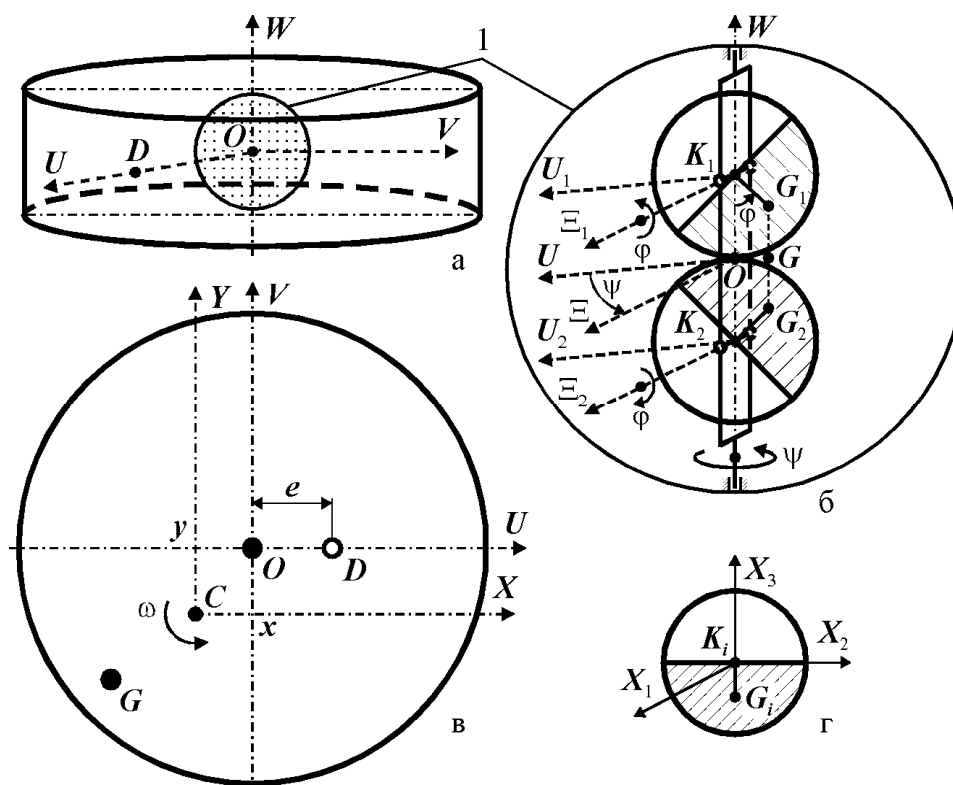


Рис. 1

АТТ имеют относительно тела две степени свободы, а именно: могут поворачиваться вместе на угол ψ вокруг оси W и на равные углы ϕ в противоположные стороны вокруг осей Ξ_i . При поворотах АТТ вокруг осей вращения возникают моменты сопротивления $-H_1\dot{\phi}$, $-2H_2\dot{\psi}$, где H_1, H_2 – коэффициенты вязкого трения; $\dot{\phi}, \dot{\psi}$ – относительные угловые скорости АТТ.

Полагаем, что в силу начальных условий тело двигалось плоскопараллельно. Силы, возникающие при движении связанных АТТ относительно тела, не будут нарушать плоскопараллельного движения тела. Поэтому будем считать, что тело и далее движется плоскопараллельно.

Предполагаем, что ось W – наибольшего момента инерции [10]. В противном случае предполагаем, что существует активная система по поддержанию плоскопараллельного движения тела. В силу указанных особенностей системы ее масса и создаваемые силы – малы и их можно не учитывать.

Будем выделять основные движения, в которых точка D уравновешена связанными АТТ, точки O и C совпадают и тело вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси $W=Z$. Наряду с основными движениями могут существовать побочные. В них точка D не уравновешена, и тело вращается вокруг оси Z , которая не совпадает с осью W . Заметим, что в силу особенностей системы ось Z – ее главная центральная ось инерции.

С учетом вышеизложенного, движение системы определяем обобщенными координатами x, y, ϕ, ψ . Тогда имеем следующую систему уравнений в безразмерном виде, описывающих движение системы и которые получены согласно:

теореме о движении центра масс системы

$$\xi + 2R_m(e_0 - \sin\phi \sin\psi) = 0; \quad \eta + 2R_m \sin\phi \cos\psi = 0; \quad (1.2)$$

закону сохранения момента количества движения материальной системы

$$(R_J - \xi^2 - \eta^2)R_\omega + \dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi + 2R_p^2 R_m \dot{\psi} = R_J; \quad (1.3)$$

и теореме об изменении момента количества движения для связанных АТТ

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + h_1 \dot{\phi} - [(\ddot{\xi} - 2R_\omega \dot{\eta} - R_\omega^2 \xi - \dot{R}_\omega \eta) \sin \psi - (\ddot{\eta} + 2R_\omega \dot{\xi} - R_\omega^2 \eta + \dot{R}_\omega \xi) \cos \psi] \cos \phi = 0; \\ (\ddot{\psi} + \dot{R}_\omega) R_p^2 + h_2 R_p^2 \dot{\psi} - [(\ddot{\xi} - 2R_\omega \dot{\eta} - R_\omega^2 \xi - \dot{R}_\omega \eta) \cos \psi + \\ + (\ddot{\eta} + 2R_\omega \dot{\xi} - R_\omega^2 \eta + \dot{R}_\omega \xi) \sin \psi] \sin \phi = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где в (1.2) – (1.4) безразмерные переменные и время

$$\xi = \frac{x l}{\rho_1^2}; \quad \eta = \frac{y l}{\rho_1^2}; \quad R_\omega = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad \tau = \omega_0 t; \quad \left(\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau} \right), \quad (1.5)$$

и безразмерные параметры

$$\begin{aligned} R_J = \frac{(J_O + m_d e^2 + 2B) l^2}{M_\Sigma \rho_1^4}; \quad R_m = \frac{m l^2}{M_\Sigma \rho_1^2}; \quad h_{1/2} = \frac{H_{1/2}}{m \rho_{1/2}^2 \omega_0}; \\ R_p = \rho_2 / \rho_1; \quad e_0 = (m_d e) / 2 m l, \end{aligned} \quad (1.6)$$

причем в (1.5) и (1.6) $M_\Sigma = M + m_d + 2m$; $\rho_1 = \sqrt{A/m}$; $\rho_2 = \sqrt{B/m}$; ω_0 - угловая скорость, с которой бы вращалась уравновешенная система как жесткое целое вокруг главной центральной оси тела; t - размерное время.

§2. Приведение задачи определения условий стабилизации положения оси вращения тела к задаче исследования осевого момента инерции системы на условный экстремум. Поскольку на систему действуют только диссипативные силы и ее полная энергия совпадает с кинетической, то

$$\frac{dT}{dt} = -2R, \quad (2.1)$$

где T – кинетическая энергия системы, R – диссипативная функция Релея.

Удвоенное значение функции Релея характеризует быстроту уменьшения полной механической энергии. В связи с тем, что во время переходных процессов к системе не подводится внешняя и внутренняя энергия, то со временем движение системы установится и кинетическая энергия системы примет экстремальное значение. В установившихся движениях связанные АТТ с телом будут вращаться как одно целое и кинетическая энергия системы будет определяться формулой:

$$T = \frac{1}{2} \tilde{J}_z R_\omega^2, \quad (2.2)$$

где

$$\tilde{J}_z = R_J - \xi^2 - \eta^2 = R_J - 4R_m^2 e_0^2 + 8R_m^2 e_0 \sin \phi \sin \psi - 4R_m^2 \sin^2 \phi, \quad (2.3)$$

– безразмерный осевой момент инерции системы.

Из (2.2), (2.3) видно, что в установившемся движении кинетическая энергия системы зависит от параметров $\xi, \eta, \phi, \psi, R_\omega$, которые связаны уравнениями (1.2) и (1.3).

Сделаем следующие замечания [1, 2]:

- 1) из уравнений (1.2) и (1.3) можно заключить, что параметры $\xi, \eta, \phi, \psi, R_\omega$ изменяются одновременно или одновременно являются постоянными;
- 2) во время переходных процессов кинетическая энергия системы уменьшается, так как диссипативная функция – положительна;

3) если количество установившихся движений конечно, то осуществляться будут только те, в которых кинетическая энергия системы будет иметь абсолютный или локальный минимум.

Кинетическую энергию системы, с учетом уравнения (1.3), в установившемся движении можно записать следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} \frac{R_J^2}{\tilde{J}_z}, \quad R_J^2/2 = \text{const}. \quad (2.4)$$

Из (2.4) видно, что когда T принимает минимальное значение, \tilde{J} принимает максимум и т. д. Поэтому в отличие от работы [1], будем исследовать на условный экстремум осевой момент инерции \tilde{J}_z , а не кинетическую энергию системы.

§3. Исследование осевого момента инерции системы на условный экстремум.

Проведение этих исследований позволяет дать ответ относительно того, устойчивы или неустойчивы установившиеся движения системы, используя для этого критерий Сильвестра [2].

1. Исследование на условный экстремум осевого момента инерции системы как функции ξ, η . Возьмем первые производные от (2.3) по ξ, η и приравняем их к нулю, получим

$$\partial \tilde{J}_z / \partial \xi = -2\xi = 0, \quad \partial \tilde{J}_z / \partial \eta = -2\eta = 0. \quad (3.1)$$

Необходимое условие существования экстремума выполняется при $\xi, \eta = 0$. Заметим, что это соответствует одному из основных движений (при условии его существования), так как в них тело вращается вокруг собственной главной центральной оси. Возьмем вторые частные производные от уравнения (2.3) по ξ и η , получим

$$a_{11} = \frac{\partial^2 \tilde{J}_z}{\partial \xi^2} = -2 < 0; \quad a_{22} = \frac{\partial^2 \tilde{J}_z}{\partial \eta^2} = -2; \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 \tilde{J}_z}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \eta \partial \xi} = 0;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 4 > 0. \quad (3.2)$$

Согласно критерию Сильвестра [10] \tilde{J}_z принимает максимальное значение. Тогда T принимает минимальное значение и поэтому основное (основные) движение устойчиво (при условии его (их) существования).

2. Исследование на условный экстремум осевого момента инерции системы как функции φ, ψ . Возьмем первую производную от (2.3) по φ и ψ

$$\frac{\partial \tilde{J}_z}{\partial \varphi} = 8R_m^2 \cos \varphi (e_0 \sin \psi - \sin \varphi) = 0;$$

$$\frac{\partial \tilde{J}_z}{\partial \psi} = 8R_m^2 e_0 \sin \varphi \cos \psi = 0. \quad (3.3)$$

Анализ полученной системы уравнений показывает, что установившиеся движения делятся на три группы, в которых связанные АТТ вращаются синхронно с телом.

В первой группе (рис. 2, а, б) $\varphi_1 = \varphi_0$, $\varphi_2 = \pi - \varphi_0$, $\varphi_0 = \arcsin(e_0)$ – АТТ отклонены противоположно точке D ровно на столько, что компенсируют неуравновешенность. В этих движениях осуществлена стабилизация оси вращения тела $\xi = \eta = 0$. Поэтому это два основных движения. Здесь и ниже будем полагать, что

$$e_0 < 1, \quad (3.4)$$

причем данное неравенство – достаточное условие существования двух основных движений.

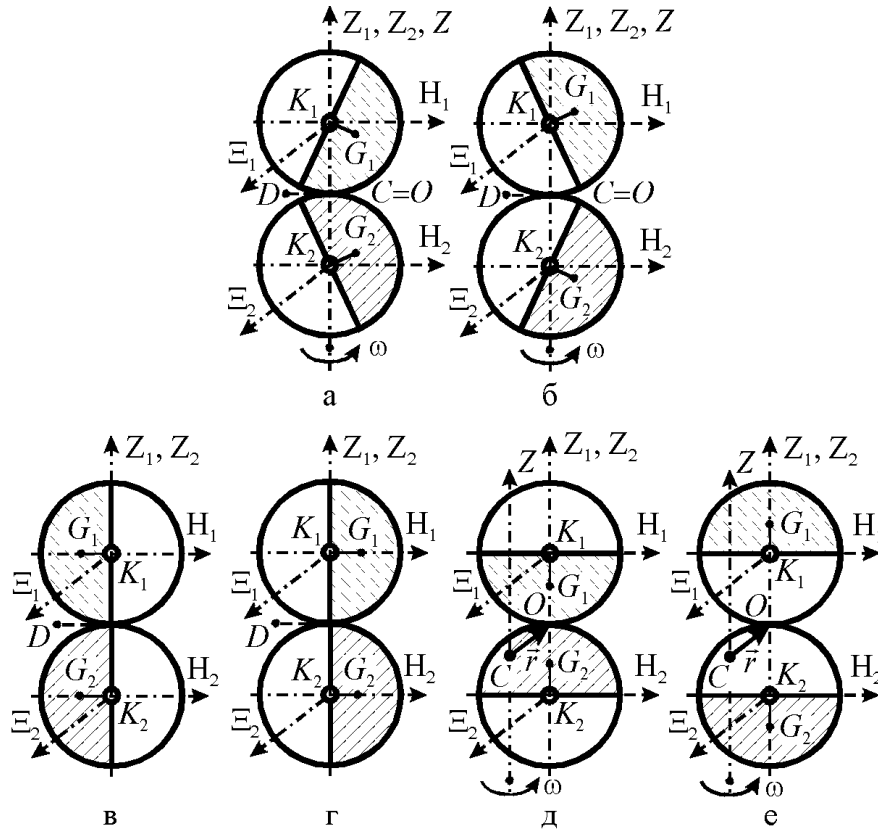


Рис. 2

Во второй группе (рис. 2, в, г) $\varphi_3 = -\pi/2$, $\varphi_4 = \pi/2$ – АТТ максимально отклонены в сторону материальной точки, создающей неуравновешенность, или отклонены в противоположную сторону, не уравновешивают тело и поэтому это побочные движения.

В третьей группе (рис. 2, д, е) $\varphi_5 = 0$, $\varphi_6 = \pi$ – АТТ не отклонены или повернуты вокруг вторых осей вращения на 180° , не уравновешивают тело и поэтому это побочные движения. В обоих движениях вторые оси вращения АТТ параллельны вектору отклонения центральной оси тела от оси вращения.

Для основных движений будем иметь

$$a_{11} = \frac{\partial^2 \tilde{J}_z}{\partial \varphi^2} = -8R_m^2(1 - e_0^2) < 0, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 \tilde{J}_z}{\partial \psi^2} = -8R_m^2 e_0^2,$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 \tilde{J}_z}{\partial \varphi \psi} = \frac{\partial^2 \tilde{J}_z}{\partial \psi \varphi} = 0, \quad \Delta = 64R_m^4 e_0^2(1 - e_0^2) > 0. \quad (3.5)$$

Видно, что \tilde{J}_z будет иметь максимум; T – минимум, и основные движения – устойчивы.

Для движения φ_3 будем иметь

$$a_{11} = 8R_m^2(1 + e_0) > 0, \quad a_{22} = 8R_m^2 e_0, \quad a_{12} = a_{21} = 0, \quad \Delta = 64R_m^4 e_0(1 + e_0) > 0. \quad (3.6)$$

Видно, что \tilde{J}_z принимает минимальное значение, а T – максимальное, рассматриваемое движение неустойчиво.

Для движения φ_4 будем иметь

$$a_{11} = 8R_m^2(1 - e_0) > 0, \quad a_{22} = -8R_m^2 e_0, \quad a_{21} = a_{12} = 0, \quad \Delta = -64R_m^4 e_0(1 - e_0) < 0. \quad (3.7)$$

Видно, что и \tilde{J}_z , и T принимают значение условного экстремума, которое не есть максимумом или минимумом, и рассматриваемые движения неустойчивы.

Аналогично для движений Φ_5 и Φ_6 будем соответственно иметь:

$$a_{11} = -8R_m^2 < 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{21} = a_{12} = \pm 8R_m^2 e_0, \quad \Delta = -64R_m^4 e_0^2 < 0. \quad (3.8)$$

где верхний знак соответствует движению Φ_5 , а нижний - Φ_6 .

Видно, что и \tilde{J}_z , и T принимают значение условного экстремума, которое не есть максимумом или минимумом, и рассматриваемые движения неустойчивы.

Поскольку у системы конечное число установившихся движений и среди них устойчивы основные, а побочные – неустойчивы, то со временем будет осуществляться только одно из основных движений.

Заметим, что найденные установившиеся движения системы можно получить и из уравнений движений (1.2) – (1.4), положив в них производные равными нулю. Однако для ответа на вопрос о характере устойчивости (неустойчивости) движений необходимы исследования, проведенные выше.

§4. Исследование устойчивости основного установившегося движения первым методом Ляпунова. Данное исследование с применением первого метода Ляпунова дает возможность определить скорость затухания переходных процессов, а также собственные частоты колебаний системы в случае, когда она была выведена, вследствие возмущений, из основного движения.

Используем последовательность исследований, примененную в работах [3, 6]. Введем отклонение от основного движения

$$\xi = u; \quad \eta = v; \quad \varphi = \tilde{\varphi} + \alpha; \quad \psi = \tilde{\psi} + \beta; \quad R_\omega = \tilde{R}_\omega + p, \quad (4.1)$$

где u, v, α, β, p – возмущения ($|u|, |v|, |\alpha|, |\beta|, |p| \ll 1$); $0, 0, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{R}_\omega$ – невозмущенное движение.

Из (1.2) находим u, v и их первые и вторые производные $\dot{u}, \dot{v}, \ddot{u}, \ddot{v}$, а из (1.3) находим p и \dot{p} . Тогда уравнения (1.4) после линеаризации и преобразований примут вид

$$\begin{aligned} (1 - 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi})\ddot{\alpha} + h_1 \dot{\alpha} + 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi} \alpha + 2R_m \sin 2\tilde{\varphi} \dot{\beta} &= 0; \\ \left(R_p^2 - 2 \frac{R_p^4}{R_J} R_m - 2R_m \sin^2 \tilde{\varphi} \right) \ddot{\beta} + h_2 R_p^2 \dot{\beta} + 2R_m \sin^2 \tilde{\varphi} \beta - 2R_m \sin 2\tilde{\varphi} \dot{\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Если ввести обозначение

$$\begin{aligned} b_{11} &= (1 - 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi})\lambda^2 + h_1 \lambda + 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi}; \quad b_{12} = 2R_m \sin 2\tilde{\varphi} \lambda; \\ b_{21} &= -2R_m \sin 2\tilde{\varphi} \lambda; \quad b_{22} = \left(R_p^2 - 2 \frac{R_p^4}{R_J} R_m - 2R_m \sin^2 \tilde{\varphi} \right) \lambda^2 + h_2 R_p^2 \lambda + 2R_m \sin^2 \tilde{\varphi}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4;$$

$$a_0 = (1 - 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi}) d; \quad a_1 = (1 - 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi}) h_2 R_p^2 + d h_1;$$

$$a_2 = h_1 h_2 R_p^2 + 4R_m^2 \sin^2 2\tilde{\varphi} + 2R_m \sin^2 \tilde{\varphi} (1 - 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi}) + 2R_m d \cos^2 \tilde{\varphi};$$

$$a_3 = 2h_1 R_m \sin^2 \tilde{\varphi} + 2h_2 R_m R_p^2 \cos^2 \tilde{\varphi}; \quad a_4 = R_m^2 \sin^2 2\tilde{\varphi}, \quad (4.4)$$

где

$$d = R_p^2 - 2 \frac{R_p^4}{R_J} R_m - 2R_m \sin^2 \tilde{\varphi}. \quad (4.5)$$

Критерий Рауса-Гурвица дает следующие условия асимптотической устойчивости основных движений:

$$a_i > 0, \quad /i = \overline{1,4}/,$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \quad \Delta_3 = \Delta_2 a_3 - a_1^2 a_4 > 0, \quad \Delta_4 = a_4 \Delta_3 > 0. \quad (4.6)$$

Первая группа условий будет выполняться, если будет выполняться условие $d > 0$. В наиболее неблагоприятном случае ($\sin^2 \tilde{\varphi} \approx 1$) имеем

$$R_p^2 - 2 \frac{R_p^4}{R_J} R_m - 2R_m > 0. \quad (4.7)$$

Учитывая выражения (1.6), приводим условие (4.7) к виду

$$\left(M + 2m \left(1 - \frac{ml^2}{B} \right) \right) (J_C + m_d e^2) + J_O m_d > 0, \quad (4.8)$$

Условие (4.8) является условием существования основного движения и выполняется всегда, поскольку для любого АТТ $ml^2 < B$. Вторая группа условий в (4.6), при подстановке a_i , будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (1 - 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi}) h_2 R_p^2 + dh_1 > 0; \\ \Delta_2 &= 2h_2 R_m R_p^2 \sin^2 \tilde{\varphi} (1 - 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi})^2 + \\ &+ 2h_1 R_m \cos^2 \tilde{\varphi} d^2 + (h_1 h_2 R_p^2 + 4R_m^2 \sin^2 2\tilde{\varphi}) [h_2 R_p^2 (1 - 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi}) + h_1 d] > 0; \\ \Delta_3 &= 4R_m^2 R_p^2 h_1 h_2 [(1 - 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi}) \sin^2 \tilde{\varphi} + d \cos^2 \tilde{\varphi}]^2 + \\ &+ 2R_m [(1 - 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi}) R_p^2 h_2 + dh_1] (R_p^2 h_1 h_2 + 4R_m^2 \sin^2 2\tilde{\varphi}) (h_1 \sin^2 \tilde{\varphi} + R_p^2 h_2 \cos^2 \tilde{\varphi}) > 0. \quad (4.9) \end{aligned}$$

Видно, что эти условия автоматически выполняются при выполнении условия (4.8). Таким образом, основные движения – асимптотически устойчивы.

Заметим, что скорость затухания переходных процессов и собственные частоты колебания системы определяются корнями характеристического уравнения (4.4). Поскольку это уравнение – полином четвертого порядка, то его целесообразно исследовать численно.

Таким образом, можно сформулировать следующие выводы:

1) рассматриваемая система имеет шесть существенно различных установившихся движений: два основных, в которых связанные АТТ компенсируют неуравновешенность создаваемую точкой; четыре побочных, в которых система неуравновешена, причем в первом – связанные АТТ максимально отклонены в сторону точки, которая создает неуравновешенность, во втором – в противоположную сторону, в третьем и четвертом положении не отклонены или повернуты на 180^0 ;

- 2) основные движения устойчивы, а побочные – неустойчивы;
- 3) со временем система будет осуществлять одно из основных движений, т.е. произойдет стабилизация положения оси вращения тела.

Р Е З Ю М Е. Розглянуто задачу стабілізації положення осі обертання тіла зв'язаними абсолютно твердими тілами. Прийнято, що тіло рухається плоскопаралельно. Положення його осі обертання стабілізують зв'язані АТТ, які можуть обертатися разом навколо центральної осі тіла і у протилежних напрямках на рівні кути навколо поперечних осей тіла. Усередині тіла знаходиться нерухома матеріальна точка, що створює незрівноваженість. Встановлено, що за умови існування, стійкі основні рухи системи – рухи, у яких вона обертається навколо центральної осі тіла, а решта рухів (побічних) – нестійка.

S U M M A R Y. The problem of stabilization of the position of a body axis by constrained rigid bodies is considered. It is assumed that the body moves plane-parallel. The position of axis of its rotation is stabilized by the constrained rigid bodies which are able to rotate together around the body centroidal axis and in opposite directions on equal angles around the body transverse axes. Inside the body, the material point exists which creates the disbalance. It is established that the main motions of the system - the motions in which the system is rotated around the centroidal axis – are stable (if they exist), whereas, the rest motions -the unwanted motions – are instable.

1. *Горошко О.О., Філімоніхін Г.Б., Пирогов В.В.* Стабілізація положення осі обертання абсолютно твердого тіла маятниковим (кульовим) автобалансиром // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2004. – №3 – С. 95 – 102.
2. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
3. *Мирер С.А., Сарычев В.А.* Оптимальные параметры спутника, стабилизируемого вращением, с демпфером маятникового типа // Космические исследования. – 1997. – 35, № 6. – С. 651 – 658.
4. *Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А.* Устойчивость связанных твердых тел. – К.: Наук. думка, 1991. – 168 с.
5. *Філімоніхін Г.Б.* Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирів з твердими коригувальними вантажами. - Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.
6. *Філімоніхін Г.Б.* Стабілізація маятниками положення осі обертання ізольованого абсолютно твердого тіла // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Математика – механіка. – 2002. – Вип. № 7 – 8. – С. 67 – 71.
7. *Філімоніхін Г.Б., Невдаха Ю.А.* Уравновешивание ротора, совершающего плоскопараллельное движение, двумя связанными абсолютно твердыми телами с неподвижными точками на оси вала ротора // Прикладная механика. – 2002. – 38, №3. – С. 135 – 144.
8. *Kovalev A.M., Bolgrabskaya I.A., Chebanov D.A., Shcherbak V.F.* Damping of Forced Vibrations in Systems of Connected Rigid Bodies // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, N 3. – P. 343 – 349.
9. *Martynuk A.A., Miladzhanov V.G.* The Theory of Stability of an Orbiting with Gyroscopic Stabilization of Motion // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, N 5. – P. 682 – 690.
10. *Pringle R.Jr.* Stability of the Force-Free Motions of a Dual-Spin Spacecraft. // AIAA Journal. – 1969. – 7, N 6. – P. 1054 – 1063.
11. *Storozhenko V.A.* Dissipation in Systems of Coupled Lagrange Gyroscopes // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 11. – P. 1297 – 1303.
12. *Zakrhevskii A.T.* Optimal Slewing of a Flexible Spacecraft // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, N 10. – P. 1208 – 1214.
13. *Zakrhevskii A.E., Matarazzo J., Khoroshilov V.S.* Dynamics of a System of Bodies with Program – Variable Configuration // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 3. – P. 345 – 350.

Кіровоград. нац. техн. ун-т
(Україна)

Поступила 21.06.2004