ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра вищої математики та фізики

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Частина I

Навчальний посібник

КРОПИВНИЦЬКИЙ
2019

УДК 51

Рецензенти:
доктор фіз.-мат. наук, професор О. В. Авраменко;
доктор технічних наук, професор В. В. Клименко;
кандидат фіз.-мат наук, доцент М. Ф. Семенюта

Вища математика для студентів технічних спеціальностей. Частина І. Навчальний посібник для самостійної роботи студентів на І семестр / Укл.: В.І.Гуцул, С.М.Якименко – Кропивницький: ЦНТУ, 2019 р. – 186 с.

Навчальний посібник складається з розділів «Елементи лінійної алгебри», «Елементи аналітичної геометрії», «Комплексні числа», «Вступ до математичного аналізу», «Похідна і диференціал. Правила і методи диференціювання», «Застосування похідної і диференціала. Дослідження функції» курсу «Вища математика». Призначений для студентів технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання.

Рекомендовано до друку
Вченою радою ЦНТУ
Міністерства освіти та
науки України.
Протокол № 9 від
15.04. 2019 р.

зміст

Програма

Елементи лінійної алгебри

1.Матриці. Поняття числової матриці. Лінійні операції над матрицями. Множення матриць. Транспонування матриць.

2.Визначники. Означення. Правила обчислення визначників другого та третього порядків. Властивості визначників. Обчислення визначників вищих порядків.

3.Системи лінійних рівнянь. Обернена матриця. Система лінійних рівнянь (основні поняття). Матрична запис системи. Розв`язування системи матричним методом і за формулами Крамера.

**4.Розв`язування довільних систем лінійних рівнянь.** Дослідження на сумісність**.** Метод Гаусса. Ранг матриці. Теорема Кронеккера-Капеллі. Загальна схема дослідження й розв`язування систем. Однорідні системи.

Елементи аналітичної геометрії

5.Вектори. Поняття вектора. Лінійні операції над векторами. Поділ відрізка у даному відношенні.

6.Скалярний добуток.

7.Векторний і мішаний добуток векторів. Векторний добуток двох векторів. Мішаний добуток трьох векторів. Розкладання вектора по базису.

8.Пряма на площині. Основні рівняння прямої на площині. Кут між двома прямими.

9.Площина у просторі. Основні рівняння площини у просторі. Кут між двома площинами.

10.Пряма і площина у просторі. Пряма у просторі. Кут між прямою й площиною. Взаємне розміщення прямої й площини.

11.Криві другого порядку. Еліпс. Гіпербола. Парабола.

12.Поверхні другого порядку. Еліпсоїд. Гіперболоїди. Параболоїди. Циліндричні поверхні. Конічні поверхні.

Полярна система координат. Комплексні числа

13.Полярна система координат. Комплексні числа. Різні форми запису комплексного числа. Дії над комплексними числами.

Вступ до математичного аналізу

14.Числова послідовність. Поняття числової послідовності. Збіжність числової послідовності. Нескінченно малі і нескінченно великі числові послідовності.

15.Функція. Границя функції. Поняття функції. Означення границі функції. Властивості границі. Дві чудові границі.

16. Нескінченно малі і нескінченно великі функції. Неперервність функцій. Порівняння нескінченно малих. Точки розриву.

Диференціальне числення функції однієї змінної

17. Похідна. Визначенння похідної. Таблиця похідних. Основні властивості. Диференціювання функцій.

18. Диференціал. Похідна і диференціал вищих порядків. Поняття диференціала. Наближені обчислення за допомогою диференціала. Означення похідної і диференціала вищих порядків.

19. Деякі застосування диференціала і похідної. Правило Лопіталя. Дотична і нормаль до кривої.

20. Застосування похідної до дослідження функції. Повне дослідження і побудова графіка функції. Асимптоти кривої. Зростання, спадання функції; інтервали опуклості, вгнутості і точки перегину кривої. Загальна схема дослідження функції і побудови графіка.

Література

1. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. За заг. ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2000.
2. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі / За редакцією Г.Л.Кулініча. – К.,1992.
3. Рудницький В.Б., Делей В.І. Вища математика. Навч. посібник. Хмельницький: “Поділля”. – 1999.
4. Апатёнок Р.Ф. и др. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.- Мн.: Выш. шк., 1990.
5. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука,1989.
6. Шипачёв В.С. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1990.
7. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высш. шк., 1986; Ч. 1.
8. Апатёнок Р.Ф. и др. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии. – Мн.: Выш. шк., 1990.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I. – М.: Наука,1969

ПЕРЕДМОВА

В сучасних умовах у навчальному процесі ВНЗ спостерігається чітка тенденція до зменшення кількості аудиторних годин та збільшення кількості годин на самостійну роботу студентів. Крім того, у навчальному процесі досить інтенсивно використовуються елементи дистанційної освіти. Даний посібник написаний з метою допомогти студентам самостійно розібратися з новим матеріалом та закріпити теми, які розглядалися на аудиторних заняттях.

Теоретичний матеріал викладений коротко, але у достатньому об'ємі для розв'язування прикладів і задач, передбачених типовими робочими програмами для студентів технічних спеціальностей. Посібник містить велику кількість прикладів з розв'язками та детальними поясненнями. По усім темам розроблені індивідуальні завдання, що дозволяє викладачам здійснювати контроль за роботою студентів.

Посібник призначений для студентів технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання. Він може також використовуватися на інших спеціальностях при вивченні відповідних розділів курсу вищої математики.

I. Елементи лінійної алгебри.

§ 1.1. Матриці.

Прямокутна таблиця чисел

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

яка складається з m рядків і n стовпчиків називається *числовою матрицею* розмірів $m\times n$. Числа $a_{11},a_{12},\dots,a_{nm}$, які утворюють матрицю називаються її *елементами*. Для записаної матриці прийняті також наступні позначення: $A=(a_{ij})\ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n});\ A_{m\times n}=(a_{ij})$.

Розглянемо основні види матриць. Якщо у матриці число рядків дорівнює числу стовпчиків і дорівнює n, то вона називається *квадратною матрицею* n-го порядку:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи a_{11} , a_{22} , … , a_{nn} утворюють *головну діагональ* квадратної матриці, а елементи a_{1n} , $a_{2\,n-1}$, … , a_{n1} – *побічну.*

Матрицею-рядком (*матрицею-стовпчиком*) називається матриця, яка складається з одного рядка (одного стовпчика).

Діагональною називається квадратна матриця, у якої всі елементи, що не належать головній діагоналі, дорівнюють нулю. *Одиничною* називається діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці. Позначається одинична матриця через Е. Отже,

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Нульовою називається матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю. Позначається вказана матриця літерою О.

Трикутною називається квадратна матриця, у якої всі елементи, що знаходяться вище або нижче головної діагоналі дорівнюють нулю.

Лінійними операціями над матрицями називаються операції додавання, віднімання матриць і множення матриці на число.

Додавати й віднімати можна тільки матриці однакових розмірів. *Сумою* двох матриць $A_{m\times n}=(a_{ij})$ і $B_{m\times n}=(b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times n}=(c_{ij})$, елементи якої визначаються за формулою $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Іншими словами при додаванні (відніманні) двох матриць додаються (віднімаються) відповідні елементи цих матриць.

Добутком матриці $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на число λ називається матриця $C_{m\times n}=(c_{ij})$, елементи якої визначаються за формулою $c_{ij}=\lambda a_{ij}$. Як бачимо, для того щоб помножити матрицю на число, необхідно всі елементи матриці помножити на це число.

Приклад 1. Знайти $2A-3B+4E$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$2A-3B+4E=2\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}4 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 6 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12 & 3\\ -6 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 12 & -5\end{pmatrix}.$$

Для лінійних операцій справедливі наступні *основні властивості:*

$$1)\ A+B=B+A;\ 2)\ (A+B)+C=A+(B+C);$$
$$3)\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B;\ 4)\ A+O=A, 1\cdot A=A,$$

де λ – число, O – нульова матриця. Доведемо першу з них на прикладі квадратних матриць другого порядку:

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12}\\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22}\end{pmatrix}=B+A.$$

Розглянемо далі добуток двох матриць. Кажуть, що матриця A *узгоджена* з матрицею B, якщо число стовпчиків матриці A дорівнює числу рядків матриці B. Добуток AB двох матриць визначений тільки тоді, коли матриця A узгоджена з матрицею B. *Добутком* матриці $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на матрицю $B_{n\times p}=(b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times p}=(c_{ij})$, елементи якої обчислюються за формулою

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj} \qquad (1.1)$$

або скорочено

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}\ .$$

Як бачимо ,елемент c_{ij} матриці C дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпчика матриці B.

Приклад 2. Задані матриці

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Знайти добутки АВ і ВА, якщо вони існують.

Розв'язання. Добуток АВ існує (матриця А узгоджена з матрицею В), а добутку ВА не існує (матриця В не узгоджена з матрицею А). Використовуючи формулу (1.1) знайдемо елементи матриці $C=AB$:

$$c_{11}=2\cdot 0+(-1)\cdot(-2)=2, c_{12}=2\cdot 1+(-1)\cdot 3=-1, c_{13}=2\cdot 2+(-1)\cdot 4=0,$$
$$c_{21}=0\cdot 0+3\cdot(-2)=-6, c_{22}=0\cdot 1+3\cdot 3=9, c_{23}=0\cdot 2+3\cdot 4=12.$$

Можемо записати

$$AB=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -6 & 9 & 12\end{pmatrix}.$$

Для добутку двох матриць справедливі наступні *властивості* (при умові, що відповідні добутки існують):

$$1)\ (AB)C=A(BC);\ 2)\ A(B+C)=AB+AC;$$
$$3)\ OA=AO=O;\ 4)\ EA=AE=A,$$

де Е і О – одинична і нульова матриця відповідно.

На прикладі квадратних матриць другого порядку доведемо одну з рівностей четвертої властивості:

$$AE=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\cdot 1+a_{12}\cdot 0 & a_{11}\cdot 0+a_{12}\cdot 1\\ a_{21}\cdot 1+a_{22}\cdot 0 & a_{21}\cdot 0+a_{22}\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

Відмітимо, що у загальному випадку для добутку двох матриць $AB\neq BA$, тобто міняти місцями множники не можна (у прикладі 2 один з добутків узагалі не існує).

Якщо кожен рядок матриці А записати як стовпчик із тим самим номером, то отримаємо матрицю A^T, яка називається *транспонованою* до матриці А.

Приклад 3. Для заданої матриці А визначаємо транспоновану матрицю A^T :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для операції транспонування справедливі такі *властивості*:

$$1)\ (A^T)^T = A;\ 2)\ (A+B)^T = A^T + B^T;\ 3)\ (AB)^T = B^T A^T .$$

§ 1.2. Визначники.

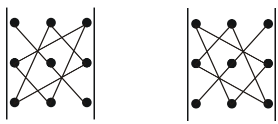
Важливою характеристикою *квадратної* матриці є її *визначник*. Визначник матриці – це число, яке отримують за допомогою певних дій над її елементами. Розглянемо тут тільки методи обчислення визначників та деякі їхні властивості. Такі поняття як порядок матриці, її елементи, головна й побічна діагональ переносяться і на відповідні їм визначники.

Визначники *другого* й *третього* порядків обчислюються відповідно за формулами :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{2.1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{2.2}$$

Формулу (2.2) можна задати за допомогою правила трикутників:



\+ -

На схемі зліва вказані правила утворення трьох перших добутків (вони беруться зі своїм знаком), а справа – трьох останніх (вони беруться із протилежним знаком).

Приклад 1. Обчислити визначники даних матриць :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Використовуючи формули (2.1) і (2.2), отримуємо:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 4\cdot(-3) = 22,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0\cdot 2\cdot 4 + 4\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot(-5) - 3\cdot 2\cdot(-5) - \\ -1\cdot 0\cdot 0 - 4\cdot 1\cdot 4 = 12 + 30 - 16 = 26.$$

Окрім вже використаного позначення, визначник матриці A може позначатися, також, символом det A або Δ.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник, який одержимо з даного за допомогою викреслювання рядка й стовпчика, що містять цей елемент (i-го рядка і j-го стовпчика). *Алгебраїчне доповнення* A_{ij} елемента a_{ij} визначається формулою:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}. \tag{2.3}$$

Приклад 2. Для матриці B з попереднього прикладу обчислити M_{11}, M_{32}, A_{11}, A_{32}.

Розв'язання.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12;$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 1 \cdot 8 = 8;\ A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1) \cdot (-12) = 1.$$

Властивості визначників :

1. Визначник матриці А дорівнює визначнику транспонованої матриці A^T.

2. Якщо матриця містить нульовий рядок або нульовий стовпчик, то її визначник дорівнює нулю.

3. Якщо два рядка (стовпчика) матриці пропорційні або однакові, то її визначник дорівнює нулю.

4. Спільний множник одного рядка (стовпчика) виноситься за знак визначника.

5. Якщо поміняти місцями два рядки або стовпчика, то знак визначника зміниться на протилежний.

6. Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпчика) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпчика), помножені на будь-яке число.

7. Визначник матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпчика) на їхні алгебраїчні доповнення.

8. Визначник трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Доведемо третю властивість (розглянемо визначник другого порядку):

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11} \cdot a_{22} - \lambda a_{12} a_{21} = \lambda (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} a_{21}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Розглянемо два метода *обчислення визначника n–го порядку*. Ці методи базуються на двох останніх властивостях визначників.

Метод розкладання визначника за елементами рядка або стовпчика (сьома властивість) дозволяє поступово знижувати порядок визначників. Об'єм обчислень буде найменшим, якщо визначник розкладати за елементами рядка або стовпчика, що містить найбільше число нулів.

Приклад 3. Обчислити визначник матриці

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 8 & 9 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладемо визначник по другому стовпчику:

$$\det A = 0\cdot A_{12} + 2\cdot A_{22} + 0\cdot A_{32} + 0\cdot A_{42} = 2\cdot A_{22} =$$

$$= 2\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(0\cdot A_{11} + 1\cdot A_{12} + 3\cdot A_{13}) =$$

$$= 2\left(-\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}\right) = 2(-16+3\cdot 14) = 52.$$

Суть *методу зведення визначника до трикутного вигляду* полягає у наступному: спочатку, використовуючи властивості, перетворюємо даний визначник до трикутного вигляду, а потім обчислюємо останній як добуток елементів головної діагоналі.

Приклад 4. Обчислити визначник попереднього прикладу методом зведення до трикутного вигляду.

Розв'язання. Нижче здійснена наступна послідовність дій: поміняли місцями 1-й і 2-й стовпчики; поміняли місцями 1-й і 2-й рядки; поміняли місцями 2-й і 3-й стовпчики; помножили 2-й рядок на –2 і додали до 3-го; помножили 2-й рядок на –1 і додали до 4-го; помножили 3-й рядок на $5/4$ і додали до 4-го; перемножили елементи головної діагоналі.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 8 & 9 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -26/4 \end{vmatrix} = 52.$$

§ 1.3. Обернена матриця. Ранг матриці.

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до квадратної матриці А, якщо виконуються рівності : $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, де Е – одинична матриця.

Квадратна матриця називається *невиродженою*, якщо її визначник відмінний від нуля. Нехай задана невироджена матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для цієї матриці існує єдина обернена матриця A^{-1}, яка визначається за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

де $\det A$ – визначник матриці А; $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{nn}$ – алгебраїчні доповнення відповідних елементів.

Приклад 1. Знайти обернену матрицю A^{-1} і зробити перевірку, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Для матриці третього порядку формула (3.1) має вигляд

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо визначник матриці й алгебраїчні доповнення елементів:

$$\det A=11,\ A_{11}=5,\ A_{12}=-18,\ A_{13}=2,\ A_{21}=0,$$

$$A_{22}=11,\ A_{23}=0,\ A_{31}=-3,\ A_{32}=2,\ A_{33}=1.$$

Підставимо знайдені значення в записану формулу і зробимо перевірку:

$$A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -18 & 11 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}A=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -18 & 11 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Існує й інший метод обчислення оберненої матриці. Укажемо коротко його суть. Дану невироджену матрицю А перетворюємо до одиничної. Одночасно ті ж самі дії виконуємо над одиничною матрицею того ж порядку. Матриця, яка отримується з одиничної, є оберненою A^{-1}.

Приклад 2. Знайти обернену матрицю A^{-1} для матриці А з попереднього прикладу (другим методом).

Розв'язання. Складаємо блокову матрицю, яка містить елементи заданої матриці A (записуються зліва від вертикальної риси) і елементи одиничної матриці E (записуються справа від вертикальної риси). Тут і надалі в фігурних дужках вказані дії, які виконуються над рядками матриці при переході від попередньої до наступної. Запис в перших дужках потрібно розуміти так: перший рядок переписується без змін; помноживши перший рядок вихідної матриці на -2 і додавши до другого, отримуємо другий рядок наступної матриці; помноживши перший рядок вихідної матриці на 2 і додавши до третього, дістаємо третій рядок наступної матриці. Виконуємо перетворення:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{c} R_1 \\ -2R_1 + R_2 \\ 2R_1 + R_3 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{c} (-3/11)R_3 + R_1 \\ (2/11)R_3 + R_2 \\ (1/11)R_3 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/11 & 0 & -3/11 \\ 0 & 1 & 0 & -18/11 & 1 & 2/11 \\ 0 & 0 & 1 & 2/11 & 0 & 1/11 \end{array}\right).$$

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/11 & 0 & -3/11 \\ -18/11 & 1 & 2/11 \\ 2/11 & 0 & 1/11 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо далі поняття рангу матриці й один із методів його обчислення. Нехай задана матриця A розмірів $m \times n$. Деяким чином виберемо k рядків і k стовпчиків цієї матриці. З елементів, що належать вибраним рядкам і вибраним стовпчикам (стоять на перетині цих рядків і стовпчиків) складаємо визначник k–го порядку. Указаний визначник називається мінором k–го порядку матриці A.

Приклад 3. Для матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

обчислити один мінор другого й один мінор третього порядків.

Розв'язання.

$$M_1=\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=4, \quad M_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix}=-36.$$

Мінор M_1 складається з елементів матриці A, що стоять на перетині 2, 3–го рядків і 2, 3–го стовпчиків, а мінор M_2 – 1,2,3–го рядків і 1,3,4–го стовпчиків.

Рангом матриці називається найбільший порядок відмінних від нуля мінорів цієї матриці. Позначається ранг символом r (або $r(A)$).

З даного означення випливає, що ранг матриці завжди не більше її меншого розміру.

Елементарними перетвореннями матриці будемо називати наступні дії:

1) множення будь-якого рядка або стовпчика матриці на відмінне від нуля число;

2) додавання до одного рядка або стовпчика матриці іншого, помноженого на будь-яке число;

3) перестановка місцями двох рядків або стовпчиків.

Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Розглянемо один з методів обчислення рангу матриці. За допомогою елементарних перетворень зводимо дану матрицю до трапецієвидної (або до трикутної) форми, а саме:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3k} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{kk} & \dots & b_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці А дорівнює числу ненульових рядків останньої матриці.

Приклад 4. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Використовуючи елементарні перетворення зводимо матрицю до трапецієвидної форми:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -8 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{Bmatrix} R_1 \\ -2R_1 + R_2 \\ R_1 + R_3 \end{Bmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ -R_2 + R_3 \end{Bmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так як остання матриця має два ненульових рядки, то $r(A) = 2$.

§ 1.4. Системи лінійних рівнянь. Метод Гаусса. Метод Жордана-Гаусса.

Нехай задана система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = h_m, \end{cases} \tag{4.1}$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – невідомі; $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nm}$ – числові коефіцієнти при невідомих; $h_1, h_2, \ldots, h_m$ – вільні члени (числа). Для системи (4.1) можна виписати наступні *основні матриці* :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

де A – основна матриця (або матриця) системи, X – матриця-стовпчик невідомих, H – матриця-стовпчик вільних членів. За допомогою вказаних матриць система (4.1) може бути представлена у вигляді:

$$AX = H\ . \tag{4.3}$$

Рівняння (4.3) є матричною формою запису системи (4.1).

Приклад 1. Виписати основні матриці для системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_3 = 6. \end{cases}$

Розв'язання.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Якщо матрицю A доповнити стовпчиком вільних членів, то дістанемо *розширену матрицю* системи:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & h_m \end{pmatrix}. \qquad (4.4)$$

Елементарними перетвореннями системи (4.1) будемо називати наступні дії :

1)множення будь-якого рівняння системи на відмінне від нуля число;

2) додавання до одного рівняння іншого, помноженого на будь-яке число;

3) перестановка місцями двох рівнянь системи.

Елементарні перетворення системи не змінюють її розв'язків. Іншими словами, після застосування до системи елементарних перетворень отримаємо систему еквівалентну даній.

Розглянемо один з основних методів розв'язування системи лінійних рівнянь, а саме *метод Гаусса* (або *метод послідовного виключення невідомих*). Нехай задана система (4.1). На першому кроці, використовуючи елементарні перетворення, виключаємо невідому x_1 з усіх рівнянь окрім першого (першим повинно стояти рівняння, яке обов'язково містить невідому x_1). На другому кроці виключаємо невідому x_2 з усіх рівнянь, окрім перших двох (у другому рівнянні ця невідома повинна бути) і т.д. Після чергового кроку одне з рівнянь може перетворитися у числову тотожність $0 = 0$. Такі рівняння відкидаються. Можлива ситуація, коли одне з рівнянь приймає вигляд $0 = c$, де с – відмінне від нуля число. У цьому випадку остання система, а, отже, і система (4.1) несумісна, тобто не має розв'язків. Якщо система сумісна, то після виконання вказаних дій (прямого ходу методу Гаусса), будемо мати :

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = q_1, \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = q_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad b_{nn}x_n = q_n. \end{cases} \tag{4.5}$$

або

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1p}x_p + .. + b_{1n}x_n = q_1, \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2p}x_p + \ldots + b_{2n}x_n = q_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad b_{pp}x_p + \ldots + b_{pn}x_n = q_p. \end{cases} \tag{4.6}$$

Підкреслимо, що системи (4.1) і (4.6) (або (4.5)) еквівалентні.

Система (4.5) *визначена,* тобто має єдиний розв'язок. З останнього рівняння цієї системи знаходимо невідому x_n. Підставляємо знайдене значення у передостаннє рівняння і знаходимо x_{n-1}. Продовжуючи подібним чином (обернений хід методу Гаусса), знайдемо усі невідомі.

Система (4.6) *невизначена*. Вона має нескінченну множину розв'язків. У цьому випадку необхідно вводити *основні* (або *базисні*) і *неосновні* (або *вільні*) невідомі. Для системи (4.6) невідомі x_1, x_2, …, x_p – основні, а невідомі x_{p+1}, x_{p+2}, …, x_n – вільні. Введемо позначення $x_{p+1} = c_1,\ x_{p+2} = c_2, \ldots, x_n = c_{n-p}$.Система (4.6) приймає вигляд:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1p}x_p = q_1 - b_{1p+1}c_1 - \ldots - b_{1n}c_{n-p}, \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2p}x_p = q_2 - b_{2p+1}c_1 - \ldots - b_{2n}c_{n-p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad b_{pp}x_p = q_p - b_{pp+1}c_1 - \ldots - b_{pn}c_{n-p}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Розв'язуємо останню систему (вона подібна системі (4.5)) відносно основних невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Приклад 2. Розв'язати дані системи методом Гаусса :

а)$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=5, \\ 3x_1+6x_2-3x_3=1 \end{cases}$, б)$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=4, \\ x_1+x_2+x_3=6, \\ 2x_2-x_3=1, \end{cases}$ в)$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=5, \\ 2x_1+x_3=2, \\ -2x_2+3x_3=-8. \end{cases}$

Розв'язання.

а) Помножимо перше рівняння системи на –3 і додамо до другого:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=5, \\ \qquad\qquad 0=-14. \end{cases}$$

Система не має розв'язків.

б) На практиці зручно працювати не з самою системою, а з її розширеною матрицею, виконуючи елементарні перетворення над її рядками:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{Bmatrix} R_2 \\ R_1 \\ R_3 \end{Bmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} R_1 \\ -3R_1+R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 2R_2+R_3 \end{Bmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \end{pmatrix}.$$

Останній матриці відповідає система

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6, \\ \quad -x_2-4x_3=-14, \\ \qquad\quad -9x_3=-27. \end{cases}$$

Здійснюємо обернений хід методу Гаусса:

$-9x_3=-27, \quad x_3=3;$

$-x_2-4\cdot 3=-14, \quad x_2=2;$

$x_1+2+3=6, \quad x_1=1.$

Таким чином система має єдиний розв'язок $x_1=1, x_2=2, x_3=3.$

б) Аналогічно попередньому, дістаємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{Bmatrix} R_1 \\ -2R_1 + R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ -R_2 + R_3 \end{Bmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Останній матриці відповідає система (рівняння $0 = 0$ відкидається)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -2x_2 + 3x_3 = -8. \end{cases}$$

Невідомі x_1, x_2 вважаємо основними, а невідому x_3 – вільною. Уведемо позначення $x_3 = c_1$. Система приймає вигляд :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 + c_1, \\ \quad -2x_2 = -8 - 3c_1. \end{cases}$$

Знаходимо основні невідомі:

$$-2x_2 = -8 - 3c_1,\ x_2 = 4 + \frac{3}{2}c_1; \quad x_1 + 4 + \frac{3}{2}c_1 = 5 + c_1,\ x_1 = 1 - \frac{1}{2}c_1.$$

Дана система має нескінченну множину розв’язків:

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}c_1, \quad x_2 = 4 + \frac{3}{2}c_1, \quad x_3 = c_1; \quad c_1 \in R\,.$$

Метод Жордана-Гаусса є модифікацією методу Гаусса. По суті він одночасно реалізує прямий і обернений хід методу Гаусса. Наведемо наступні основні моменти цього методу:

1) На першому кроці виписуємо розширену матрицю системи і вибираємо так званий *ключовий елемент* (ненульовий елемент основної матриці). Якщо система має нескінченну множину розв’язків, то відповідна невідома автоматично стає основною. Рядок і стовпчик,

які містять ключовий елемент називаються *ключовим рядком* і *ключовим стовпчиком* відповідно. Використовуючи елементарні перетворення переходимо до матриці, у якій на місці ключового елемента стоїть одиниця, а решта елементів ключового стовпчика дорівнюють нулю.

2) На кожному наступному кроці ключовий елемент вибираємо так, щоб ключовий рядок і ключовий стовпчик не повторювалися.

Приклад 3. За допомогою методу Жордана-Гаусса знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Вибрані ключові елементи будемо підкреслювати двома рисками. Маємо

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{1}} & 2 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{Bmatrix} R_1 \\ -4R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \end{Bmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & \underline{\underline{-10}} & 5 & -25 \\ 0 & -7 & 4 & -18 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{Bmatrix} (2/10)R_2 + R_1 \\ -(1/10)R_2 \\ -(7/10)R_2 + R_3 \end{Bmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{1/2}} & -1/2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_3 + R_2 \\ 2R_3 \end{Bmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

§ 1.5. Невироджені системи лінійних рівнянь. Матричний метод. Формули Крамера.

Розглянемо систему (число рівнянь дорівнює числу невідомих)

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = h_n.
\end{cases} \tag{5.1}
$$

Основні матриці для системи (5.1) мають вигляд:

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}. \tag{5.2}
$$

Якщо визначник матриці A відмінний від нуля, то система (5.1) називається *невиродженою*. У випадку, коли detA = 0, кажуть, що система *вироджена*.

Нехай система (5.1) є невиродженою. Перепишемо її у матричній формі :

$$
AX = H\ . \tag{5.3}
$$

Так як $\det A \neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1}. Помноживши рівняння (5.3) на матрицю A^{-1} зліва, отримаємо

$$
X = A^{-1}H\ . \tag{5.4}
$$

Якщо невироджена система (5.1) розв’язується за допомогою формули (5.4), то кажуть, що вона розв’язана *матричним методом*. При застосуванні цього методу необхідно знаходити обернену матрицю A^{-1}.

На основі формули (5.4) легко отримати формули Крамера:

$$
x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{5.5}
$$

де $\Delta = \det A$ – визначник матриці системи; Δ_1 – визначник, який дістанемо з визначника Δ за допомогою заміни першого стовпчика стовпчиком вільних членів; Δ_2 – визначник, який дістанемо з визначника Δ за допомогою заміни другого стовпчика стовпчиком вільних членів і т.д.

Приклад 1. Задана система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв’язати її: а) за формулами Крамера; б) матричним методом .

Розв’язання. а) Обчислюємо потрібні визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -16, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8;$$

Застосовуємо формули Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{8}{8} = 1, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{8} = -2, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{8}{8} = 1 .$$

б) Знаходимо спочатку обернену матрицю A^{-1} (див § 1.3.):

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Застосовуэмо формулу (5.4):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином $x_1 = 1, \; x_2 = -2, \; x_3 = 1.$

§ 1.6. Критерій сумісності та загальна схема дослідження і розв'язування системи лінійних рівнянь.

Нехай задана система лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = h_m. \end{cases} \tag{6.1}$$

Питання сумісності цієї системи розв'язується сформульованою нижче теоремою.

Теорема Кронеккера–Капеллі (*критерій сумісності* системи лінійних рівнянь): для сумісності системи (6.1) необхідно й достатньо, щоб ранг матриці системи дорівнював рангу її розширеної матриці.

Наведемо *загальну схему* дослідження й розв'язування системи лінійних рівнянь (6.1).

1) Визначаємо $r(A)$ – ранг матриці і $r(\tilde{A})$ – ранг розширеної матриці системи. Якщо $r(A) \neq r(\tilde{A}),$ то система несумісна (на цьому дослідження закінчується). Якщо ж $r(A) = r(\tilde{A}) = r,$ то переходимо до наступного кроку.

2) Виділяємо *базисний мінор* матриці А, тобто відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці.

3) Виписуємо ті рівняння системи (6.1), числові коефіцієнти яких (частина або усі) утворюють базисний мінор. Складена таким чином система еквівалентна системі (6.1). Якщо ранг матриці r дорівнює числу невідомих n, то отримана система невироджена, має єдиний розв'язок і може бути розв'язана будь-яким методом. Якщо ж $r < n$, то переходимо до наступного кроку.

4) Виділяємо *основні* (*базисні*) і *неосновні* (*вільні*) невідомі. Невідомі, коефіцієнти при яких увійшли у базисний мінор, вважаємо основними. Решту n-r невідомих вважаємо вільними. Вільні невідомі позначимо через $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ і переносимо у праві частини рівнянь. Розв'язуємо отриману систему відносно основних невідомих будь-яким методом (система невироджена).

Приклад 1. Дослідити систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

й у випадку сумісності розв'язати її.

Розв'язання. Знайдемо ранг розширеної матриці (див § 1.3). Елементарні перетворення виконуємо тільки над рядками.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -7 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{Bmatrix} R_1 \\ -R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \end{Bmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -10 & 5 & -3 & -11 \\ 0 & -10 & 5 & -3 & -11 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ -R_2 + R_3 \end{Bmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -10 & 5 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $r(\tilde{A}) = 2$ (число ненульових рядків). Остання матриця визначає також і ранг матриці системи. Він дорівнює числу ненульових рядків указаної матриці без останнього стовпчика (без стовпчика вільних членів). У відповідності зі сказаним $r(A) = 2$. Таким чином, $r(\tilde{A}) = r(A) = 2$. Отже, система сумісна.

Виділяємо базисний мінор, тобто відмінний від нуля мінор другого порядку. Так як при знаходженні рангу матриці перетворення виконувалися тільки над рядками, то базисний мінор можна виділяти з останньої матриці. Візьмемо два перших рядка і два перших стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = -10 \neq 0.$$

Розглядаємо далі систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ -10x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -11. \end{cases}$$

Так як базисний мінор утворений з коефіцієнтів при невідомих x_1 і x_2, то x_1 і x_2 – основні невідомі. Вільні невідомі x_3 та x_4 позначаємо через c_1 і c_2 відповідно. Перепишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 + c_1 - c_2, \\ \quad -10x_2 = -11 - 5c_1 + 3c_2. \end{cases}$$

З другого рівняння маємо

$$x_2 = (11 + 5c_1 - 3c_2)/10.$$

Підставивши x_2 в перше рівняння, визначаємо x_1:

$$x_1 = (17 - 5c_1 - c_2)/10\ .$$

Таким чином, система має нескінченну множину розв’язків $((17 - 5c_1 - c_2)/10, (11 + 5c_1 - 3c_2)/10, c_1, c_2)$; $c_1, c_2 \in R$.

§ 1.7. Однорідні системи лінійних рівнянь.

Розглянемо систему :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Система (7.1), у якої вільні члени всіх рівнянь дорівнюють нулю, називається *однорідною системою лінійних рівнянь*. Відмітимо деякі особливості цієї системи. Вона завжди сумісна, так як має, принаймні, один розв'язок :

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0. \qquad (7.2)$$

Якщо ранг r матриці системи дорівнює числу невідомих n, то нульовий розв'язок (7.2) буде єдиним. Якщо ж $r < n$, то система невизначена, тобто має нескінченну множину розв'язків. Таку систему можна розв'язувати методом Гаусса або за загальною схемою (починаючи з другого пункту).

Нехай у системі (7.1) число рівнянь m дорівнює числу невідомих n. У цьому випадку матриця А системи буде квадратною і якщо $\det A \neq 0$, то система має єдиний нульовий розв'язок, а якщо $\det A = 0$, то система має нескінченну множину розв'язків.

Приклад 1.Розв'язати однорідну систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначник матриці системи:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6.$$

Так як $\det A \neq 0$, то система має єдиний розв'язок: $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$

ІІ. Елементи аналітичної геометрії.

§ 2.1. Декартова прямокутна система координат. Довжина відрізка. Поділ відрізка у даному відношенні.

Декартова прямокутна система координат *Oxyz* складається з трьох взаємно перпендикулярних осей (*осей координат*) *Ox, Oy, Oz*.

На вказаних осях визначений масштаб, вони виходять з однієї точки *O* *(початку координат)* і утворюють *праву трійку* (для спостерігача, що знаходиться на осі *Oz* у точці з додатнім значенням, поворот на найменший кут від осі *Ox* до осі *Oy* здійснюється проти руху годинникової стрілки). Площини *Oxy, Oyz, Oxz* називаються *координатними площинами*. Осі *Ox*, *Oy* і *Oz* називаються, також, осями *абсцис, ординат і аплікат* відповідно.

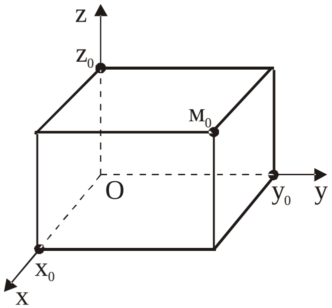


Рис.1

Нехай у просторі задані прямокутна система координат *Oxyz* і точка M_0 (рис. 1). Побудуємо три площині, що проходять через точку M_0, перпендикулярно координатним осям *Ox*, *Oy*, *Oz* і перетинають їх у точках x_0, y_0, z_0 відповідно. Упорядкована трійка чисел x_0, y_0, z_0 називається *координатами* точки M_0 у прямокутній системі координат *Oxyz*; у цьому випадку пишуть $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Відстань між двома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ у просторі може бути знайдена за формулою

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (1.1.)$$

Нехай у просторі задані прямокутна система координат *Oxyz* і дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Якщо точка $M(x,y,z)$ належить відрізку M_1M_2 і $|M_1M| : |M M_2| = \lambda$, то

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (1.2.)$$

Формули (1.2.) дозволяють за відомими координатами двох точок знаходити координати третьої. У частинному випадку, коли M – *середина відрізка* ($\lambda = 1$), маємо

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (1.3.)$$

Приклад 1. Точки $A(0;1;3)$, $B(-3;4;5)$, $C(5;0;1)$ є вершинами трикутника. Знайти довжину медіани AE і координати точки перетину медіан трикутника ABC.

Розвя'зання. Точка E – середина відрізка BC. Знайдемо її координати за формулами (1.3.):

$$x = \frac{-3+5}{2} = 1, \quad y = \frac{4+0}{2} = 2, \quad z = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Довжина медіани –це відстань між точками $A(0;1;3)$ і $E(1;2;3)$. Використовуючи формулу (1.1.), дістанемо

$$|AE| = \sqrt{(1-0)^2 + (2-1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{2}.$$

Нехай P – точка перетину медіан, тоді, як відомо, $|AP|:|PE| = 2:1$. Для визначення координат точки P застосовуємо формулу (1.2.) при $\lambda = 2$:

$$x = \frac{0 + 2\cdot 1}{1+2} = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{1 + 2\cdot 2}{1+2} = \frac{5}{3}, \quad z = \frac{3 + 2\cdot 3}{1+2} = \frac{9}{3}.$$

§ 2.2. Означення векторної величини. Основні поняття.

Величина, яка характеризується тільки числовим значенням називається *скалярною*. Скалярними величинами є вага, відстань і т.д. Величина, яка характеризується числовим значенням і напрямом називається *векторною*. Прикладами таких величин можуть бути швидкість, сила і т.д. *Геометричний вектор* – це напрямлений відрізок. Будь-яку векторну величину можна представити у вигляді геометричного вектора, а тому далі будуть вивчатися тільки останні. Позначається вектор однією малою, або двома великими буквами з рискою (або стрілкою) зверху, наприклад, $\overline{a}$, $\overline{AB}$.

Два вектора вважаються *рівними*, якщо вони розміщені на одній або паралельних прямих, мають однакову довжину і однаково напрямлені. З даного означення випливає, що далі будуть вивчатися *вільні* вектори, тобто вектори, які допускають паралельний перенос. Два вектора називаються *колінеарними*, якщо вони розміщені на одній або паралельних прямих. Вектор, який має однакову довжину з вектором $\overline{a}$, колінеарний йому, але протилежно напрямлений, називається *протилежним* вектору $\overline{a}$ і позначається $-\overline{a}$. Три вектора називаються *компланарними*, якщо вони розміщені на одній, або паралельних площинах. *Нульовим* вектором $\overline{0}$ називається вектор, довжина якого дорівнює нулю. Напрям нульового вектора не визначений.

Нехай у просторі задані прямокутна система координат *Oxyz* і дві точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$. *Координатами* вектора $\overline{AB}$ називають упорядковану трійку чисел $x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1$. Якщо a_x, a_y, a_z – координати вектора $\overline{AB}$ то пишуть $\overline{AB} = (a_x, a_y, a_z)$ або $\overline{AB} = \overline{a}(a_x, a_y, a_z)$. Відмітимо, що координати вектора – це його проекції на координатні осі. Рівні вектори мають рівні координати, а колінеарні – пропорційні.

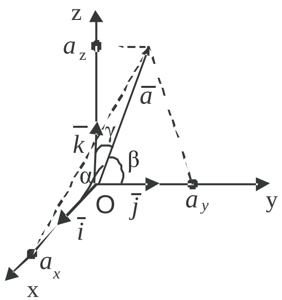


Рис. 2

Модуль (довжина) вектора $\overline{a}(a_x, a_y, a_z)$ позначається $|\,\overline{a}\,|$ і обчислюється за формулою

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \qquad (2.1.)$$

Напрям вектора $\overline{a}(a_x, a_y, a_z)$ у просторі задається за допомогою кутів $\alpha, \beta, \gamma,$ які цей вектор утворює з осями *Ox, Oy, Oz* відповідно (рис. 2). Косинуси вказаних кутів називаються *напрямними косинусами* вектора. Легко бачити, що вони визначаються рівностями

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}. \qquad (2.2.)$$

З формул (2.1.) і (2.2.) випливає, що

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (2.3.)$$

Приклад 1. Задані точки A(2;-1;3) і B(4;3;4). Знайти координати, модуль і напрямні косинуси вектора $\overline{AB}$.

Розв’язання. Знайдемо спочатку координати вектора (від координат кінця віднімаємо координати початку):

$$\overline{AB} = (4-2;3-(-1);4-3) = (2;4;1).$$

На основі формул (2.1.) і (2.2.) маємо:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{21},$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}, \quad \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{21}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{21}}.$$

§ 2.3. Лінійні операції над векторами.

Операції *додавання, віднімання* векторів і *множення вектора на число* називаються *лінійними операціями* над векторами. Додавати два вектори можна за правилом *паралелограма* (рис.3) або за правилом *трикутника* (рис.4).

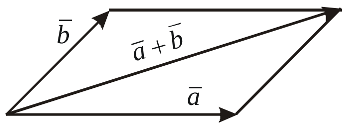


Рис. 3

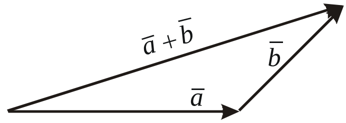


Рис. 4

Операція *віднімання* векторів визначається рівністю

$$\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b}), \tag{3.1}$$

де $-\overline{b}$ – вектор, протилежний до вектора $\overline{b}$.

На основі формули (3.1) операція віднімання зводиться до операції додавання двох векторів. Різницю двох векторів можна знаходити, також, за правилами трикутника (рис. 5). При додаванні декількох векторів зручно використовувати правило многокутника (рис.6).

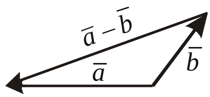


Рис. 5

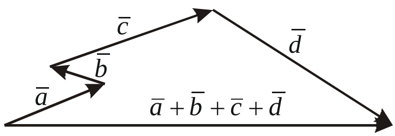
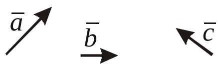
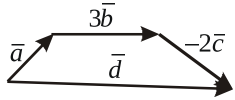


Рис. 6

Добутком додатної (від'ємної) сталої k на вектор $\overline{a}$ є вектор $\overline{b}=k\overline{a}$, який однаково (протилежно) напрямлений з вектором $\overline{a}$ і модуль якого дорівнює $|k|\cdot|\overline{a}|$ (якщо $|k|>1$, то довжина вектора $\overline{a}$ збільшується у $|k|$ раз; якщо $|k|<1$, то довжина вектора $\overline{a}$ зменшується у $1/|k|$ раз).

Приклад 1. Нижче для заданих векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ побудовано вектор $\overline{d}=\overline{a}+3\overline{b}-2\overline{c}$.





Основні властивості лінійних операцій (k, l –числа):

1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$; 2) $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$;

3) $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$; 4) $(k+l)\overline{a}=k\overline{a}+l\overline{a}$;

5) $k(\overline{a}+\overline{b})=k\overline{a}+k\overline{b}$; 6) $k(l\overline{a})=(kl)\overline{a}$;

7) $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$, $(-1)\cdot\overline{a}=-\overline{a}$, $0\cdot\overline{a}=\overline{0}$.

Якщо вектори задані своїми координатами, то при додаванні (відніманні) двох векторів їхні відповідні координати додаються (віднімаються). Для того щоб помножити вектор на число, на це число необхідно помножити всі координати даного вектора. Для векторів $\overline{a}(a_x,a_y,a_z)$, $\overline{b}(b_x,b_y,b_z)$ і сталої k можемо записати:

$$\overline{a}+\overline{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z), \quad (3.2.)$$

$$\overline{a}-\overline{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z), \quad (3.3.)$$

$$k\overline{a}=(ka_x,ka_y,ka_z). \quad (3.4.)$$

Приклад 2. Задані вектори $\overline{a}$ (2;0;5), $\overline{b}$ (3;1;-2) і $\overline{c}$ (-1;1;0). Знайти вектор $\overline{d}=\overline{a}-2(\overline{b}+\overline{c})+3(\overline{a}-\overline{b})$.

Розв'язання. Використовуючи властивості лінійних операцій (розкриваємо дужки і зводимо подібні за звичайними правилами), маємо:

$$\overline{d}=\overline{a}-2\overline{b}-2\overline{c}+3\overline{a}-3\overline{b}=4\overline{a}-5\overline{b}-2\overline{c};$$
$$4\overline{a}=(8;0;20),\quad 5\overline{b}=(15;5;-10),\quad 2\overline{c}=(-2;2;0);$$
$$\overline{d}=(8-15+2;0-5-2;20+10-0)=(-5;-7;30).$$

§ 2.4. Лінійна залежність векторів. Базис.

Нехай у просторі задані три ненульових вектори $\overline{a},\overline{b}$ і $\overline{c}$. Якщо рівність ($\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ – числа)

$$\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}+\lambda_3\overline{c}=\overline{0} \qquad (4.1.)$$

можлива тільки при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, то кажуть, що вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ *лінійно незалежні*. Якщо існує трійка чисел $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля і для яких виконується рівність (4.1.), то вектори $\overline{a},\overline{b}$, $\overline{c}$ *лінійно залежні*. В останньому випадку один із трьох векторів може бути представлений через лінійну комбінацію двох інших, наприклад, $c=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}$.

Якщо ненульові вектори $\overline{a},\overline{b}$ і $\overline{c}$ лінійно незалежні, то упорядкована трійка цих векторів утворює *базис* у просторі. Будь-який інший вектор $\overline{d}$ може бути представлений через лінійну комбінацію базисних векторів:

$$\overline{d}=\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}+\lambda_3\overline{c}\ . \qquad (4.2.)$$

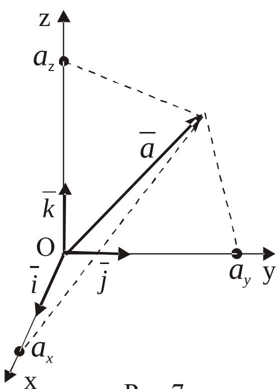


Рис.7

Упорядкована трійка чисел $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ називається координатами вектора $\overline{d}$ у базисі $\overline{a},\overline{b}$, $\overline{c}$.

Координати вектора, що були визначені у §2.2. є його координатами у ортонормованому базисі $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ (рис.7). Напрями останніх векторів співпадають із напрямками координатних осей, а їхні довжини дорівнюють одиниці, тобто $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$. Іншими словами, якщо вектор $\bar{a}$ представлений у вигляді

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \tag{4.3.}$$

то упорядкована трійка чисел a_x, a_y, a_z є його координатами, які були визначені у § 2.2. Надалі координати вектора $\bar{a}$ часто будуть задаватися у формі (4.3).

Нехай вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ задані своїми координатами у базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (цей базис взято для визначеності; можна було взяти будь-який інший):

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \quad \bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k},$$

$$\bar{c} = c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}, \quad \bar{d} = d_x \bar{i} + d_y \bar{j} + d_z \bar{k}.$$

Визначимо умову, при якій вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють базис і знайдемо координати вектора $\bar{d}$ у цьому базисі.

Перепишемо векторну рівність (4.1.) у координатній формі (прирівнюємо відповідні координати векторної суми зліва і нульового вектора справа):

$$\begin{cases} \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x = 0, \\ \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y = 0, \\ \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Однорідна система (4.4) має єдиний нульовий розв'язок (див. § 1.7) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, при умові, що визначник системи відмінний від нуля:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \neq 0\,. \qquad (4.5)$$

Співвідношення (4.5) і є шуканою умовою того, що вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють базис.

Припустимо, що умова (4.5) виконується. Знайдемо координати вектора $\bar{d}$ у базисі $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Перепишемо рівність (4.2) у координатній формі:

$$\begin{cases} \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x = d_x, \\ \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y = d_y, \\ \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z = d_z. \end{cases} \qquad (4.6)$$

Розв'язавши невироджену систему (4.6) будь-яким методом, знайдемо координати $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Приклад 1. Вектори $\bar{a}(1;3;2)$, $\bar{b}(2;-1;0)$, $\bar{c}(0;1;1)$, і $\bar{d}(4;8;7)$ задані у деякому базисі. Довести, що вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\bar{d}$ у цьому базисі.

Розв'язання. Доведемо, що вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють базис (перевіримо умову (4.5)):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0\,.$$

Запишемо систему (4.6):

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 4, \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 8, \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 7. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему за формулами Крамера: $\Delta = -3$, $\Delta_1 = -6$, $\Delta_2 = -3$, $\Delta_3 = -9$; $\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2$, $\lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1$, $\lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-9}{-3} = 3$.

Отже, $\bar{d} = 2\bar{a} + \bar{b} + 3\bar{c}$.

§ 2.5. Скалярний добуток векторів. Кут між векторами.

Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ можна перемножити двома способами. В одному випадку результатом буде число (скаляр), *а* у іншому – вектор. Відповідно визначаються скалярний і векторний добуток двох векторів.

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається *число*, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними. Позначається скалярний добуток одним із символів $\bar{a}\bar{b}$, $\bar{a}\cdot\bar{b}$, $(\bar{a},\bar{b})$. Таким чином:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi, \tag{5.1}$$

де φ – кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Скалярний добуток можна задати, також, за допомогою проекцій одного вектора на інший:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\cdot np_{\bar{b}}\bar{a} \tag{5.2}$$

Якщо, принаймні, один із двох даних векторів нульовий, то скалярний добуток вважається рівним нулю.

Приклад 1. Відомо, що $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 10$ і кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнює 60° . Знайти скалярний добуток $\bar{a}\bar{b}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (5.1), маємо:

$$\bar{a}\bar{b} = 5\cdot 10\cdot\cos 60^\circ = 25 .$$

Властивості скалярного добутку:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$;

2) $(\alpha\bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\alpha\bar{b}) = \alpha(\bar{a} \cdot \bar{b}), \ \alpha \in R$;

3) $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$;

4) $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$.

Нехай вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ задані своїми координатами:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, \qquad \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}.$$

Використовуючи властивості скалярного добутку, дістанемо

$$\bar{a}\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \ . \qquad (5.3)$$

Формула (5.3) визначає скалярний добуток у *координатній формі*. Як бачимо, скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків відповідних координат.

Приклад 2. Знайти скалярний добуток векторів $\bar{a}(3;0;4)$ і $\bar{b}(2;5;-3)$

Розв'язання. $\bar{a}\bar{b} = 3\cdot 2 + 0\cdot 5 + 4\cdot(-3) = -6.$

З рівності (5.1) безпосередньо випливає формула для обчислення *кута* між двома ненульовими векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} \qquad (5.4)$$

або

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (5.5)$$

З останніх формул отримаємо умову *ортогональності* (перпендикулярності) двох ненульових векторів:

$$\bar{a}\bar{b}=0 \qquad (5.6)$$

або

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0\,. \qquad (5.7)$$

Приклад 3. Точки *A (-3;0;1), B (2;4;-5), C (0;2;3)* є вершинами трикутника. Знайти $\angle A$ трикутника *ABC*.

Розв'язання. Визначимо спочатку координати потрібних нам векторів:

$\overline{AB}=\bar{a}(5;4;-6)$, $\quad \overline{AC}=\bar{b}(3;2;2)$.

Застосовуючи формулу (5.5), дістанемо

$$\cos\angle A=\frac{5\cdot 3+4\cdot 2+(-6)\cdot 2}{\sqrt{25+16+36}\sqrt{9+4+4}}=\frac{11}{\sqrt{1309}}\approx 0{,}30;$$

$\angle A\approx \arccos 0{,}3\approx 72{,}5^\circ$.

§ 2.6. Векторний добуток векторів.

Упорядкована трійка ненульових векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ називається *правою*, якщо після зведення її до спільного початку для спостерігача, що знаходиться на кінці вектора $\bar{c}$, поворот на найменший кут від вектора $\bar{a}$ до вектора $\bar{b}$ здійснюється проти руху годинникової стрілки. *Векторним добутком* двох неколінеарних векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається *вектор* $\bar{c}$, який визначається наступними трьома правилами:

1) довжина вектора $\bar{c}$ задається формулою

$$|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi, \qquad (6.1)$$

де φ – кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$;

2) вектор $\bar{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$;

3) вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють праву трійку векторів (рис.8).

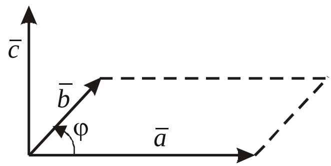


Рис. 8

Перше правило визначає довжину вектора $\bar{c}$, а два останні – його напрям. Легко бачити, що добуток правої частини формули (6.1) дорівнює *площі паралелограма*, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Отже, довжина вектора $\bar{c}$ дорівнює площі вказаного паралелограма.

Вважається, що векторний добуток двох колінеарних векторів дорівнює нульовому вектору.

Векторний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ будемо позначати $\bar{a} \times \bar{b}$ або $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Властивості векторного добутку:

1) $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$;

2) $[\lambda\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \lambda\bar{b}] = \lambda[\bar{a}, \bar{b}]$; $\lambda \in R$;

3) $[\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}]$;

4) якщо векторний добуток двох ненульових векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнює нульовому вектору, то вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ *колінеарні*.

Нехай вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ задані своїми координатами:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, \qquad \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}.$$

Тоді:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \tag{6.2}$$

або

$$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \qquad (6.3)$$

Площа паралелограма й *площа трикутника,* побудованих на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, обчислюються наступним чином:

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}, \quad S_{пар}=|\bar{c}|, \quad S_{тр}=0{,}5|\bar{c}|. \qquad (6.4)$$

Приклад 1. Задані два вектори $\bar{a}=\bar{i}-3\bar{j}+5\bar{k}$ і $\bar{b}=\bar{j}-2\bar{k}$. Знайти: а) вектор, перпендикулярний до кожного з векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$; б) площу трикутника, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Розв'язання. а) Відмітимо, що задача не має єдиного розв'язку, тобто існує нескінченне число колінеарних векторів, які задовольняють умовам цієї задачі. Одним із таких векторів є векторний добуток (див. означення):

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}.$$

б) Використовуючи (6.4), отримаємо

$S_{тр}=0{,}5\sqrt{1+4+1}=0{,}5\sqrt{6}$ (кв. од.).

§ 2.7. Мішаний добуток векторів.

Скалярний добуток векторного добутку $\bar{a}\times\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$ називається *мішаним добутком* векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ і позначається $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ або $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$. Таким чином, у відповідності з означенням, можемо записати

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}\,. \qquad (7.1)$$

Властивості мішаного добутку:

1) мішаний добуток не змінюється, якщо в ньому поміняти місцями операції векторного й скалярного добутку:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c});$$

2) мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці векторів:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b};$$

3) при перестановці місцями будь-яких двох векторів мішаний добуток змінює знак на протилежний.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c}, \quad \bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}, \quad \bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b}.$$

Якщо вектори $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$ і $\bar{c}(c_x, c_y, c_z)$ задані своїми координатами, то

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (7.2)$$

Модуль мішаного добутку не компланарних векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цех векторах. Отже об’єм паралелепіпеда й піраміди, побудованих на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ можуть бути знайдені за формулами:

$$V_{пар} = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|, \qquad V_{пір} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|. \qquad (7.3)$$

Приклад 1. Точки $A_1(-3;2;5)$, $A_2(0;1;-2)$, $A_3(2;0;1)$, $A_4(4;3;5)$ є вершинами чотирикутної піраміди. Знайти її об’єм.

Розв'язання. Використовуючи (7.3), дістаємо:

$$\overline{A_1A_2}=\bar{a}(3;-1;-7),\quad \overline{A_1A_3}=\bar{b}(5;-2;-4),\quad \overline{A_1A_4}=\bar{c}(7;1;0);$$

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}3 & -1 & -7\\ 5 & -2 & -4\\ 7 & 1 & 0\end{vmatrix}=-93;\;\; V_{пір}=|-93|/6=15{,}5\;\text{(куб. од).}$$

Використовуючи поняття мішаного добутку, *умову компланарності* (лінійної залежності) трьох ненульових векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ можна представити у вигляді

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0. \qquad (7.4).$$

Якщо мішаний добуток трьох ненульових векторів відмінний від нуля, то ці вектори *утворюють базис* у просторі (лінійно незалежні).

Приклад 2. При якому значенні параметра α вектори $\bar{a}(2;0;3)$, $\bar{b}(0;1;\alpha)$, і $\bar{c}(-1;2;5)$ компланарні ?

Розв'язання. Використовуємо умову компланарності (7.4):

$$\begin{vmatrix}2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & \alpha\\ -1 & 2 & 5\end{vmatrix}=0,\qquad 13-4\alpha=0\Rightarrow\alpha=\frac{13}{4}.$$

§ 2.8. Пряма на площині.

Нехай на площині задані прямокутна система координат Oxy і лінія L. Рівняння

$$F(x,y)=0 \qquad (8.1)$$

називається *рівнянням лінії* L, якщо координати x, y будь-якої точки цієї лінії задовольняють даному рівнянню, а координати будь-якої іншої точки площини – не задовольняють.

У цьому параграфі розглянемо найбільш просту лінію – пряму. Наведемо основні рівняння прямої на площині. Відмітимо, що у загальному випадку рівнянням прямої на площині є *лінійним рівнянням* відносно змінних x і y (змінні x і y входять тільки у першому степені і між собою не перемножуються).

Загальне рівняння прямої на площині:

$$Ax + By + C = 0. \tag{8.2}$$

Вектор $\overline{n}(A, B)$, координатами якого є коефіцієнти при змінних x і y, розміщений перпендикулярно до прямої (рис. 9) і називається її *нормальним вектором*. Можливі наступні частинні випадки рівняння (8.2): 1) $A = 0$ – пряма паралельна осі Ox; 2) $B = 0$ – пряма паралельна осі Oy; 3) $C = 0$ – пряма проходить через початок координат.

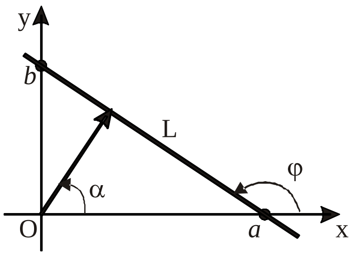


Рис.9

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b, \tag{8.3}$$

де $k = tg\varphi$ – *кутовий коефіцієнт* прямої (рис.9), b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy. Для того щоб від загального рівняння (8.2) перейти до рівняння (8.3), необхідно розв’язати перше відносно змінної y.

Приклад 1. Пряма на площині задана рівнянням $3x - 3y + 5 = 0$. Визначити кут φ, який утворює ця пряма з додатнім напрямом осі Ox.

Розв’язання. Перейдемо від заданого загального рівняння до рівняння з кутовим коефіцієнтом (розв'язуємо дане рівняння відносно y): $y = x + 5/3$. Отже, $k = tg\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \pi/4$.

Рівняння прямої, що проходе через дану точку з даним кутовім коефіцієнтом:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \qquad (8.4)$$

де k – кутовий коефіцієнт прямої; x_0, y_0 – координати точки, яка належить прямій.

Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \qquad (8.5)$$

де x_1, y_1; x_2, y_2 – координати даних точок.

Рівняння прямої, що проходить через дану точку паралельно до даного вектора:

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l}, \qquad (8.6)$$

де x_0, y_0 – координати точки, яка належить прямій; k, l – координати даного вектора, який паралельний до прямої (вектор $\overline{q}(k, l)$ називається *напрямним вектором прямої*).

Рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \qquad (8.7)$$

де x_0, y_0 – координати даної точки, через яку проходить пряма; A, B – координати вектора, який перпендикулярний до прямої, тобто координати нормального вектора прямої.

Рівняння прямої у відрізках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad (8.8)$$

де a, b – відповідно абсциса й ордината точок перетину прямої з осями координат (рис. 9). Рівняння (8.8) легко отримується із загального рівняння (8.2). Для цього достатньо поділити останнє на вільний член з оберненим знаком, тобто на $-C$ (мається на увазі, що $C \neq 0$).

Нормальне рівняння прямої:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \qquad (8.9)$$

де α – кут, який утворює нормаль прямої з додатнім напрямом осі Ox (рис.9); p – відстань до прямої від початку координат. Для того щоб перейти від загального рівняння (8.2) до нормального (8.9), необхідно поділити перше на число $\pm\sqrt{A^2+B^2}$ (знак береться оберненим знаку вільного члена C).

Відстань d від даної точки $M_0(x_0, y_0)$ до даної прямої $Ay+By+C=0$ знаходиться за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (8.10)$$

Приклад 2. Точки $A(1;1)$, $B(2;7)$, $C(4;3)$ є вершинами трикутника. Знайти: а) рівняння сторони AB; б) рівняння й довжину висоти CD; в) рівняння медіани AE; г) рівняння прямої, яка проходить через точку C й паралельна стороні AB.

Розв'язання. а) Використовуючи рівняння (8.5), маємо

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{7-1},\ 6(x-1)=1(y-1),\ 6x-y-5=0.$$

б) Застосовуємо рівняння (8.7). Шукана пряма проходить через точку $C(4;3)$ і її нормальним вектором є вектор $\overline{AB}=\overline{n}(1;6)$. Отримуємо:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{7-1}\,,\ 6(x-1)=(y-1),\ 6x-y-5=0\,.$$

Довжину висоти CD знайдемо як відстань від точки $C(4;3)$ до прямої AB. На основі формули (8.10), маємо

$$|CD|=\frac{|6\cdot 4-1\cdot 3-5|}{\sqrt{6^2+(-1)^2}}=\frac{16}{\sqrt{37}}\,.$$

в) Знайдемо спочатку координати точки E – середини сторони BC: $x_E=(2+4)/2=3$, $y_E=(7+3)/2=5$. Використовуючи рівняння (8.5), знайдемо рівняння медіани AE:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-1}{5-1}\,,\ 4(x-1)=2(y-1),\ 4x-2y-2=0\,,\ 2x-y-1=0\,.$$

г) Застосовуємо рівняння (8.6). Напрямним вектором є вектор $\overline{AB}$. Маємо

$$\frac{x-4}{1}=\frac{y-3}{6}\,,\ 6(x-4)=1(y-3),\ 6x-y-21=0\,.$$

Нехай дві прямі задані загальними рівняннями або рівняннями з кутовим коефіцієнтом:

$$A_1x+B_1y+C_1=0\,,\ A_2x+B_2y+C_2=0\,; \qquad (8.11)$$

$$y=k_1x+b_1\,,\ y=k_2x+b_2\,. \qquad (8.12)$$

Один з двох кутів між цими прямими знаходиться відповідно за допомогою формул:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\,, \qquad (8.13)$$

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|. \qquad (8.14)$$

Другий кут ψ доповнює кут φ до 180°, тобто $\psi = 180^0 - \varphi$.

Умови паралельності для прямих (8.11) і (8.12) мають відповідно вигляд:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \; k_1 = k_2; \qquad (8.15)$$

умови перпендикулярності:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0, \; k_1 k_2 = -1. \qquad (8.16)$$

Приклад 3. На площині задані три прямі: $x + 2y + 5 = 0$, $3x - 7 = 0$, $2x + by + 1 = 0$. Знайти кут між двома першими прямими й визначити при якому значенні параметра b перша й третя прямі перпендикулярні.

Розв'язання. Так як прямі задані загальними рівняннями, то для знаходження кута використовуємо формулу (8.13):

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 0}{\sqrt{1+4}\sqrt{9+0}} = \frac{3}{3\sqrt{5}}.$$

Значення параметра b знаходимо на основі першої з умов (8.16):

$$1\cdot 2 + 2\cdot b = 0, \; b = -1.$$

§ 2.9. Площина у просторі.

Рівняння

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (9.1)$$

називається *рівнянням поверхні* S у прямокутній системі координат $Oxyz$, якщо координати x, y, z будь-якої точки цієї поверхні задовольняють вказаному рівнянню, а координати будь-якої іншої точки – не задовольняють.

Розглянемо основні рівняння й поняття для *площини* у просторі.

Загальне рівняння площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{9.2}$$

де A, B, C – координати ненульового вектора $\overline{n}$, який перпендикулярний до площини і називається її *нормальним вектором*. Можливі наступні частинні випадки рівняння (9.2):

1. Один із коефіцієнтів A, B, C дорівнює нулю – площина паралельна відповідній координатній осі. Наприклад, рівняння $2x + 5z - 7 = 0$ описує площину, яка паралельна осі Oy.
2. Вільний член D дорівнює нулю – площина проходить через початок координат.
3. Один із коефіцієнтів A, B, C і вільний член D дорівнюють нулю – площина проходить через відповідну координатну вісь. Наприклад, площина $x + 5y = 0$ проходить через вісь Oz.
4. Два з трьох коефіцієнтів A, B, C дорівнюють нулю – площина паралельна відповідній координатній площині. Наприклад, площина $4z + 3 = 0$ паралельна координатній площині Oxy.
5. Рівняння $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ є відповідно рівнянням координатних площин Oyz, Oxz, Oxy.

Рівняння площини, яка проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{9.3}$$

де x_0, y_0, z_0 – координати точки, через яку проходить площина; A, B, C – координати нормального вектора.

Приклад 1. Задана площина $2x - 3y + z - 1 = 0$ й точка

$M_0(3;0;-2)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через дану точку і паралельна до даної площини.

Розв'язання. Вектор $\overline{n}(2;-3;1)$, є нормальним вектором даної площини. Так як площини паралельні, то вказаний вектор буде також і нормальним вектором шуканої площини. Використовуючи формулу (9.3), запишемо рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;0;-2)$ перпендикулярно до вектора $\overline{n}(2;-3;1)$:

$$2(x-3)-3(y-0)+(z+2)=0,\ 2x-3y+z-4=0.$$

Рівняння площини, яка проходить через три дані точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0, \tag{9.4}$$

де $x_1,y_1,z_1;x_2,y_2,z_2;x_3,y_3,z_3$ – координати трьох точок, що не лежать на одній прямій і через які проходить площина.

Рівняння площини у відрізках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{9.5}$$

де a,b,c – відповідно абсциса, ордината й апліката точок перетину площини з осями координат. Рівняння (9.5) є найбільш зручним для побудови площини. Для того щоб із загального рівняння (9.2) отримати рівняння у відрізках (9.5), достатньо розділити перше на вільний член з оберненим знаком, тобто на $-D$ (мається на увазі, що $D\neq 0$).

Приклад 2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;2;0)$, $M_2(2;3;-1)$, $M_3(4;0;1)$. Визначити точки перетину цієї площини з осями координат і побудувати її.

Розв'язання. Застосуємо формулу (9.4):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 2-1 & 3-2 & -1-0 \\ 4-1 & 0-2 & 1-0 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}-(y-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+z\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=0,$$

$$-x-4y-5z+10=0.$$

Перейдемо від отриманого загального рівняння до рівняння площини у відрізках (розділимо на -10):

$$\frac{x}{10}+\frac{y}{2{,}5}+\frac{z}{2}=1.$$

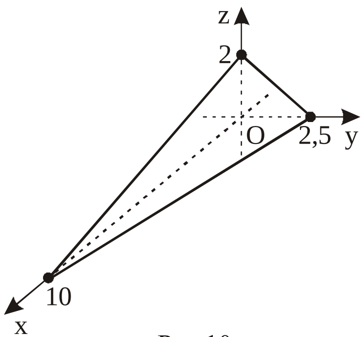


Рис.10

Отже, $(10;0;0)$, $(0;2{,}5;0)$, $(0;0;2)$ – точки перетину площини з осями координат. Використовуючи знайдені точки, будуємо площину (рис.10) (будуємо трикутник який визначає розміщення площини у просторі).

Нормальне рівняння площини:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=o, \qquad (9.6)$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси нормалі $\overline{n}$, p – відстань від початку координат до площини. Для того щоб, від загального рівняння (9.2) перейти до нормального (9.6), потрібно розділити перше на число $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ (знак береться оберненим знаку вільного члена).

Відстань d від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини

$Ax+By+Cz+D=0$ знаходиться за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (9.7)$$

Приклад 3. задана площина $2x+3y-z+5=0$. Знайти відстань до площини від: а) початку координат; б) точки $M_0(4;5;6)$.

Розв'язання. а) Знайдемо нормальне рівняння площини.

Розділимо задане рівняння на число $-\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}=-\sqrt{14}$:

$$-\frac{2}{\sqrt{14}}x-\frac{3}{\sqrt{14}}y+\frac{1}{\sqrt{14}}z-\frac{5}{\sqrt{14}}=0.$$

Отже, $p=5/\sqrt{14}$ – відстань від початку координат до площини.

б) Використовуючи формулу (9.7), дістанемо

$$d=\frac{|2\cdot 4+\cdot 3\cdot 5-6+5|}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}=\frac{22}{\sqrt{14}}.$$

Нехай задані дві площини:

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Кут між заданими площинами (один із двох) дорівнює куту між їхніми нормалями $\bar{n}_1(A_1,B_1,C_1)$ і $\bar{n}_2(A_2,B_2,C_2)$ й обчислюється за формулою

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (9.8)$$

другий кут ψ доповнює кут φ до 180^0, тобто $\psi=180^0-\varphi$.

Умова паралельності двох площин:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (9.9)$$

Умова перпендикулярності двох площин:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (9.10)$$

Приклад 4. Знайти кут між площинами $3x + y - 1 = 0$ і $x - 4y + 5z = 0$.

Розв'язання. Застосовуємо формулу (9.8):

$$\cos\varphi = \frac{3\cdot 1 + 1\cdot(-4) + 0\cdot 5}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 5^2}} = -\frac{1}{\sqrt{420}};$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{420}\right) \approx 92{,}8^0.$$

§ 2.10. Пряма у просторі.

Наведемо основні рівняння прямої у просторі у прямокутній системі координат $Oxyz$.

Загальні рівняння:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (10.1)$$

Пряма (10.1) є прямою перетину двох *непаралельних* площин $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Канонічні рівняння:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \qquad (10.2)$$

де x_0, y_0, z_0 – координати даної точки, яка належить прямій; l, m, n – координати даного ненульового вектора $\overline{q}$, який паралельний прямій. Вектор $\overline{q}(l, m, n)$ називається *напрямним* вектором прямої.

Приклад 1. задані точки $A(2;-1;3)$, $B(0;2;5)$, $C(3;4;7)$. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно вектору

$\overline{BC}$.

Розв'язання. Знайдемо координати напрямного вектора (вектора $\overline{BC}$) і застосуємо формулу (10.2):

$$\overline{BC} = \overline{q}(3;2;2); \ \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{2}.$$

Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \qquad (10.3)$$

де x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 – координати двох даних точок, через які проходить пряма.

Параметричні рівняння:

$$x = x_0 + lt, \ y = y_0 + mt, \ z = z_0 + nt, \qquad (10.4)$$

де x_0, y_0, z_0 – координати даної точки, що належить прямій; l, m, n – координати даного напрямного вектора прямої.

Нехай задані загальні рівняння (10.1). Для того щоб отримати канонічні рівняння (10.2), необхідно визначити координати деякої точки M_0, яка належить прямій і координати напрямного вектора $\overline{q}$. Одну з координат точки M_0 задаємо довільно (нас влаштовує будь-яка точка прямої). Підставляємо цю координату в рівняння (10.1) і розв'язуємо систему двох лінійних рівнянь із двома невідомими. За напрямний вектор $\overline{q}$ можна взяти векторний добуток нормальних векторів $\overline{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ і $\overline{n}_2(A_2, B_2, C_2)$, тобто $\overline{q} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2$ (цей вектор перпендикулярний до нормальних векторів обох площин, а, отже, паралельний прямій їх перетину).

Для того щоб від канонічних рівнянь (10.2) перейти до параметричних (10.4) потрібно кожен дріб формули (10.2) прирівняти до параметра t і розв'язати отримані рівняння відносно змінних x, y, z відповідно.

Приклад 2. Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 7 = 0, \\ 5x - y + 4z - 2 = 0. \end{cases}$$

Знайти канонічні та параметричні рівняння цієї прямої.

Розв'язання. Знайдемо спочатку координати x_0, y_0, z_0 деякої точки прямої. Нехай $z_0 = 0$. Тоді:

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 - 7 = 0, \\ 5x_0 - y_0 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 3. \end{cases}$$

Знайдемо напрямний вектор прямої:

$$\bar{q} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5\bar{i} - 19\bar{j} - 11\bar{k} .$$

Запишемо канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1;3;0)$ і паралельна вектору $\bar{q}(5;-19;-11)$:

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-3}{-19} = \frac{z}{-11} .$$

Знайдемо параметричні рівняння:

$$\frac{x-1}{5} = t , \ \frac{y-3}{-19} = t , \ \frac{z}{-11} = t ; \quad x = 5t + 1 , \ y = -19t + 3 , \ z = -11t .$$

§ 2.11. Пряма й площина.

Нехай у просторі задані пряма

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \qquad (11.1)$$

і площина

$$Ax + By + Cz + D = 0\,. \qquad (11.2)$$

Кутом між прямою й площиною називається гострий кут між прямою і її проекцією на цю площину. Кут φ між прямою (11.1) і площиною (11.2) визначається за формулою

$$\sin\varphi = \frac{\left|Al + Bm + Cn\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}\,. \qquad (11.3)$$

У*мова паралельності* прямої й площини (умова перпендикулярності нормального вектора $\overline{n}(A, B, C)$ і напрямного вектора $\overline{q}(l, m, n)$):

$$Al + Bm + Cn = 0\,. \qquad (11.4)$$

Умова перпендикулярності прямої й площини (умова паралельності нормального вектора $\overline{n}(A, B, C)$ і напрямного вектора $\overline{q}(l, m, n)$):

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}\,. \qquad (11.5)$$

Якщо умова (11.4) не виконується, то пряма з площиною перетинаються й мають одну спільну точку. Один із методів знаходження *координат точки перетину прямої й площини* розглянемо на наступному прикладі.

Приклад 1. Пряма й площина задані відповідно рівняннями

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z+4}{0}\,,\ 4x - 2y + z + 3 = 0\,.$$

Знайти: а) кут між прямою й площиною; б) точку перетину прямої й площини.

Розв'язання. а) Застосувавши формулу (11.3), маємо

$$\sin\varphi = \frac{\left|3\cdot 4 + 5\cdot(-2) + 0\cdot 1\right|}{\sqrt{9+25+0}\sqrt{16+4+1}} = \frac{2}{\sqrt{714}} \approx 0{,}075\,; \quad \varphi = \arcsin 0{,}075 \approx 4{,}3^0\,.$$

б) Запишемо параметричні рівняння прямої:

$$\frac{x-2}{3}=t,\ \frac{y}{5}=t,\ \frac{z+4}{0}=t;\ x=3t+2,\ y=-19t+3,\ z=-4.$$

Останні рівняння визначають координати будь-якої точки прямої через параметр t (кожному дійсному значенню t відповідає своя точка на прямій і навпаки). Знайдемо значення t, при якому координати точки прямої будуть задовольняти, також, і рівнянню площини (підставляємо відповідні вирази для x, y, z в рівняння площини):

$$4(3t+2)-2\cdot 5t+(-4)+3=0,\quad 2t+7=0\ \Rightarrow\ t=-7/2.$$

Використовуючи параметричні рівняння прямої, обчислюємо координати точки перетину:

$$x=3\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)+2=-\frac{17}{2},\ y=5\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{35}{2},\ z=-4.$$

§ 2.12. Еліпс

Еліпсом називається множина точок площини, які мають наступні властивості: сума відстаней від будь-якої точки цієї множини до двох даних точок площини є величина стала і більша за відстань між даними точками. Дві дані точки називаються *фокусами* еліпса і позначаються F_1 і F_2.

Використовуючи означення, легко отримати рівняння еліпса. Систему координат Oxy розміщуємо наступним чином: вісь Ox проходить через фокуси F_1 і F_2, а вісь Oy – посередині між ними (рис.11). Відстань між фокусами F_1 і F_2 позначимо через $2c$, а суму відстаней від довільної точки $M(x, y)$ еліпса до фокусів – через $2a$ $(a > c)$. У відповідності з означенням, можемо записати

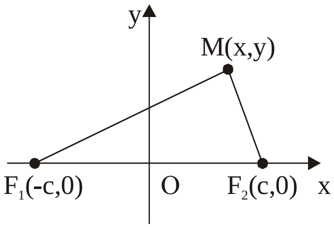


Рис. 11

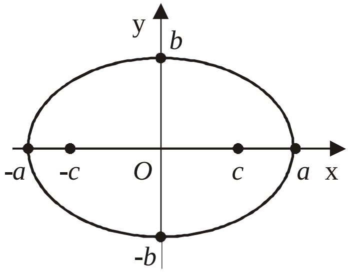


Рис. 12

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a \; . \qquad (12.1)$$

Підставивши в (12.1) відповідні вирази і, зробивши деякі перетворення, отримаємо

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \, , \qquad (12.2)$$

де $b^2 = a^2 - c^2$. Рівняння (12.2) називається *канонічним рівнянням еліпса*, величини $2a$ і $2b$ (a і b) – відповідно більшою й меншою осями (півосями) еліпса. На основі рівняння (12.2) можна побудувати саму криву (рис.12).

Якщо фокуси еліпса розміщені на осі Oy симетрично відносно осі Ox, то рівняння (12.2) також буде його канонічним рівнянням, але у цьому випадку $a^2 = b^2 - c^2$.

У граничному випадку, коли $a = b$ ($c = 0$), рівняння (12.2) приймає вигляд

$$x^2 + y^2 = a^2 . \qquad (12.3)$$

Останнє рівняння є рівнянням кола з центром у початку координат і радіусом a.

Ексцентриситетом еліпса називається відношення відстаней між фокусами до більшої осі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}\text{, (при } a > b\text{); } \varepsilon = \frac{c}{b}\text{, (при } b > a\text{).} \qquad (12.4)$$

Ексцентриситет еліпса характеризує відносну різницю між його осями і задовольняє співвідношенню $0 \le \varepsilon < 1$. Для еліпса, у якого вказана різниця невелика ($a \approx b$), значення ε близьке до нуля (у кола $\varepsilon = 0$). Якщо ж указана різниця велика ($a >> b$ або $b >> a$), то ε близьке до одиниці.

Приклад 1. Для еліпса

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

знайти: а) півосі; б) координати фокусів; в) ексцентриситет.

Розв'язання. а) Порівнявши дане рівняння з рівнянням (12.2), маємо

$$a^2 = 25\text{, } a = 2\text{; } b^2 = 9\text{, } b = 3\text{.}$$

б) Так як $a > b$, то $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$, $c = 4$. Отже, $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$ – фокуси еліпса.

в) На основі (12.4), знайдемо $\varepsilon = 4/5 = 0{,}8$.

§ 2.13. Гіпербола.

Гіперболою називається множина точок площини, які мають наступні властивості: модуль різниці відстаней від будь-якої точки цієї множини до двох заданих точок площини є величина стала, менша за відстань між даними точками і відмінна від нуля. Дві дані точки називаються *фокусами* гіперболи і позначаються F_1 і F_2. Уведемо позначення: $2c$ – відстань між фокусами F_1 і F_2; $2a$ – модуль різниці відстаней від довільної точки $M(x, y)$ гіперболи до фокусів ($a < c$).

Систему координат Oxy задаємо так, щоб фокуси гіперболи знаходилися на осі Ox і були симетричними відносно осі Oy (рис.11). У відповідності з означенням, можемо записати

$$\left||F_1M| - |F_2M|\right| = 2a\ . \tag{13.1}$$

На основі (13.1), дістанемо *канонічне рівняння гіперболи*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{13.2}$$

де $b^2 = c^2 - a^2$. Використовуючи останнє рівняння, будуємо криву

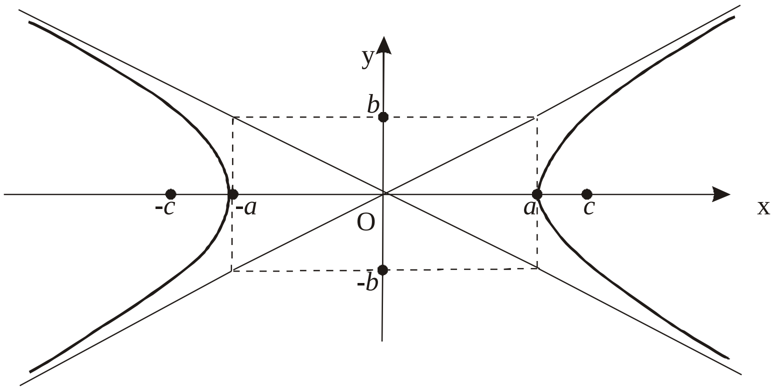


Рис. 13

(рис.13). Величини $2a$ і $2b$ (a і b) називаються відповідно *дійсною* й *уявною* осями (півосями) гіперболи.

Якщо фокуси гіперболи розміщені на осі Oy симетрично відносно осі Ox, то канонічне рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \tag{13.3}$$

де $b^2 = c^2 - a^2$. У цьому випадку $2a$ і $2b$ – відповідно уявна й дійсна осі.

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення відстані між фокусами до дійсної осі, тобто $\varepsilon = c/a$ або $\varepsilon = c/b$. Для гіперболи $\varepsilon > 1$.

Асимптотою кривої називається пряма, яка має наступну властивість: відстань від точки кривої до цієї прямої нескінченно зменшується при нескінченому віддаленні точки кривої від початку координат. Гіпербола має дві асимптоти (рис.13):

$$y = \frac{b}{a}x, \; y = -\frac{b}{a}x. \tag{13.4}$$

Приклад 1. Гіпербола задана рівнянням $x^2 - 9y^2 - 36 = 0$. Знайти: а) півосі гіперболи; б) фокуси; в) ексцентриситет; г) рівняння асимптот.

Розв'язання. а) Після ділення даного рівняння на 36, маємо

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Отже, $a = 6$, $b = 2$.

б) Для гіперболи $c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 4 = 40$, $c = \sqrt{40}$; $F_1\left(-\sqrt{40};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{40};0\right)$ – фокуси гіперболи.

в) Так як $a = 6$ – дійсна піввісь, то $\varepsilon = c/a = \sqrt{40}/6$.

г) застосовуючи формули (13.4), знайдемо рівняння асимптот: $y = \frac{1}{3}x$, $y = -\frac{1}{3}x$.

Еліпс і гіпербола є *центральними кривими*, тобто вони мають центр симетрії (для канонічних рівнянь – початок координат).Окрім того, ці криві мають по дві осі симетрії (для канонічних рівнянь – осі координат).

§ 2.14. Парабола.

Параболою називається множина точок площини, кожна з яких рівновіддалена від даної прямої і даної точки, що не лежить на цій прямій. Дана пряма називається *директрисою*, а дана точка – *фокусом*.

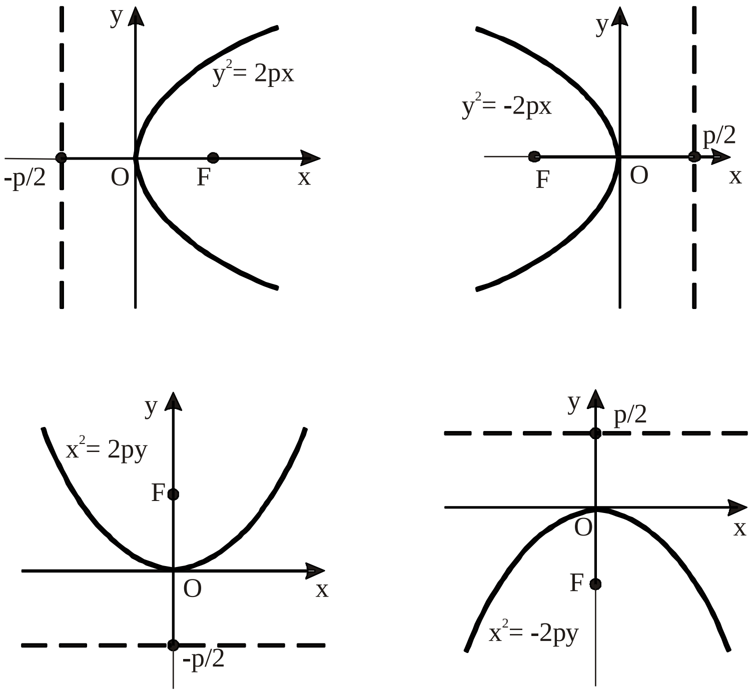


Рис.14

Відстань між фокусом F і директрисою позначимо через p. Одну з координатних осей проведемо через фокус перпендикулярно до директриси, а іншу – посередині між фокусом і директрисою (на відстані $p/2$ від фокуса й директриси). Використовуючи означення, отримаємо одне з *канонічних рівнянь параболи*:

$$y^2 = 2px,\ y^2 = -2px,\ x^2 = 2py,\ x^2 = -2py. \qquad (14.1)$$

На основі формул (14.1) легко побудувати самі криві (рис.14).

Як бачимо, парабола, а, отже і її основні характеристики визначаються одним параметром p. Наприклад, $x = -p/2$ і $F(p/2;0)$ є відповідно рівнянням директриси й точкою фокуса параболи, яка описується першим із рівнянь (14.1).

Приклад 1. Парабола задана рівнянням $y^2 = -8x$. Визначити параметри p, рівняння директриси й координати фокуса цієї параболи.

Розв'язання. Дане рівняння відповідає загальній формулі $y^2 = -2px$. Отже, $p = 4$; $x = 2$ – рівняння директриси; $F(-2;0)$ – точка фокуса.

§ 2.15. Загальне рівняння кривої другого порядку та його перетворення до канонічної форми

Так як розглянуті у трьох попередніх параграфах лінії описуються рівняннями другого порядку відносно змінних x і y, то вони називаються *кривими другого порядку*. Відносна простота отриманих *канонічних* рівнянь пов'язана із "зручним" розміщенням кривих відносно системи координат Oxy. Якщо ж крива другого порядку розмішена довільно відносно системи координат, то у загальному випадку їй відповідає рівняння

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (15.1)$$

Відмітимо, що обернене твердження невірне, тобто рівнянню (15.1) не завжди відповідає крива другого порядку. Надалі вважаємо, що рівняння (15.1) (або його частинний випадок) є рівнянням кривої.

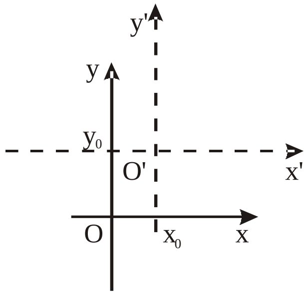


Рис.15

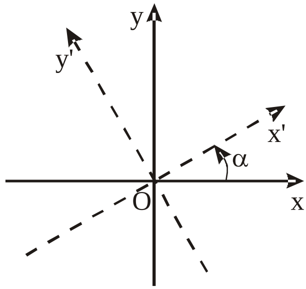


Рис.16

Нехай у прямокутній системі координат Oxy крива задана загальним рівнянням (15.1). Перейдемо до такої прямокутної системи координат, в якій рівняння кривої буде канонічним. Це можна зробити за допомогою двох послідовних перетворень даної системи координат, а саме, повороту і паралельного переносу.

Коротко розглянемо вказані перетворення. У випадку, коли система $O'x'y'$ отримана із системи Oxy за допомогою *паралельного переносу* (рис.15), зв'язок між старими координатами x, y і новими x', y' задається формулами

$$x = x' + x_0\,,\ \ y = y' + y_0\,, \tag{15.2}$$

де x_0, y_0 – координати точки O' (нового початку) у системі Oxy. Якщо ж система $Ox'y'$ отримана із системи Oxy за допомогою *повороту* на кут α (рис.16), то старі і нові координати точки зв'язані формулами

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha\,,\ \ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha\,. \tag{15.3}$$

Розглянемо спочатку частинний випадок загального рівняння (15.1). Припустимо, що воно не містить добутку xy ($B = 0$, $A^2 + C^2 \neq 0$):

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (15.4)$$

Рівняння (15.4) зводиться до канонічного тільки за допомогою паралельного переносу. Необхідно визначити початок нової системи координат. Для цього групуємо доданки з однаковими змінними і виділяємо повні квадрати. В результаті отримаємо одне з трьох рівнянь:

$$A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 + F_1 = 0, \; (A \neq 0, C \neq 0), \qquad (15.5)$$

$$A(x - x_0)^2 + 2E(y - y_0) = 0, \; (A \neq 0, C = 0), \qquad (15.6)$$

$$C(y - y_0)^2 + 2D(x - x_0) = 0, \; (A = 0, C \neq 0). \qquad (15.7)$$

У всіх трьох випадках числа x_0, y_0 є координатами початку нової системи. Здійснивши паралельний перенос ($x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$), маємо

$$Ax'^2 + Cy'^2 + F_1 = 0, \qquad (15.8)$$

$$Ax'^2 + 2Ey' = 0, \; Cy'^2 + 2Dx' = 0. \qquad (15.9)$$

Для того щоб останні рівняння представити у канонічній формі, достатньо кожне з них поділити на число (див. § 2.13, прикл.1). У залежності від числових коефіцієнтів рівняння (15.8) описує еліпс або гіперболу, а рівняння (15.9) – параболу (було зроблене припущення, що вихідне рівняння – це обов’язково рівняння кривої).

Приклад 1. Крива задана рівнянням

$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0.$$

За допомогою переходу до нової системи координат записати рівняння даної кривої у канонічній формі і визначити її тип.

Розв’язання . Рівняння не містить добутку xy . Виконаємо вказані вище перетворення:

$$9(x^2-2x)-4(y^2+4y)-43=0,$$

$$9(x^2-2x+1)-9-4(y^2+4y+4)+16-43=0,$$

$$9(x-1)^2-4(y+2)^2-36=0.$$

За допомогою формул $x'=x-1, y'=y+2$ переходимо до нової системи координат $O'x'y'$ (здійснюємо паралельний перенос; початком нової системи є точка $O'(1;-2)$. Маємо

$$9x'^2-4y'^2=36.$$

Поділивши останнє рівняння на 36, отримуємо канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{9}=1.$$

Розглянемо, далі, більш складний випадок. Нехай рівняння (15.1) містить добуток xy $(B\neq 0)$. Позбавимося добутку змінних за допомогою повороту системи координат Oxy на певний кут α. Якщо підставити (15.3) в (15.1), то умова того, що коефіцієнт при $x'y'$ дорівнює нулю, приведе до рівняння

$$2B\cos 2\alpha=(A-C)\sin 2\alpha. \qquad (15.10)$$

У випадку коли $A=C$, маємо $\cos 2\alpha=0, \alpha=45^\circ$. Якщо $A\neq C$, то розв'язавши рівняння (15.10) відносно α, отримаємо

$$\alpha=\frac{1}{2}arctg\,\frac{2B}{A-C}. \qquad (15.11)$$

Таким чином, якщо в рівнянні (15.1) коефіцієнти при квадратах рівні, то $\alpha=45^\circ$; якщо ж $A\neq C$, то кут повороту α визначається формулою (15.11).

Рівняння даної кривої в системі $Ox'y'$, яка отримана шляхом повороту системи Oxy на вказаний кут α, визначається наступним чином:

$$A_1x'^2+C_1y'^2+2D_1x'+2E_1y'+F=0\,; \qquad (15.12)$$

$$A_1=A\cos^2\alpha+2B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha\,, \qquad (15.13)$$

$$C_1=A\sin^2\alpha-2B\cos\alpha\sin\alpha+C\cos^2\alpha\,, \qquad (15.14)$$

$$D_1=D\cos\alpha+E\sin\alpha, E_1=E\cos\alpha-D\sin\alpha\,. \qquad (15.15)$$

Перетворення отриманого рівняння (15.12) до канонічної форми було детально розглянуто вище (воно подібне до рівняння (15.4)).

Приклад 2. Крива задана рівнянням

$$3x^2+2\sqrt{3}xy+y^2+4y-10=0.$$

За допомогою переходу до нової системи координат знайти канонічне рівняння кривої та схематично побудувати її графік.

Розв'язання. Спочатку здійснюємо поворот. Так як коефіцієнти при квадратах не рівні, то потрібний кут α визначається за формулою (15.11):

$$\alpha=\frac{1}{2}arctg\frac{2\sqrt{3}}{3-1}=\frac{1}{2}arctg\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot 60^\circ=30^\circ\,.$$

За допомогою формул (15.13–15.15) знаходимо коефіцієнти рівняння (15.12):

$$A_1=3\cdot\frac{3}{4}+2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=4\,,$$

$$C_1=3\cdot\frac{1}{4}-2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=0\,,$$

$$D_1=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=1,\ E_1=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-0\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{3}\,.$$

Підставляємо знайдені коефіцієнти в рівняння (15.12):

$$4x'^2+2x'+2\sqrt{3}y'-10=0.$$

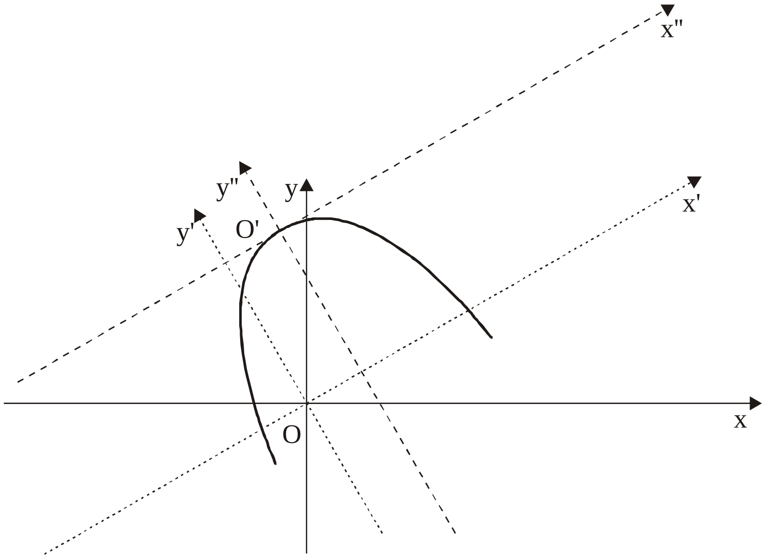


Рис.17

Виконуємо, далі, перетворення, необхідні для здійснення паралельного переносу (див. прикл.1):

$$4\left(x^2+\frac{1}{2}x'\right)+2\sqrt{3}y'-10=0\ ,$$

$$4\left(x'+\frac{1}{4}\right)^2+2\sqrt{3}\left(y'-\frac{41}{8\sqrt{3}}\right)=0\ .$$

Перейдемо до системи $O'x''y''$ за формулами $x''=x'+\dfrac{1}{4},\ y''=y'-\dfrac{41}{8\sqrt{3}}$ ($O'(-1/4;41/(8\sqrt{3}))$ – новий початок координат). Отримуємо канонічне рівняння параболи $x''^2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y''$.

Будуємо графік (рис.17).

§ 2.16. Полярна система координат. Параметричні рівняння лінії

Найбільш важливою після прямокутної системи координат на площині вважається *полярна система координат* . Ця система також дозволяє визначати положення будь-якої точки на площині за допомогою двох чисел – її координат. Полярна система координат складається з деякої точки О, яка називається *полюсом* і напрямленої півпрямої ОЕ, яка виходить із точки О і називається *полярною віссю* (рис. 18). Крім того, необхідно задати відрізок одиничної довжини (масштаб).

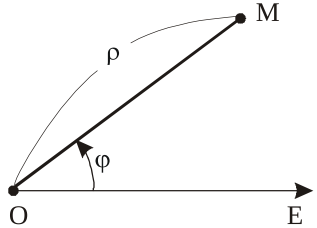


Рис.18

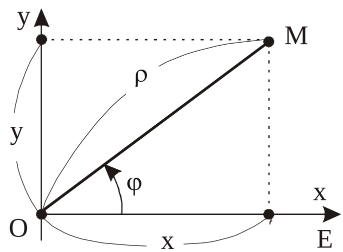


Рис.19

Нехай на площині задані полярна система координат і точка М. З’єднаємо полюс О з точкою М. Довжина отриманого відрізку $\rho = |OM|$ називається *полярним радіусом* точки М, а кут $\varphi = \angle EOM$ (кут відлічується від осі ОЕ до відрізку ОМ проти руху годинникової стрілки) – *полярним кутом* (рис. 18). Числа ρ і φ є відповідно першою й другою полярними координатами точки М (пишеться М(ρ,φ)). Можливі значення полярних координат, як правило, визначаються нерівностями $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Інколи вказані області значень розширюються. Наприклад, якщо кут φ відлічувати від осі ОЕ за рухом годинникової стрілки, то його значення береться від'ємним. Існує узагальнення полярної системи, в якому ρ також може приймати від'ємні значення.

Якщо на площині задані прямокутна й полярна системи координат, причому полярна вісь ОЕ співпадає з додатковою піввіссю ОХ (рис. 19), то між полярними й прямокутними координатами існує зв'язок:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi, \tag{16.1}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ tg\varphi = y/x. \tag{16.2}$$

Формули (16.1) виражають декартові координати через полярні, а формули (16.2) – полярні через декартові. Друга з формул (16.2) дає два значення координати φ із проміжку [0;2π). Необхідно взяти те з них, яке задовольняє рівнянням (16.1).

Приклад 1. Відмітити на площині точки $M_1(3;\pi/4)$, $M_2(2;\pi/2), M_3(1;2\pi/3)$, що задані полярними координатами.

Розв'язання. Для побудови точки $М_1$ з полярного полюса проводимо промінь під кутом $\pi/4$ до полярної осі і відкладаємо на ньому відрізок довжиною 3. Точки $М_2$ і $М_3$ будуються подібно (рис. 20).

Приклад 2. Побудувати лінію $\rho = 2\sin\varphi$.

Розв'язання. Врахуємо, що так як $\rho \geq 0$, то φ може приймати значення лише на відрізку [0;π] (на цьому відрізку $\sin\varphi \geq 0$). Знаходимо координати деяких точок даної лінії і записуємо їх у таблицю.

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
ρ	0	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	0

Відмічаємо знайдені точки на площині і з’єднуємо їх плавною лінією (рис. 21).

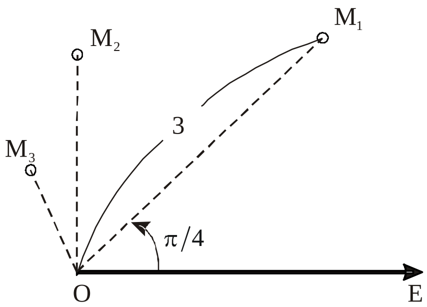


Рис.20

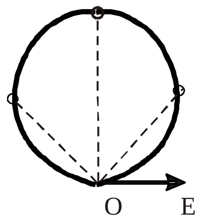


Рис.21

Приклад 3. В прямокутній системі координат коло задане рівнянням $x^2+y^2=25$. Знайти рівняння цього кола в полярних координатах, вважаючи, що полярна вісь співпадає з додатною піввіссю Ох.

Розв’язання. Використовуючи формули (16.1), маємо

$$(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=25,\ \rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=25,\ \ \rho^2=25, \rho=5.$$

Як бачимо, в полярній системі координат рівняння кола значно простіше ніж у декартовій.

При розв’язанні багатьох прикладних задач зручно використовувати так звані *параметричні рівняння* лінії, тобто, рівняння, в яких координати точок лінії задаються у вигляді функцій від деякої змінної величини *t* (параметра). Для таких рівнянь прийнята запис $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$. Якщо в параметричних рівняннях виключити параметр *t*, то отримаємо звичайне рівняння лінії.

Приклад 4. Крива задана параметричними рівняннями $x = 4\cos t,\ y = 2\sin t.$ Побудувати дану криву і визначити її тип.

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$
x	4	$2\sqrt{2}$	0	$-2\sqrt{2}$	-4	$-2\sqrt{2}$	0	$2\sqrt{2}$
y	0	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-2	$-\sqrt{2}$

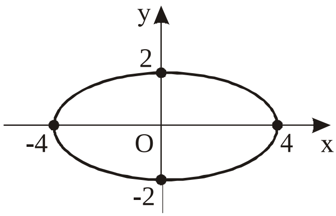


Рис.22

Розв'язання. Визначаємо координати деяких точок лінії і заносимо їх у таблицю (очевидно, що параметр t достатньо змінювати від 0 до 2π). Використовуючи знайдені точки, будуємо криву (рис. 22). Дана лінія дуже схожа на еліпс. Переконаємося, що це справді так (виключаємо параметр *t*):

$$\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 16\cos^2 t, \\ y^2 = 4\sin^2 t, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 16\cos^2 t, \\ 4y^2 = 16\sin^2 t, \end{cases}$$

$$x^2 + 4y^2 = 16, \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

§ 2.17. Поверхні другого порядку.

У цьому параграфі коротко розглянемо поверхні другого порядку, тобто поверхні, які в прямокутній системі координат Oxyz описуються алгебраїчними рівняннями другого порядку відносно змінних *x*, *y*, *z*. Для кожної з поверхонь матеріал буде викладатися у наступній послідовності: назва поверхні, її рівняння, схематичне зображення, короткі пояснення.

1. ***Еліпсоїд.***

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (17.1)$$

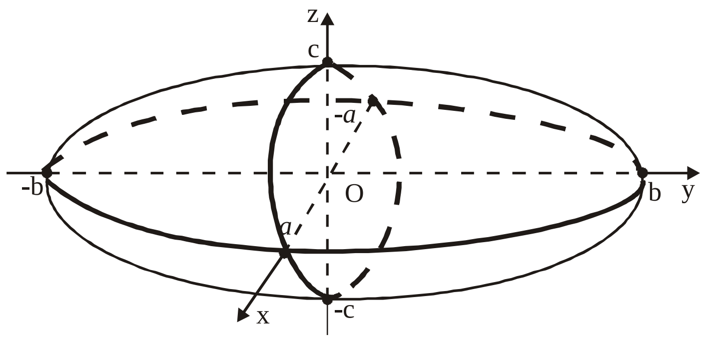


Рис.23

Величини $2a$, $2b$, $2c$ (a, b, c) називаються *осями* (*півосями*) еліпсоїда. Якщо $a=b=c$, то рівняння (17.1) перетворюється в рівняння сфери:

$$x^2+y^2+z^2=a^2. \qquad (17.2)$$

2. ***Однополосний гіперболоїд.***

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (17.3)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (17.4)$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (17.5)$$

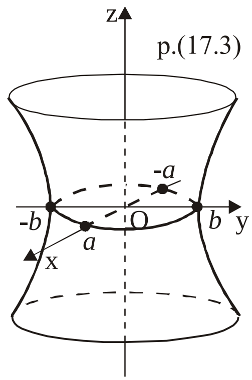


Рис.24

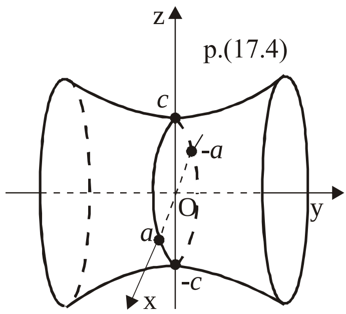


Рис.25

3. ***Двополосний гіперболоїд.***

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,, \tag{17.6}$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,, \tag{17.7}$$

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{17.8}$$

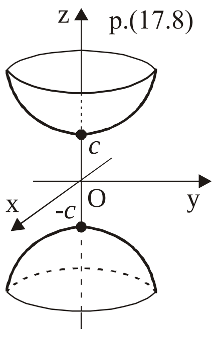


рис.26

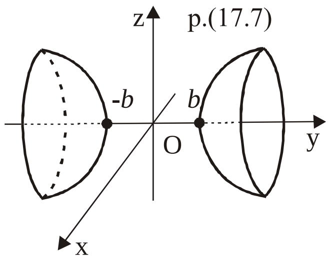


Рис.27

4. ***Еліптичний параболоїд.***

$$z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}, \quad pq > 0; \tag{17.9}$$

$$y = \frac{z^2}{p} + \frac{x^2}{q}, \quad pq > 0; \tag{17.10}$$

$$x = \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q}, \quad pq > 0. \tag{17.11}$$

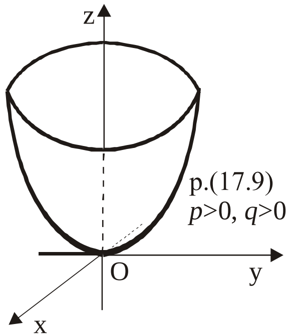


Рис.28

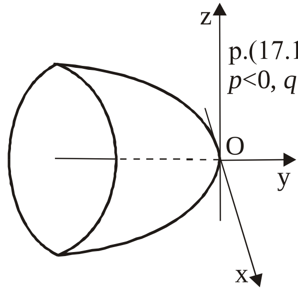


Рис.29

Умова $pq > 0$ означає, що в кожному з рівнянь $p > 0$ *і* $q > 0$ або $p < 0$ *і* $q < 0$.

5. ***Гіперболічний параболоїд.***

$$z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}, \quad pq > 0; \tag{17.12}$$

$$y = \frac{z^2}{p} - \frac{x^2}{q}, \quad pq > 0; \tag{17.13}$$

$$x = \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q}, \quad pq > 0. \tag{17.14}$$

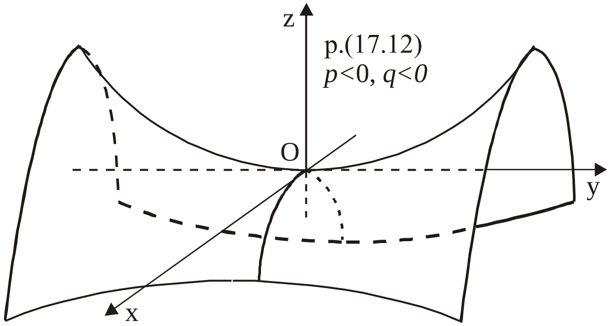


Рис.30

6. ***Циліндричні поверхні.***

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{17.15}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{17.16}$$

$$x^2 = 2py. \tag{17.17}$$

Поверхні (17.15), (17.16) і (17.17) називаються *еліптичним*, *гіперболічним* і *параболічним циліндрами* відповідно. Якщо у формулі (17.15) $a = b$, то маємо рівняння *кругового циліндра*. У загальному випадку циліндричні поверхні утворюються наступним чином: пряма, яка називається *твірною*, рухається паралельно самій собі уздовж деякої кривої, яка називається *напрямною*. Для рівняння (17.17), наприклад, твірною є пряма, що паралельна осі Oz, а напрямною – парабола $x^2 = 2py$ в координатній площині Oxy.

Якщо твірна циліндричної поверхні паралельна координатній осі, то рівняння цієї поверхні не містить відповідної змінної. Так, рівняння (17.15 – 17.17) описують поверхні, твірні яких паралельні осі

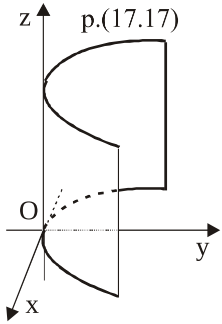


Рис.31

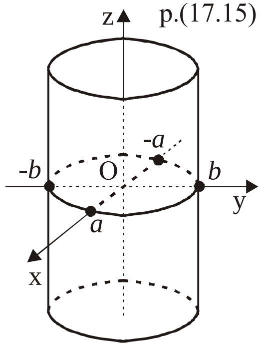


Рис.32

Oz,. а рівняння $x^2 - z^2 = 9$ є рівнянням гіперболічного циліндра, твірна якого паралельна осі Oy.

7. ***Конічні поверхні.***

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{17.18}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{17.19}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{17.20}$$

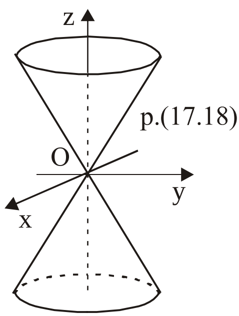


Рис.33

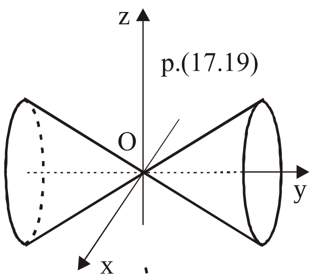


Рис.34

Рівняння (17.1 – 17.20) є так званими *канонічними рівняннями* поверхонь другого порядку. Кожне з них записане для поверхні, яка певним чином розміщена відносно прямокутної системи координат Oxyz.

Приклад 1. Побудувати схематично тіло у просторі, яке обмежене поверхнями $x^2+y^2=9$ і $-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$.

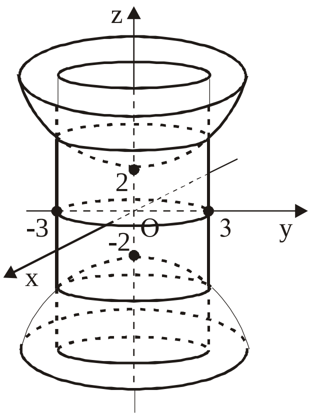


Рис.35

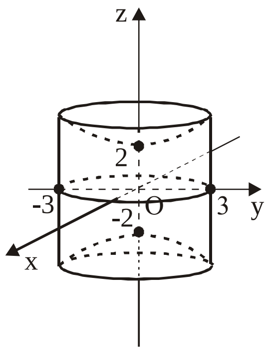


Рис.36

Розв'язання. Перше рівняння – це рівняння кругового циліндра, твірна якого паралельна осі Oz (відсутня змінна z); друге – це рівняння двополосного гіперболоїда. На рис.35 побудовані дані поверхні, а на рис.36 – шукане тіло.

Для побудови даної поверхні зручно визначати лінії перетину цієї поверхні з деякими площинами.

Приклад 2. Визначити лінії перетину двополосного гіперболоїда $-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$ із площинами $x=0,\ y=4,\ z=\sqrt{8}$.

Розв'язання. Шукані лінії задаються наступними системами:

$$\begin{cases} -\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{4}=1, \\ x=0, \end{cases} \quad \begin{cases} -\dfrac{x^2}{32}+\dfrac{z^2}{8}=1, \\ y=4, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=16, \\ z=\sqrt{8}. \end{cases}$$

Перша і друга системи визначають гіперболи, а третя – коло радіуса 4.

§ 2.18. Загальне рівняння поверхні другого порядку та його спрощення у деяких частинних випадках.

Загальне рівняння поверхні другого порядку можна записати у вигляді $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Kx+Ly+Mz+N=0$. Якщо в даному рівнянні $D=E=F=0$ (відсутні добутки), то маємо

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Kx+Ly+Mz+N=0. \qquad (18.1)$$

Останнє рівняння досить легко зводиться до одного з канонічних рівнянь (17.1 – 20). Укажемо як це робиться на конкретному прикладі.

Приклад 1. Поверхня другого порядку задана рівнянням $2x^2+y^2-2y-4z-7=0.$ Спростити дане рівняння, визначити тип поверхні та зробити схематичний рисунок.

Розв'язання. Задане рівняння відноситься до частинного випадку (18.1). Групуємо доданки з однаковими змінними і виділяємо повні квадрати. Маємо

$$2x^2+(y^2-2y)-4z-7=0, \quad 2x^2+(y^2-2y+1)-4z-8=0,$$

$$2x^2+(y-1)^2-4(z+2)=0.$$

Перейдемо до нових змінних x', y', z' за допомогою формул $x'=x$, $y'=y-1$, $z'=z+2$: $2x'^2+y'^2-4z'=0.$ Іншими словами, шляхом паралельного переносу здійснюємо перехід до нової системи координат $O'x'y'z'$, причому $x_0=0$, $y_0=1$, $z_0=-2$ – координати

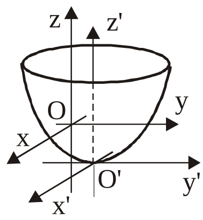


Рис.37

нового початку в старій системі. Розв'язавши останнє рівняння відносно z', дістанемо $z' = \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{4}$. Отже, задане рівняння є рівнянням еліптичного параболоїда (див. формулу (17.9)). Будуємо поверхню (рис.37).

III. Комплексні числа

§ 3.1. Означення та різні форми запису комплексного числа.

Множину комплексних чисел можна розглядати як розширення множини дійсних чисел. Вважаємо, що з від'ємного числа добувається квадратний корінь і введемо позначення $i = \sqrt{-1}$. Указане число i називається *уявною одиницею*.

Комплексне число z визначається рівністю

$$z = x + iy \text{ (або } z = x + yi\text{)}, \qquad (1.1)$$

де x, y – дійсні числа, i – уявна одиниця. Числа x і y називаються відповідно *дійсною* й *уявною* частинами числа z і для них прийняті позначення:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z. \qquad (1.2)$$

Якщо $\operatorname{Im} z = 0$, то $z = x + 0 \cdot i = x$. Отже, множина дійсних чисел міститься у множині комплексних чисел (це комплексні числа із нульовою уявною частиною).

Число $\bar{z} = x - yi$ називається *спряженим* до числа $z = x + yi$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $2z^2 - 2z + 5 = 0$ на множині комплексних чисел.

Розв'язання. Використавши формулу для знаходження коренів квадратного рівняння і означення комплексного числа, будемо мати

$$z_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot2\cdot5}}{2\cdot2}=\frac{2\pm\sqrt{-36}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{36}\cdot\sqrt{-1}}{4}=\frac{2\pm6i}{4}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}i.$$

$z=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i,\quad z=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$ – комплексно-спряжені корені заданого квадратного рівняння.

Нехай задана площина із прямокутною системою координат *Oxy*. Кожному комплексному числу $z=x+yi$ можна поставити у відповідність точку $M(x,y)$ даної площини, і, обернено, кожній точці $M(x,y)$ можна поставити у відповідність число $z=x+yi$. Площина, кожна точка якої розглядається як комплексне число, називається *комплексною площиною*, при цьому вісь *Ox* називається дійсною віссю, а вісь *Oy* – уявною віссю. Надалі не будемо робити різниці між комплексним числом і його зображенням на комплексній площині.

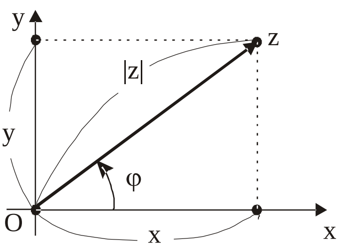


Рис.38

Нехай задані комплексна площина *Oxy* і число $z=x+yi$ на цій площині (рис.38). Вектор, початком якого є точка *O*, а кінцем – точка *z*, називається радіус-вектором числа *z*. Довжина радіус-вектора числа *z* називається його модулем (позначається |z|) і обчислюється за формулою

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\ . \tag{1.3}$$

Очевидно, що $0\le|z|<\infty$. Кут, який утворює радіус-вектор числа *z* із віссю *Ox*, називається *аргументом* цього числа й позначається $\operatorname{Arg} z$.

У загальному випадку $\operatorname{Arg} z$ приймає нескінченне число значень, а саме:

$$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2k\pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, k \in Z, \tag{1.4}$$

де $\varphi = \arg z$ – *головне значення* аргументу. Далі, говорячи про аргумент комплексного числа, будемо мати на увазі тільки його головне значення. Для аргументу φ маємо (рис.38)

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}, \sin\varphi = \frac{y}{|z|}, \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{1.5}$$

Приклад 2. Знайти модуль й аргумент комплексного числа $z = -1 + \sqrt{3}i.$

Розв'язання. Застосовуючи формулу (1.3), дістанемо

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

Аргумент знайдемо на основі третьої рівності формул (1.5). Маємо

$$\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3}, \varphi_k = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + k\pi = -\pi/3 + k\pi, k \in Z.$$

Інтервалу $[0;2\pi)$ належать два з указаних розв'язків, а саме $\varphi_1 = 2\pi/3$ і $\varphi_2 = 5\pi/3.$ Враховуючи, що дана точка z належить другій чверті комплексної площини $(x < 0, y > 0),$ остаточно отримуємо $\varphi = \varphi_1 = 2\pi/3.$

Якщо комплексне число записане у вигляді $z = x + yi,$ то кажуть, що воно представлене у *алгебраїчній* формі. *Тригонометрична* і *показникова* форми комплексного числа мають відповідно вигляд

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z = re^{i\varphi}, \tag{1.6}$$

де $r = |z|, \varphi = \arg z.$

Приклад 3. Комплексне число $z = 3 + 3i$ представити у тригонометричній і показниковій формах.

Розв'язання. Спочатку визначаємо модуль і аргумент комплексного числа:

$$r = |z| = 3\sqrt{2},\ \varphi = \arg z = \pi / 4.$$

Використовуючи формули (1.6), можемо записати

$$z = 3\sqrt{2}(\cos(\pi / 4) + i\sin(\pi / 4)), \quad z = 3\sqrt{2}e^{i\pi / 4}.$$

§ 3.2. Дії над комплексними числами

Операції *додавання*, *віднімання*, *множення* й *ділення* комплексних чисел $z_1 = x_1 + y_1 i,\ z_2 = x_2 + y_2 i$ визначаються наступними формулами

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i, \tag{2.1}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i, \tag{2.2}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i, \tag{2.3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} i, \quad (z_2 \neq 0). \tag{2.4}$$

Відмітимо, що формула (2.3) отримана шляхом перемноження двох даних чисел за звичайними правилами (ураховано, що $i^2 = -1$). Для отримання формули (2.4) достатньо чисельник й знаменник дробу $(x_1 + y_1 i)/(x_2 + y_2 i)$ помножити на спряжене до знаменника число, тобто на $x_2 - y_2 i$.

Нехай комплексні числа задані у тригонометричній формі:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

У цьому разі операції множення й ділення здійснюються за формулами

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \tag{2.5}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad (z_2 \neq 0). \tag{2.6}$$

*Приклад*1. Знайти $z_1 + z_2,\, z_1 - z_2,\, z_1 z_2,\, z_1 / z_2,$ якщо $z_1 = 2 - 3i,\, z_2 = 1 + 5i.$

Розв'язання. Використовуючи формули (2.1)-(2.4), отримуємо:

$$z_1 + z_2 = 2 - 3i + 1 + 5i = 3 + 2i; \;\; z_1 - z_2 = 2 - 3i - (1 + 5i) = 1 - 8i;$$

$$z_1 z_2 = (2 - 3i)(1 + 5i) = 2 - 3i + 10i - 15i^2 = 2 + 7i + 15 = 17 + 7i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{1 + 5i} = \frac{(2 - 3i)(1 - 5i)}{(1 + 5i)(1 - 5i)} = \frac{-13 - 13i}{26} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Операції піднесення до степеня й добування кореня для комплексних чисел визначаються наступними рівностями:

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi); \tag{2.7}$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \tag{2.8}$$

де $k = 0, 1, 2, \cdots, n - 1.$ З останньої формули випливає, що корінь n-го степеня має рівно n значень. Якщо на комплексній площині побудувати коло радіуса $\sqrt[n]{r}$ з центром у початку координат, то всі вказані значення кореня будуть розміщенні на цьому колі на однаковій відстані одне від одного.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sqrt[5]{z} - \sqrt{3} - i = 0.$

Розв'язання. Можемо записати

$$\sqrt[5]{z} = \sqrt{3} + i = 0, \;\; z = (\sqrt{3} + i)^5.$$

Знайдемо аргумент і модуль комплексного числа $\sqrt{3} + i$ і застосуємо формулу (2.7):

$$r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2;\quad tg\varphi=1/\sqrt{3},\quad \varphi=\pi/6;$$

$$z=\left(2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^5=2^5\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=$$

$$=32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-16\sqrt{3}+16i\,.$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $z^3=-\sqrt{3}-i.$

Розв'язання. Знайдемо аргумент і модуль комплексного числа $-\sqrt{3}-i$ та застосуємо формулу (2.8):

$$r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2;tg\varphi=1/\sqrt{3},\varphi=7\pi/6;$$

$$z_0=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{7\pi/6+2\cdot 0\cdot\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi/6+2\cdot 0\cdot\pi}{3})=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{7\pi}{18}+i\sin\frac{7\pi}{18});$$

$$z_1=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{7\pi/6+2\cdot 1\cdot\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi/6+2\cdot 1\cdot\pi}{3})=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{19\pi}{18}+i\sin\frac{19\pi}{18});$$

$$z_2=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{7\pi/6+2\cdot 2\cdot\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi/6+2\cdot 2\cdot\pi}{3})=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{31\pi}{18}+i\sin\frac{31\pi}{18}).$$

IV. Вступ до математичного аналізу

§ 4.1. Поняття границі функції

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині X і нехай точка a належить або не належить цій множині. Число A називається *границею функції* $f(x)$ в точці a (або при $x\to a$) якщо для будь-якого (скільки завгодно малого) числа $\varepsilon>0$ знайдеться число $\delta>0$ таке, що для всіх $x\in X, x\neq a$, які задовольняють умові $|x-a|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$. Для вказаної границі прийняте позначення

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Приклад 1. Довести що $\lim\limits_{x \to 1}(3x+2) = 5.$

Розв'язання. Нехай ε – довільне додатне число. Доведемо, що для нього існує відповідне δ (знайдемо це δ). У нашому випадку $f(x) = 3x+2,\ a = 1,\ A = 5.$ Розглянемо нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Маємо

$$\left|(3x+2)-5\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|3(x-1)\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|x-1\right| < \varepsilon/3.$$

Отже, $\delta = \varepsilon/3$ (враховано, що $|x-a| = |x-1|$).

Число A називається *правою (лівою)* границею функції $f(x)$ в точці *a,* якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють умові $a < x < a+\delta$ $(a-\delta < x < a)$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Для вказаних границь прийняті позначення (перша – права, друга – ліва):

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = A.$$

Зрозуміло, що у випадку правої границі змінна *x* наближається до числа *a,* залишаючись справа від нього, а у випадку лівої – зліва (рис. 39). Права і ліва границя називаються, також, *односторонніми.*

Між границею функції і її односторонніми границями в даній точці існує простий зв'язок: число A є границею функції $f(x)$ в точці *a* тоді і тільки тоді, коли у цій точці існують обидві односторонні границі, причому

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = A.$$

Рис.39

Число A називається границею функції $f(x)$ при x→∞, якщо для будь якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють умові $|x| > \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначається вказана границя $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A.$

Наведемо *основні властивості* границі функції. Нехай, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Тоді:

1). $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B;$

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = AB;$

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B},\ B \neq 0;$

4) $\lim\limits_{x\to a}(kf(x)) = k\lim\limits_{x\to a} f(x) = kA,\ k = const;$

5) $\lim\limits_{x\to a} k = k,\ k = const.$

Вказані властивості залишаються в силі для односторонніх границь і при $x\to\infty$.

Приклад 2 Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}(5e^x + 3\cos x + 2x^2 - 10)$.

Розв'язання. Тут достатньо застосувати наведені властивості границь і підставити замість змінної x її граничне значення:

$$\lim_{x\to 0}(5e^x + 3\cos x + 2x^2 - 10) = 5\lim_{x\to 0} e^x + 3\lim_{x\to 0}\cos x + 2\lim_{x\to 0} x^2 -$$

$$-\lim_{x\to 0} 10 = 5\cdot e^0 + 3\cos 0 + 2\cdot 0^2 - 10 = 5 + 3 - 10 = -2$$

§ 4.2 Нескінченно мала і нескінченно велика функції.

Функція $f(x)$ називається *нескінченно малою* в точці a, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Функція $f(x)$, яка визначена на X, називається *нескінченно великою* в точці $x = a$,якщо для будь якого (наскільки завгодно великого) числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \in X, x \neq a$, які задовольняють умові $|x-a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > \varepsilon$. Для вказаної функції прийняте позначення $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Подібні означення даються при $x \to a-0$, $x \to a+0$, $x \to \infty$.

Між нескінченно малими і нескінченно великими існує наступний зв'язок: якщо $f(x)$ – нескінченно велика при $x \to a$, то $1/f(x)$ – нескінченно мала при $x \to a$; якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала при $x \to a$, то $1/\alpha(x)$ – нескінченно велика при $x \to a$. У зв'язку зі сказаним більш детально розглянемо одну з цех функцій, а саме, нескінченно малу.

Основні властивості нескінченно малих функцій ($x \to a$, $x \to a-0$, $x \to a+0$, $x \to \infty$.):

1) алгебраїчна сума декількох нескінченно малих функцій є нескінченно малою ;

2) добуток нескінченно малих функцій є нескінченно малою;

3) добуток нескінченно малої на обмежену функцію є нескінченно малою;

Розглянемо правила порівняння двох нескінченно малих функцій. Нехай $\alpha(x)$ *і* $\beta(x)$ – дві нескінченно малі функції при $x \to a$, ($x \to a+0$, $x \to a-0$, $x \to \infty$) і нехай $\lim\limits_{x \to a} (\alpha(x)/\beta(x)) = A$. Тоді:

1) якщо $A = 0$, то $\alpha(x)$ є нескінченно малою *більш високого порядку*, ніж $\beta(x)$;

2) якщо А – будь-яке відмінне від нуля число ,то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малими *одного порядку*;

3) якщо A=1, то $\alpha(x)$ *і* $\beta(x)$ є *еквівалентними* нескінченно малими й у цьому випадку пишуть $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Якщо $\lim\limits_{x \to a} (\alpha(x)/(\beta(x))^n) = A$, де A – будь-яке відмінне від нуля число, то кажуть, що $\alpha(x)$ є нескінченно малою *n-го порядку* відносно $\beta(x)$.

Приклад 1. Функції $\alpha(x) = x^2 - 4$ і $\beta(x) = x - 2$ є нескінченно малими одного порядку в точці $x = 2$, так як

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4.$$

Нехай $\alpha(x), \beta(x), \alpha_1(x), \beta_1(x)$ – нескінченно малі функції в точці $x = a$. Тоді, якщо $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ в точці $x = a$ і існує границя $\lim\limits_{x \to a} (\alpha(x)/\beta(x))$, то також існує границя $\lim\limits_{x \to a} (\alpha_1(x)/\beta_1(x))$, причому

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Вказана властивість еквівалентних нескінченно малих функцій може використовуватися при обчисленні границь. Вона дозволяє замінювати нескінченно малі функції еквівалентними їм нескінченно малими. Корисно пам’ятати наступні пари нескінченно малих (при x→0): $\sin x \sim x,\ tgx \sim x,\ \arcsin x \sim x,\ arctgx \sim x,\ \ln(1+x) \sim x,\ 1 - \cos 2x \sim 2x^2$.

Приклад 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{\ln^2(1+x)} = \left\{ \dfrac{0}{0} \right\} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2.$

§4.3 Деякі типові прийоми обчислення границь та дві чудові границі.

Суть обчислення границь функцій (якщо вони існують) полягає у тому, що шляхом перетворень вони зводяться до деяких стандартних або найпростіших границь. Нехай $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, $k=const$. До вказаних найпростіших границь можна віднести наступні рівності:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\varphi(x)}=\left\{\frac{0}{\infty}\right\}=0,\ \lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)}=\left\{\frac{\infty}{0}\right\}=\infty,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{k}{\varphi(x)}=\left\{\frac{k}{\infty}\right\}=0,\ \lim_{x\to a}\frac{k}{\alpha(x)}=\left\{\frac{k}{0}\right\}=\infty.$$

Укажемо, тепер, типи границь, для обчислення яких обов'язково необхідні перетворення. Іншими словами, наведемо *основні види невизначеностей*:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty}, 0^{0},\ \infty^{0}.$$

Деякі стандартні прийоми обчислення границь розглянемо на конкретних прикладах.

Приклад 1. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-25}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10}{x^3+x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+1}{2+x-x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-7}-x)$.

Розв'язання. а) Маємо невизначеність типу 0/0. Необхідно чисельник і знаменник даного дробу розкласти на лінійні множники (точніше, у чисельнику й знаменнику потрібно вилучити множник $x-5$). Нагадаємо, що квадратний тричлен розкладається на лінійні множники за наступною формулою

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

де x_1, x_2 – корені квадратного тричлена. Можемо записати

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-25}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-2)(x-5)}{(x-5)(x+5)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-2}{x+5}=\frac{3}{10}.$$

б) Маємо невизначеність типу ∞/∞. У подібних прикладах необхідно чисельник і знаменник даного дробу поділити на x^n, де n – найбільший показник степеня змінної x в усьому виразі. У нашому випадку ділимо на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+10}{x^3+x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{10}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{0}{1}=0.$$

в) Аналогічно попередньому, поділивши на x^2, отримаємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+1}{2+x-x^2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}-1}=-5.$$

г) Маємо невизначеність типу $\infty-\infty$. Помножимо й поділимо даний вираз на суму $\sqrt{x^2-3}+x$:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-7}-x)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-7}-x)(\sqrt{x^2-7}+x)}{\sqrt{x^2-7}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-7})^2-x^2}{\sqrt{x^2-7}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-7-x^2}{\sqrt{x^2-7}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-7}{\sqrt{x^2-7}+x}=0\ .$$

Нехай $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени степеня n і m відповідно, а саме:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

$$Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m.$$

Границя відношення указаних многочленів при $x \to \infty$ може бути знайдена за наступним правилом:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0 & \textit{при } n < m, \\ \infty & \textit{при } n > m, \\ a_0/b_0 & \textit{при } n = m. \end{cases}$$

Приклад 2. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^7 + 5x^3 - x + 3}{1 + 100x^2 + 1000x^6}$.

Розв'язання. Враховуючи, що у чисельнику многочлен більшого степеня, маємо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^7 + 5x^3 - x + 3}{1 + 100x^2 + 1000x^6} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \infty.$$

Першою чудовою границею називають рівність

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (3.1)$$

У більш загальному випадку, якщо $\varphi(x) \to 0$ при $x \to a$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1. \qquad (3.2)$$

Приклад 3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 10x}{x^2}$.

Розв'язання. Застосовуючи одну з тригонометричних формул та першу чудову границю, дістаємо

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 10x}{x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 5x}{x^2} =$$

$$= 50 \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)^2 = 50 \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x}\right)^2 = 50 \cdot 1 = 50.$$

Другою чудовою границею називають кожну з двох наступних рівностей:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\quad (e\approx 2.72).\qquad (3.3)$$

Аналогічно попередньому формули (3.3) можна переписати у більш загальному вигляді:

$$\lim_{x\to a}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e,\qquad (3.4)$$

де $\varphi(x)\to 0$ при $x\to a$.

Друга чудова границя використовується для розкриття невизначеностей типу 1^{∞}.

Приклад 4. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{7x}$.

Розв'язання. Ця границя обчислюється за допомогою стандартних перетворень у випадку застосування другої чудової границі:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{7x}=\left\{1^{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{2x+3}{2x-1}-1\right)\right)^{7x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{7x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}\cdot\frac{4}{2x-1}\cdot 7x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right)^{\frac{28x}{2x-1}}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{28x}{2x-1}}=e^{14}.$$

На останньому кроці перетворень використано те, що границю основи й границю показника даної функції можна обчислювати окремо, тобто

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)} \qquad (3.5)$$

Усі вказані методи і прийоми обчислення границь функцій можуть застосовуватися і для обчислення границь числових послідовностей. Загальний член числової послідовності $a_1, a_2, ..., a_n, ...$можна розглядати як функцію цілочисельного аргументу.

Приклад 5. Обчислити границю числової послідовності

$$\frac{4}{3}, \frac{13}{6}, ..., \frac{3n^2+1}{n^2+2}, ...$$

Розв'язання .У даному випадку границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях чисельника і знаменника:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n^2+2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\frac{3}{1}=3.$$

§ 4.4 Неперервність функцій. Класифікація точок розриву

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і деякому її околі. Кажуть, що функція $f(x)$ *неперервна* в точці x_0, якщо виконується рівність

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0). \qquad (4.1)$$

Використовуючи зв'язок між границею й односторонніми границями умову неперервності (4.1) можна переписати у вигляді

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0). \qquad (4.2)$$

Якщо функція $f(x)$ не є неперервною в точці x_0, то кажуть, що x_0, є *точкою розриву* (або в точці x_0 функція терпить розрив). Розрізняють декілька типів точок розриву, а саме:

1) точка x_0 називається *точкою усувного розриву,* якщо у цій точці існують обидві односторонні границі, вони рівні між собою, але не рівні значенню функції у цій точці (функція може бути невизначеною у точці x_0);

2) точка x_0 називається *точкою розриву першого роду*, якщо у цій точці існують обидві односторонні границі, але вони не рівні між собою, тобто $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

3) точка x_0 називається *точкою розриву другого роду*, якщо у цій точці не існує (дорівнює нескінченності) хоча б одна з односторонніх границь.

Кажуть, що функція $f(x)$ неперервна на інтервалі (a, b), якщо вона неперервна у кожній точці цього інтервалу.

Відмітимо, що кожна з основних елементарних функцій неперервна у області її визначення.

Приклад 1. Дослідити функції на неперервність, визначити характер точок розриву (якщо вони є) та схематично зобразити їх графіки у околі точок розриву.

а) $f(x) = \begin{cases} -2x & при \quad x < 0, \\ x^3 & при \quad 0 \le x \le 1, \\ 3 & при \quad x > 1, \end{cases}$ б) $f(x) = 3^{\frac{1}{x-2}}$.

Розв'язання. а) Дана функція визначена на усій числовій прямій,

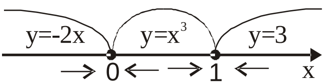


Рис.40

але на трьох указаних інтервалах вона задається різними аналітичними виразами . Так як на кожному з інтервалів (-∞; 0), [0;1], (1;∞) функція неперервна (ці інтервали входять в область визначення відповідних елементарних функцій), то точками розриву можуть бути тільки точки «стику», тобто $x_1=0$ і $x_2=1$. Перевіримо виконання умови неперервності (4.2) у кожній з цих точок. Розглянемо спочатку точку $x_1=0$ (рис.40):

$$\lim_{x\to x_1-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}(-2x)=0,\quad \lim_{x\to x_1+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} x^3=0,\quad f(x_1)=0^3=0.$$

Так як $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=f(0)=0$, то в точці $x_1=0$ функція неперервна. Розглянемо, далі, точку $x_2=1$:

$$\lim_{x\to x_2-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} x^3=1,\quad \lim_{x\to x_2+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} 3=0,\quad f(x_2)=1^3=1.$$

Так як односторонні границі існують, але не рівні між собою, то в точці $x_2=1$ функція терпить розрив першого роду.

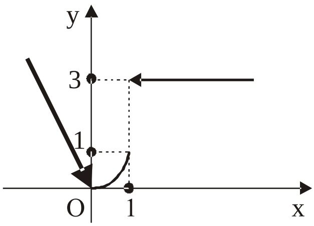


Рис.41

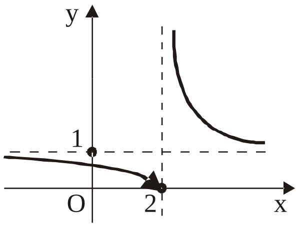


Рис.42

Будуємо схематичний графік функції (рис.41).

б) Дана функція визначена на усій числовій прямій окрім точки $x_0=2$, яка є точкою розриву функції. Для з'ясування характеру розриву знайдемо односторонні границі функції в цій точці. При обчисленні границі зліва (справа) зручно зробити заміну змінної $x=2-\alpha, \alpha>0$ $(x=2+\alpha, \alpha>0)$.Очевидно, що умова $x\to 2-0$ $(x\to 2+0)$ еквівалентна умові $\alpha\to 0$. Виконаємо вказані дії:

$$\lim_{x\to 2-0} 3^{\frac{1}{x-2}} = \{x = 2-\alpha,\ \alpha > 0\} = \lim_{\alpha\to 0} 3^{\frac{1}{2-\alpha-2}} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{3^{\frac{1}{\alpha}}} = 0,$$

$$\lim_{x\to 2+0} 3^{\frac{1}{x-2}} = \{x = 2+\alpha,\ \alpha > 0\} = \lim_{\alpha\to 0} 3^{\frac{1}{2+\alpha-2}} = \lim_{\alpha\to 0} 3^{\frac{1}{\alpha}} = \infty.$$

Так як одна з односторонніх границь дорівнює нескінченності, то $x_0 = 2$ – точка розриву другого роду. Будуємо схематичний графік функції (рис.42).

V. Похідна і диференціал. Правила і методи диференціювання

§ 5.1. Поняття та властивості похідної

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка визначена і неперервна на інтервалі (a,b). Нехай x_0 – фіксована внутрішня точка вказаного інтервалу. Дамо аргументу x приріст Δx в точці x_0. Вважаємо, що нова точка $x_0 + \Delta x$ також належить інтервалу *(a,b)*. Функція у дістане приріст $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Якщо існує границя відношення приросту функції до приросту аргументу при $\Delta x \to 0$, тобто якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то вона називається *похідною* функції $y = f(x)$ в точці x_0 і позначається $y'(x_0)$ або $f'(x_0)$ (можливі й інші позначення). Таким чином

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1.1}$$

Похідна характеризує *швидкість* зміни функції *y*.

Знаходження похідної називається також *диференціюванням* функції.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = x^2 + 5x$ в точці x_0.

Розв'язання.

Використовуючи означення можемо записати:

$$f(x_0) = x_0^2 + 5x_0,$$

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 5(x_0 + \Delta x) = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 5x_0 + 5\Delta x,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 5x_0 + 5\Delta x - x_0^2 - 5x_0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x + 5)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x + 5) = 2x_0 + 5;$$

$$f'(x_0) = 2x_0 + 5.$$

У загальному випадку похідна функції $y = f(x)$ у деякій точці x (якщо вона існує) позначається одним із символів $f'(x), y'(x), y', \dfrac{dy}{dx}$.

При розв'язанні практичних задач для знаходження похідної застосовується не саме означення, а *таблиця похідних*, основні *властивості похідної* і різні *методи диференціювання*.

Таблиця похідних:

1. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1};$ 9. $(\sin x)' = \cos x;$

2. $(x)' = 1;$ 10. $(\cos x)' = -\sin x;$

3. $(c)' = 0, (c = const);$ 11. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

4. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$;

5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$;

6. $(e^x)' = e^x$;

7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\cdot \ln a}$;

8. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

12. $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

15. $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

16. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Приклад 2. Довести, що $(\sin x)' = \cos x$.

Розв'язання. Відмітимо, що функція $y = \sin x$ визначена і неперервна на інтервалі $(-\infty;\infty)$. Знайдемо похідну в деякій точці *x*. Використовуючи одну з тригонометричних формул, дістаємо

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\cos\frac{x+\Delta x + x}{2}\sin\frac{x+\Delta x - x}{2} = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Знайдемо границю (застосовано першу чудову границю):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

Отже $y' = \cos x$.

Приклад 3. Знайти похідну y' для наступних функцій:

а) $y = x^7$; б) $y = \sqrt[3]{x}$; в) $y = \dfrac{1}{x^4}$; г) $y = \log_5 x$; д) $y = 3^x$.

Розв'язання. За допомогою таблиці похідних маємо

а) $y' = \left(x^7\right)' = 7 \cdot x^6$; б) $y' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$;

в) $y' = \left(x^{-4}\right)' = -4 \cdot x^{-5}$; г) $y' = (\log_5 x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln 5}$;

д) $y' = (3^x)' = 3^x \cdot \ln 3$.

Основні властивості похідної:

1. $(u \pm v) = u' \pm v'$;
2. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$,

де c – стала; u, v – функції від x.

Приклад 4. Знайти похідні функцій:

а) $y = x^3 - 3 \cdot \sin x$; б) $y = \sqrt{x} \cdot e^x$; в) $y = 2 \cdot \operatorname{tg} x + \dfrac{x^2 - 1}{\sin x + x}$.

Розв'язання: Використовуючи основні властивості і таблицю похідних, дістаємо:

а) $y' = (x^3)' - 3 \cdot (\sin x)' = 3 \cdot x^2 - 3 \cdot \cos x$;

б) $y' = (\sqrt{x})' \cdot e^x + \sqrt{x} \cdot (e^x)' = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot e^x + \sqrt{x} \cdot e^x$;

в) $y' = 2 \cdot (\operatorname{tg} x)' + \dfrac{(x^2 - 1)' \cdot (\sin x + x) - (x^2 - 1) \cdot (\sin x + x)'}{(\sin x + x)^2} =$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2x \cdot (\sin x + x) - (x^2 - 1) \cdot (\cos x + 1)}{(\sin x + x)^2}.$$

Геометричний зміст похідної полягає у тому, що похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x_0, f(x_0))$, тобто $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ (рис. 43).

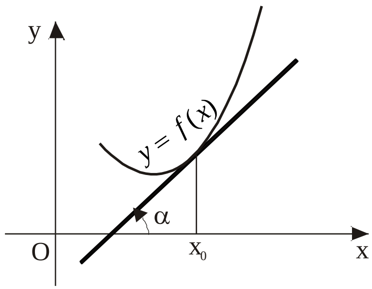


Рис. 43

Приклад 5. До кривої $y = x^4$ у точці з абсцисою $x_0 = \sqrt[3]{0,25}$ проведена дотична. Знайти кут між цією дотичною і додатнім напрямом осі Ох.

Розв'язання. Знайдемо спочатку похідну у заданій точці:

$$f'(x) = (x^4)' = 4x^3;$$

$$f'(x_0) = f'\left(\sqrt[3]{0,25}\right) = 4 \cdot \left(\sqrt[3]{0,25}\right)^3 = 1.$$

Шуканий кут визначається рівністю (геометричний зміст прохідної) $\operatorname{tg}\alpha = 1$. Отже $\alpha = 45^\circ$.

§ 5.2. Похідна складної функції і функції, заданої параметрично

Розглянемо складну функцію, тобто функцію, яка задана у вигляді $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$ (або $y = f(\varphi(x))$). Похідна від такої функції (якщо вона існує) шукається за формулою:

$$y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x). \qquad (2.1)$$

При використанні формули (2.1) після диференціювання замість проміжної змінної u необхідно підставити $\varphi(x)$. З формули (2.1) випливає наступне правило диференціювання складної функції: похідна складної функції дорівнює добутку похідної від зовнішньої функції по проміжній змінній на похідну від проміжної змінної по незалежній.

Приклад 1. Знайти y' , якщо:

а) $y = \sin^5 x$; б) $y = \ln(x^3 + 3x^2)$.

Розв'язання. а) Задану функцію можна представити у вигляді $y = u^5$, де $u = \sin x$. Згідно з формулою (2.1), маємо

$$y' = (u^5)' \cdot (\sin x)' = 5u^4 \cdot \cos x = 5\sin^4 x \cdot \cos x .$$

б) Аналогічно попередньому $u = x^3 + 3x^2, \, y = \ln u$;

$$y' = (\ln u)' \cdot (x^3 + 3x^2)' = \frac{1}{u} \cdot (3x^2 + 6x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2} \cdot (3x^2 + 6x).$$

У більш загальному випадку складна функція представляє собою суперпозіцію декількох елементарних функцій. Наприклад функція може мати вигляд $y = f(v), v = \psi(u), u = \varphi(x)$ (або $y = f(\psi(\varphi(x)))$). У цьому випадку справедлива формула

$$y'(x) = f'(v) \cdot \psi'(u) \cdot \varphi'(x). \tag{2.2}$$

Підкреслимо, що добуток правої частини останньої рівності складається з похідних від кожної із задіяних функцій по відповідній змінній.

Приклад 2. Знайти похідні від заданих функцій:

а) $y = tg^3(x^2 + 5)$; б) $y = e^{\sin^2 x}$.

Розв'язання. а) Задану функцію можемо представити у вигляді $y = v^3, v = \text{tg} u, u = x^2 + 5$. На основі (2.2) маємо

$$y' = (v^3)' \cdot (\text{tg} u)' \cdot (x^2 + 5)' = 3v^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 u} \cdot 2x =$$

$$= 3tg^2(x^2 + 5) \cdot \frac{1}{\cos^2(x^2 + 5)} \cdot 2x .$$

б) При оформленні розв'язків проміжні змінні вводити не обов'язково. Беручі послідовно похідні від показникової, степенової і тригонометричної функцій, отримуємо

$$y' = e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cdot \cos x .$$

Якщо функція задана параметрично, тобто у вигляді $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$

то похідна від y по x визначається за формулою

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \tag{2.3}$$

У формулі (2.3) і надалі індекс знизу вказує змінну, по якій береться похідна.

Приклад 3. Знайти похідні y'_x:

а) $\begin{cases} x = \sin^3 t, \\ y = t^2 - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = t^4 - t^2, \\ y = e^{3t-1}. \end{cases}$

Розв'язання. На основі (2.3) маємо

а) $y'_x = \dfrac{2t}{3\sin^2 t \cdot \cos t}$; б) $y'_x = \dfrac{e^{3t-1} \cdot 3}{4t^3 - 2t}$.

§ 5.3. Диференціювання неявно заданих функцій. Логарифмічне диференціювання

Нехай функція y від x задана *неявно*, тобто у вигляді рівності $F(x, y) = 0$. Розглянемо метод диференціювання вказаної функції на конкретному прикладі.

Приклад 1. Знайти похідну y', якщо функція y від x задана рівністю $y^3 + e^{x^2 + y^5} + 3\sin x = 0.$

Розв'язання. Здиференціюємо задану рівність, враховуючи те, що y є функцією від x:

$$3y^2y' + e^{x^2+y^5} \cdot (2x + 5y^4y') + 3\cos x = 0 .$$

Отриманий вираз розглядаємо як рівняння відносно похідної y' (воно завжди лінійне). Розв'язуємо рівняння:

$$y'(3y^2 + 5y^4e^{x^2+y^5}) = -2xe^{x^2+y^5} - 3\cos x,$$

$$y' = \frac{-2xe^{x^2+y^5} - 3\cos x}{3y^2 + 5y^4e^{x^2+y^5}}.$$

Розглянемо показниково-степеневу функцію $y = u^v$, де u і v – функції від *x*. Похідна $y'(x)$ у цьому випадку визначається за допомогою *методу логарифмічного диференціювання*. Суть вказаного методу полягає у тому, що спочатку логарифмуємо рівність $y = u^v$, а потім знаходимо похідну y' за правилами диференціювання неявної функції.

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = (x^2 + 5)^{\sin x}$.

Розв'язання.: Логарифмуємо задану рівність і робимо очевидні перетворення (використано властивість логарифму $\log_a x^p = p\log_a x$):

$$\ln y = \ln(x^2 + 5)^{\sin x}, \quad \ln y = \sin x \cdot \ln(x^2 + 5) .$$

Диференціюємо останню рівність за правилами диференціювання неявної функції:

$$(\ln y)' = (\sin x)' \cdot \ln(x^2 + 5) + \sin x \cdot (\ln(x^2 + 5))' ,$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln(x^2 + 5) + \sin x \cdot \frac{1}{x^2 + 5} \cdot 2x ,$$

$$y' = y \cdot \left(\cos x \cdot \ln(x^2+5) + \frac{2x \cdot \sin x}{x^2+5} \right),$$

$$y' = (x^2+5)^{\sin x} \cdot (\cos x \cdot \ln(x^2+5) + \frac{2x \cdot \sin x}{x^2+5}) .$$

За допомогою вказаного методу для показниково-степеневоі функції $y = u^v$ легко отримати наступну формулу:

$$\left(u^v\right)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u' \qquad (3.1)$$

Формула (3.1) легко запам’ятовується. Перший доданок її правої частини – це похідна функції $y = u^v$ при умові, що основа u є сталою величиною (використовується таблична похідна для показникової функції a^x); другий доданок – це похідна функції $y = u^v$ при умові, що показник v є сталою величиною (використовується таблична похідна для степеневої функції x^α).

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = (\mathrm{tg}\, x)^{3x+1}$.

Розв’язання. Користуючись формулою (3.1), знайдемо

$$y' = (\mathrm{tg}\, x)^{3x+1} \cdot \ln \mathrm{tg}\, x \cdot 3 + (3x+1) \cdot (\mathrm{tg}\, x)^{3x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} .$$

§ 5.4. Диференціал функції. Наближені обчислення за допомогою диференціала

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x, то її приріст Δy у цій точці можна представити у вигляді

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x , \qquad (4.1)$$

де Δx – приріст аргументу у точці x; $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Добуток $f'(x) \cdot \Delta x$ є головною частиною приросту функції (другий доданок є нескінченно малою величиною більш високого порядку малості при $\Delta x \to 0$). Він називається *диференціалом* функції в точці x і позначається символом dy або $df(x)$. Отже,

$$dy = f'(x)\Delta x . \tag{4.2}$$

Приріст Δx незалежної змінної x співпадає з її диференціалом dx тобто $dx = \Delta x$. Означення (4.2) може бути записане у вигляді

$$dy = f'(x)dx \tag{4.3}$$

Всі основні властивості диференціала співпадають з властивостями похідної. Наприклад для диференціала суми і добутку справедливі формули

$$d(u+v) = du + dv, \quad d(uv) = udv + vdu .$$

Приклад 1. Знайти диференціал функції $y = 2\arcsin^2 x + \sqrt{x}$.

Розв'язання. На основі формули (4.3) маємо

$$dy = \left(2\arcsin^2 x + \sqrt{x}\right)' dx = \left(\frac{4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx .$$

Як бачимо знаходження диференціала dy по суті зводиться до знаходження похідної y' .

Нехай функція $y = f(x)$, диференційована на інтервалі (a,b) і нехай x_0 – внутрішня точка цього інтервалу. Припустимо, що незалежна змінна x отримала приріст Δx в точці x_0, причому нова точка $x = x_0 + \Delta x$ також належить інтервалу (a,b). Як відомо приріст Δy і диференціал dy функції визначаються наступним чином

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) , \; dy = f'(x_0)dx .$$

Користуючись наближеною рівністю $\Delta y \approx dy$, дістаємо

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)dx$$

або

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \qquad (4.4)$$

Формула (4.4) застосовується для *наближених обчислень* значення функції.

Приклад 2. Задана функція $f(x)=\sqrt{2x^2+1}$. Обчислити наближено за допомогою диференціала значення цієї функції в точці $x=1{,}97$.

Розв'язання. Значення x_0 підбираємо таким чином, щоб воно було близьким до заданого значення *x* і щоб сама функція і її похідна легко обчислювалися у цій точці. У більшості випадків x_0 є найближчим цілим числом до заданого *x*. Нехай $x_0=2$. Тоді:

$$f(x_0)=f(2)=\sqrt{2\cdot4+1}=3,\ \Delta x=x-x_0=1.97-2=-0.03;$$

$$f'(x)=\left(\sqrt{2x^2+1}\right)'=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}};\ f'(x_0)=f'(2)=\frac{4}{3}.$$

Підставивши знайдені значення у формулу (4.4), отримуємо:

$$f(1.97)=f(2+(-0{,}03))\approx3+\frac{4}{3}\cdot(-0.03)=2.96.$$

§ 5.5. Поняття про похідні вищих порядків

Нехай функція $y=f(x)$ диференційована в точці *x*, тобто у цій точці існує похідна $f'(x)$. Якщо для функції *f*(*x*) у точці *x* існує похідна від похідної $f'(x)$, то вона називається *похідною другого порядку* або *другою похідною*. Похідною третього порядку називається похідна від похідної другого порядку і т. д. Для вказаних похідних вищих порядків прийняті позначення y'', y''', …, $y^{(n)}$ або $f''(x)$,

$f'''(x)$, …, $f^{(n)}(x)$.

Приклад 1. Знайти похідні другого порядку для наступних функцій:

а) $y = 2x^3 + \sin 3x - 1$; б) $y = e^{x^2+1}$.

Розв'язання. У відповідності з означенням другої похідної можемо записати:

а) $y' = 6x^2 + 3\cdot\cos 3x$, $y'' = \left(6x^2 + 3\cdot\cos 3x\right)' = 12x - 9\cdot\sin 3x$;

б) $y' = 2\cdot xe^{x^2+1}$, $y'' = \left(2\cdot xe^{x^2+1}\right)' = 2e^{x^2+1} + 4x^2e^{x^2+1}$.

Якщо функцію задано *параметрично* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то похідна другого порядку від y по x обчислюється за формулою:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{\varphi'(t)} \tag{5.1}$$

або

$$y''_{xx} = \frac{\varphi'(t)\cdot\psi''(t) - \varphi''(t)\cdot\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}. \tag{5.2}$$

Приклад 2. Знайти похідні другого порядку y''_{xx} від функцій заданих параметрично:

а) $\begin{cases} x = t^2 - 3, \\ y = \cos t + t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = e^{2t-1}, \\ y = t^4 - \sin t. \end{cases}$

Розв'язання. а) Користуючись формулою (5.1), отримуємо:

$$y'_x = \frac{-\sin t + 1}{2t}, \qquad y''_{xx} = \frac{\left(\dfrac{-\sin t + 1}{2t}\right)'}{(t^2 - 3)'} = \frac{-2t\cos t - 2\cdot(-\sin t + 1)}{8t^3}.$$

б) Застосовуючи формулу (5.2), дістаємо:

$$\varphi'(t)=2e^{2t-1},\ \varphi''(t)=4e^{2t-1},\ \psi'(t)=4t^3-\cos t,$$

$$\psi''(t)=12t^2+\sin t;\ y''_{xx}=\frac{2e^{2t-1}\cdot(12t^2+\sin t)-4e^{2t-1}\cdot(4t^3-\cos t)}{(2e^{2t-1})^3}.$$

VI. Застосування похідної і диференціала. Дослідження функції

§ 6.1. Знаходження границі за допомогою похідної. Правило Лопіталя

Правило Лопіталя застосовується для обчислення границь. Сформулюємо його суть. Нехай функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ диференційовані в околі точки x_0 і нехай в цій точці вони одночасно нескінченно малі або нескінченно великі, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0 \text{ і } \lim_{x\to x_0}\psi(x)=0 \text{ або } \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty \text{ і } \lim_{x\to x_0}\psi(x)=\infty.$$

Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, то існує також границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, причому:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}. \tag{1.1}$$

Очевидно, що правило Лопіталя використовується для розкриття невизначеностей виду $\dfrac{0}{0}$ і $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Приклад 1. Обчислити границі:

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}\frac{2^x-2}{x-1};\quad \text{б) } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x};\quad \text{в) } \lim_{x\to x_0}\frac{\sin^2 x}{x^3+x^2}.$$

Розв'язання. Застосовуючи правило Лопіталя, дістаємо:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-2}{x-1}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2^x-2)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x\cdot\ln 2}{1}=2\ln 2$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

в) При обчисленні цієї границі правило Лопіталя необхідно застосувати два рази (у загальному випадку при виконанні відповідних умов це можна робити декілька разів).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^3+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x)'}{(x^3+x^2)'}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{3x^2+2x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x^2+2x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x^2+2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(3x^2+2x)'}=2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6x+2}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

Правило Лопіталя використовується також для розкриття невизначеностей типу $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞ і ∞^0. У всіх вказаних випадках можна зробити перетворення, після яких дістанемо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Приклад 2. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\ln x)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-\ln^2 x)$.

Розв'язання. У наведених нижче розв'язках спочатку за допомогою простих перетворень зводимо задану границю до невизначеності $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$, а потім застосовуємо правило Лопіталя.

а) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\ln x)=\{0\cdot\infty\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}=-\lim\limits_{x\to 0}x=0$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{arctgx}-\dfrac{1}{x}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x\cdot arctgx}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{arctgx+x\cdot\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(1+x^2)\cdot arctgx+x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x\cdot arctgx+(1+x^2)\cdot\dfrac{1}{1+x^2}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\cdot arctgx+1}=\frac{0}{1}=0.$$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-\ln^2 x)=\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2(1-\dfrac{\ln^2 x}{x^2})\right)$.

Так як

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\right)^2=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}\right)^2=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\right)^2=0,$$

то

$$\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{\ln^2 x}{x^2})=1,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(x^2(1-\frac{\ln^2 x}{x^2})\right)=\infty\cdot 1=\infty.$$

При розкритті невизначеностей 0^0, 1^∞ і ∞^0 зручно використовувати тотожність

$$f(x)^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\cdot\ln f(x)}. \qquad (1.2)$$

Формула (1.2) отроимана за допомогою основної логарифмічної тотожності.

Приклад 3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{tgx}}$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу (1.2), маємо

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{tgx}}=\left\{1^{\infty}\right\}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{tgx}\cdot\ln(1+x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{tgx}}.$$

Знайдемо границю показника:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{tgx}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x))'}{(tgx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{1+x}=1.$$

Дістаємо кінцевий результат:

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{tgx}}=e^1=e.$$

§ 6.2. Асимптоти кривої

Нехай задана функція $y=f(x)$. Якщо існує пряма, така, що відстань від точки $M(x,f(x))$ кривої до цієї прямої прямує до нуля при нескінченному віддалені точки М від початку системи координат, то ця пряма називається *асимптотою* кривої (або графіка функції) $y=f(x)$.

Розрізняють три види асимптот: *похилі*, *горизонтальні* і *вертикальні*. *Похилі* і *горизонтальні* асимптоти шукають у формі $y=kx+b$, де

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx). \qquad (2.1)$$

Якщо хоча б одна з границь формул (2.1) не існує (дорівнює нескінченності), то крива не має вказаних асимптот. У випадку, коли обидві границі існують і $k=0$, крива має горизонтальну асимптоту

$y = b$. Параметри k і b можуть бути різними при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$. У цьому випадку крива має дві похилі асимптоти.

Пряма $x = a$ є *вертикальною* асимптотою, якщо

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty . \qquad (2.2)$$

Границя у формулі (2.2) може бути односторонньою. Якщо функція визначена на усій числовій прямій, то її графік не має вертикальних асимптот.

Приклад 1. Знайти асимптоти кривих:

а) $y = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 4}$; б) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + x + 1}$; в) $y = 2x + arctg 3x$;

г) $y = \dfrac{x^5}{x^3 - 1}$; д) $y = x^2 + \ln x$.

Розв'язання. Для всіх кривих спочатку за допомогою формул (2.1) визначаємо похилі і горизонтальні асимптоти, а потім, використовуючи формулу (2.2) – вертикальні.

а) $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + 2x^2}{x(x^2 + 4)} = 1$;

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 4} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - x^3 - 4x}{x^2 + 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 4x}{x^2 + 4} = 2.$$

Отже пряма $y = x + 2$ є похилою асимптотою.

Вертикальних асимптот немає, так як функція визначена на інтервалі $(-\infty; \infty)$ (немає точок, в яких виконується умова (2.2)).

б) $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x(x^2 + x + 1)} = 0, \quad b = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x^2 + x + 1} + 0 \cdot x \right) = 1.$

Пряма $y=1$ – горизонтальна асимптота.

Вертикальних асимптот немає.

в) Для цієї кривої границі формул (2.1) потрібно розглядати окремо при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$ (у попередніх випадках вони співпадали).

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(2 + \frac{arctg\,3x}{x}\right) = 2 + 0 = 2\ ;$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - k_1 x) = \lim_{x\to-\infty}(2x + arctg\,3x - 2x) = \lim_{x\to-\infty}(arctg\,3x) = -\frac{\pi}{2}\ .$$

Пряма $y = 2x - \frac{\pi}{2}$ – похила асимптота (ліва).

$$k_2 = \lim_{x\to+\infty}\left(2 + \frac{arctg\,3x}{x}\right) = 2 + 0 = 2\,;$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - k_2 x) = \lim_{x\to+\infty}(2x + arctg\,3x - 2x) = \lim_{x\to+\infty}(arctg\,3x) = \frac{\pi}{2}\ .$$

Пряма $y = 2x + \frac{\pi}{2}$ – похила асимптота (права).

Вертикальних асимптот немає.

г) Так як $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5}{x(x^3-1)} = \infty$, то похилих і горизонтальних асимптот немає. Оскільки $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^5}{x^3-1} = \infty$, то пряма $x=1$ є вертикальною асимптотою (точка $x=1$ є точкою розриву другого роду).

д) Відзначимо, що дана функція визначена на інтервалі $(0;+\infty)$, що потрібно враховувати при знаходженні відповідних границь. Так як

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x + \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} x + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \infty\ ,$$

то похилих і горизонтальних асимптот немає. Оскільки

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (x^2 + \ln x) = -\infty,$$

то пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою.

§ 6.3. Рівняння дотичної і нормалі до графіка функції

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована при $x = x_0$, то в точці $M_0(x_0, f(x_0))$ існує дотична до графіка функції і її рівняння визначається за формулою

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (3.1)$$

Рівняння нормалі до кривої в точці $M_0(x_0, f(x_0))$, при умові, що $f'(x_0) \neq 0$, має вигляд

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (3.2)$$

Якщо $f'(x_0) = 0$, то дотична паралельна осі *Ox*, а нормаль – осі *Oy*. У цьому випадку рівняння дотичної має вигляд $y = f(x_0)$, а рівняння нормалі визначається за формулою $x = x_0$.

Приклад 1. Записати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y = x^3 + 1$ в точці $x_0 = 1$.

Розв'язання. Обчислюємо всі необхідні значення:

$$f(x_0) = f(1) = 1^3 + 1 = 2; \quad f'(x) = 3x^2; \quad f'(x_0) = f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3.$$

Використовуючи формулу (3.1), отримуємо рівняння дотичної

$$y = 2 + 3 \cdot (x - 1) \text{ або } y = 3x - 1.$$

Застосовуючи формулу (3.2), дістаємо рівняння нормалі

$$y = 2 - \frac{1}{3}(x - 1) \text{ або } y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}.$$

§ 6.4. Обчислення найбільшого і найменшого значень функції на відрізку

Критичними точками функції $y = f(x)$ називаються точки, в яких її перша похідна дорівнює нулю або не існує. Точки, в яких перша похідна функції дорівнює нулю називаються *стаціонарними*.

Якщо функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$, то найбільше і найменше значення (вони обов'язково існують) вона приймає на кінцях відрізку або в критичних точках, які належать цьому відрізку. Звідси випливає, що знаходження найбільшого і найменшого значень функції на відрізку може здійснюватися за наступною схемою:

1) визначаємо критичні точки;

2) обчислюємо значення функції на кінцях відрізку і в критичних точках, які належать відрізку;

3) порівнюючи отримані значення, вибираємо найбільше і найменше з них.

Приклад 1. Знайти найбільше і найменше значення функцій на вказаних відрізках:

а) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x + 1$, $[0;3]$; б) $y = x - 2 \cdot \ln x$, $[1;e]$.

Розв'язання. а) Знаходимо першу похідну і визначаємо критичні точки:

$$y' = x^2 - 5x + 4\,; \quad x^2 - 5x + 4 = 0\,, \quad x_1 = 1\,, \quad x_2 = 4\,.$$

Так як функція диференційована на всій числовій прямій, то інших критичних точок не існує. Відрізку $[0;3]$ належить тільки точка $x_1 = 1$. Обчислюємо значення функції на кінцях відрізку і в точці

$x_1 = 1$:

$$f(0) = 1, \quad f(3) = -\frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{29}{6}.$$

Порівнюючи між собою отримані числа, маємо: $y_{найм} = -\frac{1}{2}$, $y_{найб} = \frac{29}{6}$.

б) Аналогічно попередньому, можемо записати:

$$y' = 1 - \frac{2}{x}, \quad 1 - \frac{2}{x} = 0, \quad \frac{x-2}{x} = 0, \quad x = 2;$$

$$f(1) = 1 - 2 \cdot \ln 1 = 1, \; f(e) = 1 - 2 \cdot \ln e = -1,$$

$$f(2) = 2 - 2 \cdot \ln 2 = 2 \cdot (1 - \ln 2);$$

$$y_{найм} = -1; \; y_{найб} = 2 \cdot (1 - \ln 2).$$

Відзначимо, що в точці $x = 0$ похідна не існує, але вказана точка не належить вказаному інтервалу, більш того, вона не належить області визначення заданої функції.

§ 6.5. Дослідження функції на зростання, спадання і точки екстремуму

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на інтервалі (a, b) і нехай x_1, x_2 – дві довільні точки з цього інтервалу, причому $x_1 < x_2$. Якщо для вказаних точок виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \le f(x_2)$), то кажуть, що функція $y = f(x)$ *зростає* (*не спадає*) на інтервалі (a, b). Якщо ж для вказаних точок виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$), то кажуть, що функція $y = f(x)$ *спадає* (*не зростає*) на інтервалі (a, b).

Інтервали зростання і спадання функції (*інтервали монотонності*) визначаються за допомогою першої похідної. Якщо $f'(x)>0$ для будь-якого x з інтервалу (a,b), то функція $y=f(x)$ на вказаному інтервалі зростає; якщо ж $f'(x)<0$, то функція спадає.

Точка x_0 називається точкою *локального мінімуму* функції $y=f(x)$, якщо для будь-якого x з деякого околу цієї точки виконується нерівність $f(x_0)<f(x)$. Якщо ж $f(x_0)>f(x)$, то точка x_0 називається точкою *локального максимуму*.

Мінімум або максимум (тут і надалі мова іде про локальний мінімум і локальний максимум) функції будемо називати її *екстремумом*, а точку x_0, в якій функція має екстремум – *точкою екстремуму*.

Необхідна умова екстремуму функції: якщо функція $y=f(x)$ має екстремум в точці x_0, то у цій точці перша похідна дорівнює нулю або не існує, тобто x_0 – критична точка.

Достатні умови екстремуму функції: критична точка x_0 є точкою максимуму, якщо при переході через цю точку (зліва направо) перша похідна змінює знак з «+» на «-»; якщо ж знак змінюється з «-» на «+», то точка x_0 є точкою мінімуму (якщо знак не міняється, то екстремуму немає).

Дослідження функції на зростання, спадання і точки екстремуму будемо здійснювати за наступною схемою:

1) знаходимо область визначення функції;
2) знаходимо критичні точки;
3) на числовій прямій відмічаємо всі критичні точки і точки, в яких функція невизначена (точки розриву);
4) визначаємо знак першої похідної на кожному із отриманих

інтервалів області визначення функції (для цього достатньо обчислити значення похідної в одній точці даного інтервалу);

5) використовуючи відповідні умови, визначаємо інтервали зростання, спадання і точки екстремуму (при необхідності обчислюємо і самі екстремуми).

Приклад 1. Знайти проміжки зростання, спадання і точки екстремуму функцій:

а) $y=\frac{3}{4x^4}+\frac{2}{3x^3}-\frac{1}{2x^2}$; б) $y=\sqrt[3]{x^2}$; в) $y=x-\ln x$.

Розв'язання. а) Функція визначена на всій числовій прямій окрім точки $x=0$. Область визначення функції будемо позначати через $D(f)$. Таким чином $D(f)=(-\infty;0)U(0;+\infty)$. Знайдемо критичні точки:

$$y'=\frac{3}{4}(x^{-4})'+\frac{2}{3}(x^{-3})'-\frac{1}{2}(x^{-2})'=-3x^5-2x^{-4}+x^{-3}=-\frac{3}{x^5}-\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^3}=$$

$$=\frac{x^2-2x-3}{x^5};\ \ \frac{x^2-2x-3}{x^5}=0;\ x^2-2x-3=0;\ x_1=-1;\ x_2=3.$$

Відзначимо, що в точці $x=0$ похідна не існує, але ця точка є точкою розриву і не може бути точкою екстремуму функції. На числовій прямій відмічаємо критичні точки, точки розриву і визначаємо знак першої похідної на отриманих проміжках (рис.44).

Маємо: функція спадає на інтервалах $(-\infty,-1)$ і $(0;3)$; функція зростає на інтервалах $(-1;0)$ і $(3;+\infty)$; в точці $x=-1$ функція має локальний мінімум $\left(y_{1\min}=f(-1)=-\frac{5}{12}\right)$; точка $x=3$ також є точкою мінімуму $\left(y_{2\min} = f(3) = -\dfrac{7}{324} \right)$.

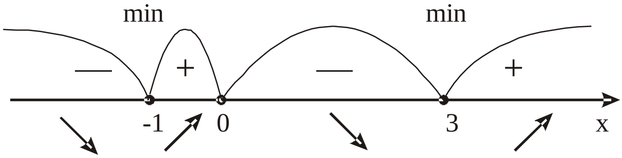


Рис. 44

б) Функція визначена на всій числовій прямій, тобто $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Знайдемо похідну:

$$y' = \left(x^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} .$$

В точці $x = 0$ похідна не існує. Вказана точка належить області визначення функції. Отже $x = 0$ – критична точка. Визначаємо інтервали монотонності та точки екстремуму (рис. 45).

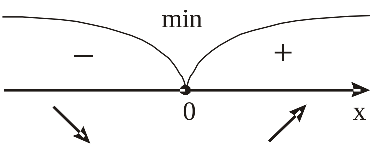


Рис. 45

На інтервалі $(-\infty; 0)$ функція спадає; на інтервалі $(0; +\infty)$ функція зростає; $x = 0$ – точка локального мінімуму $(y_{\min} = f(0) = 0)$.

в) Аналогічно попередньому дістаємо (Рис. 46): $D(f) = (0; +\infty)$;

$$y' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}; \qquad \frac{x-1}{x} = 0;$$

$x = 1$ – критична точка.

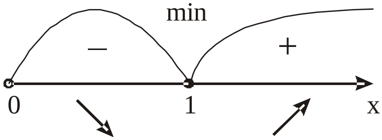


Рис. 46

Функція спадає на інтервалі

$(0;1)$; функція зростає на інтервалі $(1;+\infty)$; $x=1$ – точка мінімуму $\left(y_{\min}=f(1)=1\right)$. Відзначимо, що $x=1$ – *кутова точка*.

§ 6.6. Опуклість кривої і точки перегину

Нехай функція $y=f(x)$ диференційована на інтервалі (a,b). Графік цієї функції називають *опуклим угору* (рис. 47) на інтервалі (a,b), якщо на цьому інтервалі він розміщений не вище будь-якої своєї дотичної і *опуклим униз* (рис. 48), якщо він розміщений не нижче дотичної. Точка $(x_0, f(x_0))$ називається *точкою перегину* (рис. 49) кривої $y=f(x)$, якщо при переході через цю точку крива змінює напрям опуклості.

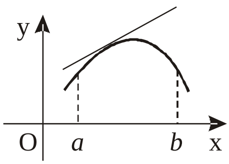


Рис. 47

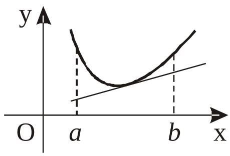


Рис. 48

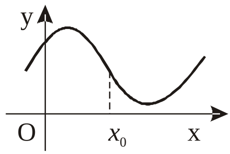


Рис. 49

Дослідження кривої на опуклість і точки перегину здійснюється за допомогою другої похідної. Якщо $f''(x)>0$ для будь-якого x з інтервалу (a,b), то крива $y=f(x)$ опукла униз на цьому інтервалі; якщо ж $f''(x)<0$, то крива опукла угору. *Критичними точками другого роду* функції $y=f(x)$ називаються точки, в яких її друга похідна дорівнює нулю або не існує.

Необхідна умова точки перегину: якщо $\left(x_0, f(x_0)\right)$ – точка перегину кривої, то у цій точці друга похідна функції $y=f(x)$ дорівнює нулю або не існує (x_0 – критична точка другого роду).

Достатня умова точки перегину: нехай x_0 – критична точка другого роду функції $y = f(x)$; тоді, якщо друга похідна $f''(x)$ змінює знак при переході через точку x_0, то точка $(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину.

Дослідження графіка функції на опуклість і точки перегину здійснюється за наступною схемою:

1) знаходимо область визначення функції;
2) знаходимо критичні точки другого роду;
3) на числовій прямій відмічаємо всі критичні точки другого роду і точки розриву функції;
4) визначаємо знак другої похідної на кожному із отриманих інтервалів області визначення функції;
5) використовуючи відповідні умови, визначаємо інтервали опуклості і точки перегину кривої.

Приклад 1. Знайти інтервали опуклості і точки перегину кривих:

а) $y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + x + 2$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$; в) $y = \sqrt[3]{x^4} + x$.

Розв'язання. а) Функція визначена для всіх $x \in R$, тобто $D(f) = (-\infty; +\infty)$; Знаходимо критичні точки другого роду:

$$y' = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 1, \quad y'' = x^2 - 3x - 4;$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4;$$

Так як друга похідна визначена на всій числові прямій, то інших критичних точок другого роду не існує. Будуємо числову пряму; відмічаємо на ній знайдені точки (точок розриву немає); визначаємо знак другої похідної і напрям опуклості на отриманих інтервалах; знаходимо точки перегину (рис. 50).

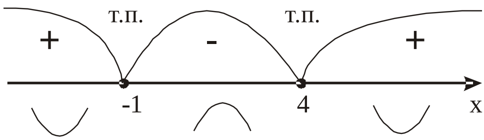


Рис. 50

Маємо: крива опукла униз на інтервалах $(-\infty;-1)$ і $(4;+\infty)$; опукла угору на $(-1;4)$; $(-1;-5/12)$ і $(4;-146/3)$ – точки перегину.

б) Аналогічно попередньому дістаємо:

$$D(f)=(-2;+\infty); \quad y'=((x+2)^{-\frac{1}{2}})'=-\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$y''=\frac{3}{4}(x+2)^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{4\sqrt{(x+2)^5}}.$$

Критичних точок другого роду немає, так як друга похідна відмінна від 0 і визначена на всій області визначення функції (точка $x=-2$ не входить в область визначення). Враховуючи, що $f''(x)>0$ на інтервалі $(-2;+\infty)$, робимо висновок, що графік функції опуклий униз у всій області визначення. Точок перегину немає.

в) Маємо: $D(f)=(-\infty;+\infty)$; $y'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}+1$; $y''=\frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{4}{9\cdot\sqrt[3]{x^2}}$.

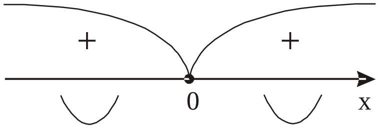


Рис. 51

Так як в точці $x=0$ друга похідна не існує і функція визначена, то (0;0) – критична точка другого роду. На обох отриманих інтервалах $(-\infty;0)$ і $(0;+\infty)$ крива опукла униз. Точок перегину немає (рис.51).

§ 6.7. Повне дослідження функції, побудова графіка

Наведемо схему повного дослідження функції і побудови її графіка:

1) знаходимо область визначення функції;
2) досліджуємо функцію на парність, непарність і періодичність;
3) знаходимо точки перетину кривої з осями координат і інтервали знакосталості;
4) визначаємо асимптоти кривої і характер точок розриву;
5) знаходимо проміжки зростання, спадання і екстремуми функції;
6) досліджуємо графік функції на опуклість і точки перегину;
7) будуємо графік функції.

Розглянемо більш детально наведену схему на конкретних прикладах.

Приклад 1. Провести повне дослідження функцій і побудувати їхні графіки:

а) $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

Розв'язання. а) Враховуючи, що знаменник дробу дорівнює нулю при $x=\pm 2$, знаходимо область визначення функції

$$D(f)=(-\infty;-2)U(-2;2)U(2;+\infty).$$

Нагадаємо, що функція $y=f(x)$ називається *парною*, якщо область її визначення симетрична відносно нуля і якщо для будь-якого x виконується рівність $f(-x)=f(x)$; якщо ж $f(-x)=-f(x)$, то функція називається *непарною*. Графік парної функції симетричний відносно осі *Oy*, а графік непарної – відносно початку координат. У нашому випадку область визначення симетрична відносно нуля і

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-4}=-\frac{x^3}{x^2-4}=-f(x)\ .$$

Функція непарна (побудований графік повинен бути симетричним відносно початку координат).

Легко бачити, що функція неперіодична.

Знайдемо точки перетину графіка функції з віссю *Ox* (у цих точках $y=0$): $\frac{x^3}{x^2-4}=0$, $x^3=0$, $x=0$; (0;0) – точка перетину з віссю *Ox*.

Визначаємо точки перетину графіка функції з віссю *Oy* (у цих точках $x=0$): $y=\frac{0}{0-4}=0$; (0;0) – точка перетину з віссю *Oy*.

Знайдемо інтервали знакосталості. Для цього на числовій прямій відмічаємо точки перетину кривої з віссю *Ox* і точки розриву, а потім визначаємо знак функції на кожному з одержаних проміжків області визначення функції (рис. 52). Як бачимо функція додатна на інтервалах $(-2;0)$ і $(2;+\infty)$, від'ємна на $(-\infty;-2)$ і $(0;2)$.

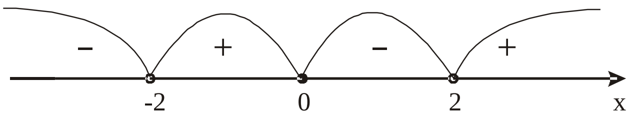


Рис. 52

Шукаємо похилі і горизонтальні асимптоти (див. §2.2):

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x\cdot(x^2-4)}=1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{x^2-4}\right) = 0;$$

$$y = kx + b = 1\cdot x + 0 = x,\ y = x$$ – похила асимптота.

Так як

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{x^3}{(x^2-4)} = -\infty, \quad \lim_{x\to -2+0}\frac{x^3}{(x^2-4)} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^3}{(x^2-4)} = -\infty, \quad \lim_{x\to 2+0}\frac{x^3}{(x^2-4)} = +\infty,$$

то прямі $x = -2$ і $x = 2$ є вертикальними асимптотами ($x = \pm 2$ – точки розриву другого роду).

Досліджуємо функцію на інтервали зростання, спадання і точки екстремуми (див. §2.5.):

$$y' = \frac{3x^2(x^2-4) - 2x\cdot x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2};$$

$x^4 - 12x^2 = 0$, $x^2(x^2-12) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$, $x_3 = 2\sqrt{3}$.

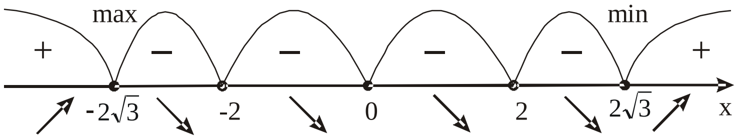


Рис. 53

Функція зростає на інтервалах $\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)$ і $\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$. Функція спадає на інтервалах $\left(-2\sqrt{3};-2\right)$, $(-2;0)$, $(0;2)$ і $\left(2;2\sqrt{3}\right)$. Точка $x = -2\sqrt{3}$ – точка максимуму $(y_{max} \approx -5.2)$; $x = 2\sqrt{3}$ – точка мінімуму $(y_{min} \approx 5.2)$.

Досліджуємо функцію на опуклість і точки перегину (див. §2.6):

$$y'' = \frac{(4x^3 - 24x)(x^2-4)^2 - 2(x^2-4)\cdot 2x\cdot(x^4 - 12x^2)}{(x^2-4)^4} = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2-4)^3};$$

$$8x^3+96x=0,\quad 8x(x^2+12)=0,\quad x=0,\quad (x^2+12\neq 0).$$

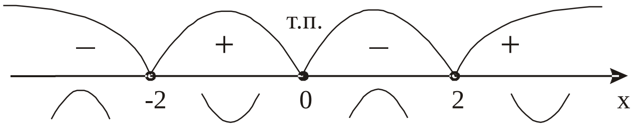


Рис. 54

Функція опукла угору на інтервалах $(-\infty;-2)$ і $(0;2)$; опукла униз на інтервалах $(-2;0)$ і $(2;+\infty)$; (0; 0) – точка перегину.

Будуємо графік функції (Рис. 55).

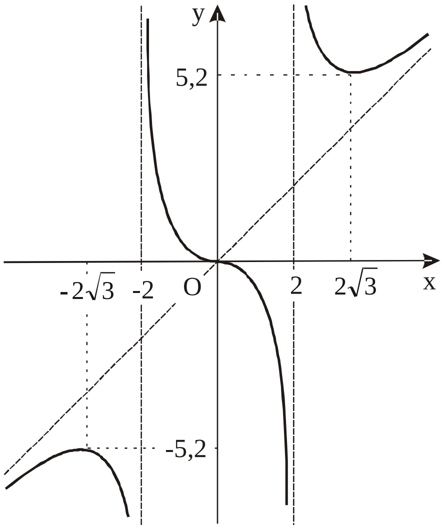


Рис. 55

б) Областю визначення функції є інтервал $(0;+\infty)$.

Так як область визначення не симетрична відносно нуля, то функція не парна і не непарна. Функція неперіодична.

Знаходимо точки перетину кривої з віссю *Ox*:

$\frac{\ln x}{x}=0, \ln x=0, x=1$;   (1;0) – точка перетину з віссю *Ox*.

Вісь Oy графік функції не перетинає $(x \neq 0)$.

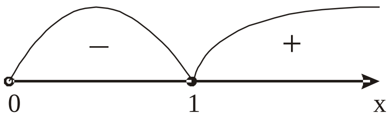


Рис. 56

Інтервали знакосталості (рис.56): на інтервалі $(0;1)$ функція від'ємна, на $(1;+\infty)$ – додатна.

Знаходимо похилі і горизонтальні асимптоти:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x} - 0\cdot x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0;$$

$y = kx + b = 0\cdot x + 0 = 0,\ y = 0$ (вісь Ox) – горизонтальна асимптота.

Так як $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{x} = -\infty$, то $x = 0$ – вертикальна асимптота.

Досліджуємо функцію на монотонність і точки екстремуму:

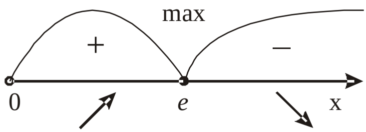


Рис. 57

$$y' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2};$$

$1 - \ln x = 0,\ \ln x = 1,\ x = e\ \ (e \approx 2{,}7)$.

Функція зростає на інтервалі $(0;e)$, спадає на інтервалі $(e;+\infty)$; $x = e$ – точка максимуму $(y_{\max} = e^{-1} \approx 0.37)$.

Досліджуємо графік функції на опуклість і точки перегину:

$$y'' = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1 - \ln x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3};$$

$$2\ln x - 3 = 0\,,\ \ln x = \frac{3}{2}\,,\quad x = e^{1,5} \approx 4.48\,.$$

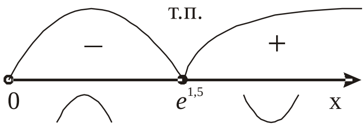


Рис. 58

На інтервалі $(0; e^{1,5})$ крива опукла угору, на інтервалі $(e^{1,5}; +\infty)$ – униз; $(e^{1,5}; 1{,}5e^{-1,5})$ – точка перегину.

Будуємо графік (рис. 59).

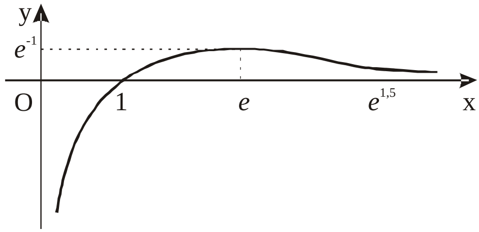


Рис. 59

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

***Завдання* 1**. Знайти матрицю $C = 3 \cdot A^T - A \cdot B + 2 \cdot E$, де E - одинична матриця третього порядку.

1. $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -8 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 8 & 0 & 9 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 7 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & -5 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 8 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 \\ -7 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 5 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 7 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 5 & 3 & -1 \\ -6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix} 0 & -8 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12. $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 & 8 & -9 \\ 2 & 1 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix} -1 & 7 & 9 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -6 & -8 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 9 \\ -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -5 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \\ -1 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -8 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -1 & 4 & 5 \\ 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 1 & -8 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ 5 & -7 & 8\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$; $\quad B=\begin{pmatrix}7 & 5 & 0\\ 9 & 1 & -2\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 4\\ 5 & -4 & 0\\ -3 & 5 & 6\end{pmatrix}$; $\quad B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ -1 & 8 & 3\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ 5 & -7 & 1\\ 3 & 0 & -6\end{pmatrix}$; $\quad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & -5\\ 1 & 6 & 2\\ -3 & 4 & -1\end{pmatrix}$.

21. $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 4\\ -2 & 1 & -3\\ 6 & 0 & 5\end{pmatrix}$; $\quad B=\begin{pmatrix}-5 & 4 & 0\\ 1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & 6\end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 7\\ 1 & 0 & -8\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$; $\quad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -6\\ -1 & 4 & 5\\ 8 & -5 & 3\end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\ 6 & 7 & -1\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$; $\quad B=\begin{pmatrix}0 & -8 & 7\\ 4 & 1 & 5\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

24. $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ -1 & 5 & -4\\ 3 & 8 & 6\end{pmatrix}$; $\quad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -5\\ 0 & 1 & 2\\ -3 & 5 & 6\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 0 & 5 & 7\\ 8 & -3 & 1\end{pmatrix}$; $\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & -5\\ 0 & 4 & 7\end{pmatrix}$.

26. $A=\begin{pmatrix}8 & -3 & 1\\ -1 & 4 & -5\\ 0 & -6 & 2\end{pmatrix}$; $\quad B=\begin{pmatrix}-3 & 9 & -1\\ 4 & -5 & 1\\ 3 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

27. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 & 8 & -9 \\ 2 & 1 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & -7 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & 8 \end{pmatrix}$.

29. $A=\begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

30. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

***Завдання* 2.** Обчислити визначник, використовуючи:

а) метод трикутників;

б) розклад визначника по елементах рядка або стовпця;

в) властивості визначника (зведення визначника до трикутного вигляду).

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$. 5. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$. 6. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 0 & 7 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} -6 & 8 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$. 8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$. 9. $\begin{vmatrix} -8 & 2 & -4 \\ 7 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. 11. $\begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$. 12. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$. 14. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$. 15. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$. 17. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix}$. 18. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$. 20. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$. 21. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$. 23. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ 24. $\begin{vmatrix} -5 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$. 26. $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$. 27. $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$. 29. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$. 30. $\begin{vmatrix} -8 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.

***Завдання* 3**. Розв’язати систему: а) за формулами Крамера; б) за допомогою оберненої матриці (матричним методом); в) методом Гаусса; г) методом Жордана-Гаусса.

1. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=7, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3=6. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=3, \\ x_1+x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=12, \\ x_1+2x_2+4x_3=6, \\ 5x_1+x_2+2x_3=3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=-4, \\ x_1+3x_2-x_3=11, \\ x_1-2x_2+2x_3=-7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=12, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=6, \\ 2x_1-x_2-x_3=-9. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 8x_1+3x_2-6x_3=-4, \\ x_1+x_2-x_3=2, \\ 4x_1+x_2-3x_3=-5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3=9, \\ x_1+x_2-x_3=-2, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=12. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=33, \\ 7x_1-5x_2=24, \\ 4x_1+2x_3=39. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=12, \\ 7x_1-5x_2+x_3=-33, \\ 4x_1+x_3=-7. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=8, \\ 5x_2+4x_3=-20, \\ 3x_1-2x_2+5x_3=-22. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=21, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=9, \\ 2x_1-x_2-x_3=10. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3=5, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=12, \\ x_1-2x_2+3x_3=-1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x_1+x_2+4x_3=19, \\ 2x_1-x_2+2x_3=11, \\ x_1+x_2+2x_3=8. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=0, \\ 4x_1+2x_2+4x_3=6, \\ x_1+x_2+2x_3=4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=8, \\ x_1+x_2+2x_3=11, \\ 4x_1+x_2+4x_3=22. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=-9, \\ x_1+5x_2+x_3=20, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=15. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=0, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=1, \\ x_1+5x_2+3x_3=-3. \end{cases}$

18. $\begin{cases} -3x_1+5x_2+6x_3=-8, \\ 3x_1+x_2+x_3=-4, \\ x_1-4x_2-2x_3=-9. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=-4, \\ -3x_1+5x_2+6x_3=36, \\ x_1-4x_2-2x_3=-19. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=-11, \\ 5x_1+x_2+2x_3=8, \\ x_1+2x_2+4x_3=16. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=9, \\ 5x_1+x_2+2x_3=11, \\ x_1+2x_2+4x_3=19. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4, \\ 2x_1+x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3=1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=12, \\ 2x_1+x_2+x_3=16, \\ 3x_1+2x_2+x_3=8. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=14, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=-16, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=-8. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-2x_3=11, \\ 2x_1-x_2-x_3=4, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1+5x_2-6x_3=-15, \\ 3x_1+x_2+4x_3=13, \\ 2x_1-3x_2+x_3=9. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 4x_1-x_2=-6, \\ 3x_1+2x_2+5x_3=-14, \\ x_1-3x_2+4x_3=-19. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x_1+2x_2-4x_3=-16, \\ x_1+3x_3=-6, \\ 2x_1-3x_2+x_3=9. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=-9, \\ 4x_1-x_2+5x_3=-2, \\ 3x_2-7x_3=-6. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 7x_1+4x_2-x_3=13, \\ 3x_1+2x_2+3x_3=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3=-10. \end{cases}$

***Завдання* 4**. Перевірити на сумісність систему лінійних рівнянь і, у випадку сумісності розв'язати її за загальною схемою.

1. $\begin{cases} 3x_1-5x_2+4x_4=6, \\ x_1-4x_2+x_3-5x_4=2, \\ 3x_1-2x_3+6x_4=5, \\ 2x_1-13x_2+4x_3-12x_4=5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x_1+5x_2-2x_3+3x_4=4, \\ -3x_1+4x_2-2x_3+x_4=5, \\ 7x_1-2x_2+2x_3+3x_4=-7, \\ 4x_1-9x_2+4x_3-4x_4=-9. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 4x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ -x_1 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ -5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 = -8. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = -3, \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 6x_1 + 6x_2 + 9x_3 - 13x_4 = -2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ -7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -9, \\ 4x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 8. \end{cases}$

7. $\begin{cases} -5x_1 + x_2 - x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ -7x_1 - 1x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -4, \\ 5x_1 - 2x_2 + 11x_3 + 7x_4 = 6, \\ -5x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 6x_4 = 7. \end{cases}$

9. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 5, \\ 2x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - 1x_2 + 10x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$

10. $\begin{cases} -x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -5, \\ -4x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -3, \\ 10x_1 + 9x_2 + 11x_3 - 3x_4 = -1, \\ 5x_1 - 7x_2 + 7x_3 - x_4 = 8. \end{cases}$

11. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 2, \\ 7x_1 - 5x_3 + x_4 = 2, \\ 6x_1 - 5x_2 + 10x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$

13. $\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ -3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4, \\ 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 7. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ -7x_1 + 6x_2 + 11x_3 - 3x_4 = 1, \\ 4x_1 + 8x_2 - 7x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_2 + 2x_3 - x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ 5x_1 + 6x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ -7x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 - x_4 = -6. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 9, \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} -x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4, \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 7x_1 + 8x_2 + x_3 + x_4 = -7, \\ -4x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 9. \end{cases}$

19. $\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - 5x_2 - 2x_4 = 3, \\ -5x_1 + 9x_2 - 6x_3 + 6x_4 = 3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 2x_4 = -4, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -5, \\ 7x_1 + 2x_2 + 9x_3 - x_4 = -7, \\ 6x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 9. \end{cases}$

21. $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 4x_4 = -6. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5, \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 8x_1 - 7x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 1, \\ x_1 - 9x_2 - 6x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$

23. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_4 = 2, \\ 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -9. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -5, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = -4, \\ 7x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ -6x_1 + 9x_2 - 5x_3 - x_4 = 9. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 1x_3 + x_4 = 3, \\ -2x_1 + x_2 + 5x_4 = -4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 8. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 5, \\ 7x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 9, \\ 4x_1 + 9x_2 - 5x_3 - x_4 = 8. \end{cases}$

27. $\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ 3x_1 - 2x_3 + 2x_4 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ -7x_1 + 5x_2 - 5x_3 - x_4 = 1, \\ 6x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -3. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_4 = 2, \\ -8x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 8x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -5. \end{cases}$

***Завдання* 5**. Знайти загальний розв’язок однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

1. $\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=0, \\ x_1-3x_2+x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_1+5x_2+2x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0, \\ 5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6x_1-9x_2+21x_3-3x_4-12x_5=0, \\ -4x_1+6x_2-14x_3+2x_4+8x_5=0, \\ 2x_1-3x_2+7x_3-x_4-4x_5=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1-10x_2-3x_3+2x_4-x_5=0, \\ 4x_1+19x_2-4x_3-5x_4-x_5=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x_1-2x_2+3x_3-4x_4-x_5=0, \\ x_1+4x_2-3x_3+2x_4-5x_5=0, \\ 6x_1+2x_2-2x_4-6x_5=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 12x_1-x_2+7x_3+11x_4-x_5=0, \\ 24x_1-2x_2+14x_3+22x_4-2x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5=0, \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4-5x_5=0, \\ x_1+3x_2-x_3-6x_4-x_5=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_4-x_5=0, \\ x_1+5x_2-x_3+x_4+2x_5=0, \\ x_1+16x_2-6x_3+4x_4+7x_5=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3-2x_4=0, \\ 5x_1-3x_2-3x_3 \quad =0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 8x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2-2x_3+x_4-3x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3-2x_4+5x_5=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+12x_4-x_5=0, \\ 2x_1-2x_2+x_3-10x_4+x_5=0, \\ 3x_1+x_2+2x_4=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 7x_1-14x_2+3x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1-2x_2+x_3-3x_4+7x_5=0, \\ 5x_1-10x_2+x_3+5x_4-13x_5=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-5x_3-3x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-2x_2+3x_3+2x_4-x_5=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4-2x_5=0, \\ x_1+2x_2+5x_3-2x_4-x_5=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3+x_4-x_5=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4+2x_5=0, \\ x_1-2x_2+5x_3-2x_4-3x_5=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+10x_4-x_5=0, \\ x_1-x_2+3x_3-10x_4+x_5=0, \\ x_1+6x_2-9x_3+30x_4-3x_5=0. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+7x_4+5x_5=0, \\ x_1-2x_2+3x_3-5x_4-7x_5=0, \\ 3x_1-x_2-2x_3+2x_4-2x_5=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0, \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0, \\ x_1+11x_2-12x_3-34x_4-5x_5=0, \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3+9x_4-5x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0. \end{cases}$ 22. $\begin{cases} 5x_1+2x_2-x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 3x_1+x_2-2x_3+3x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+3x_2-2x_3+4x_4+7x_5=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3-x_4+4x_5=0, \\ 7x_1+5x_2-3x_3-2x_4+x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3-7x_5=0. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 6x_1+3x_2-2x_3+4x_4+7x_5=0, \\ 7x_1+4x_2-3x_3+2x_4+4x_5=0, \\ x_1+x_2-x_3-2x_4-3x_5=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=0, \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=0, \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=0. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=0, \\ x_1+x_2+5x_3-5x_4+6x_5=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=0, \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=0, \\ x_1+2x_2+11x_3-6x_4+x_5=0. \end{cases}$ 28. $\begin{cases} 6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=0, \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+16x_3+x_4+6x_5=0. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0, \\ x_1-2x_2-3x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1-x_2-2x_3+3x_4=0. \end{cases}$

***Завдання* 6.** Довести, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\vec{d}$ у цьому базисі.

1. $\vec{a}=(5,4,1)$, $\vec{b}=(-3,5,2)$, $\vec{c}=(2,-1,3)$, $\vec{d}=(7,23,4)$.

2. $\vec{a}=(2,-1,4)$, $\vec{b}=(-3,0,-2)$, $\vec{c}=(4,5,-3)$, $\vec{d}=(0,11,-14)$.

3. $\vec{a}=(-1,1,2)$, $\vec{b}=(2,-3,-5)$, $\vec{c}=(-6,3,-1)$, $\vec{d}=(28,-19,-7)$.

4. $\vec{a}=(1,3,4)$, $\vec{b}=(-2,5,0)$, $\vec{c}=(3,-2,-4)$, $\vec{d}=(13,-5,-4)$.

5. $\vec{a}=(1,-1,1)$, $\vec{b}=(-5,-3,1)$, $\vec{c}=(2,-1,0)$, $\vec{d}=(-15,-10,5)$.

6. $\vec{a}=(3,1,2)$, $\vec{b}=(-7,-2,-4)$, $\vec{c}=(-4,0,3)$, $\vec{d}=(16,6,15)$.

7. $\vec{a}=(-3,0,1)$, $\vec{b}=(2,7,-3)$, $\vec{c}=(-4,3,5)$, $\vec{d}=(-16,33,13)$.

8. $\vec{a}=(5,1,2)$, $\vec{b}=(-2,1,-3)$, $\vec{c}=(4,-3,5)$, $\vec{d}=(15,-15,24)$.

9. $\vec{a}=(0,2,-3)$, $\vec{b}=(4,-3,-2)$, $\vec{c}=(-5,4,0)$, $\vec{d}=(-19,-5,-4)$.

10. $\vec{a}=(3,-1,2)$, $\vec{b}=(-2,3,1)$, $\vec{c}=(4,-5,-3)$, $\vec{d}=(-3,2,-3)$.

11. $\vec{a}=(5,3,1)$, $\vec{b}=(-1,2,-3)$, $\vec{c}=(3,-4,2)$, $\vec{d}=(-9,34,-20)$.

12. $\vec{a}=(3,1,-3)$, $\vec{b}=(-2,4,1)$, $\vec{c}=(1,-2,5)$, $\vec{d}=(1,12,-20)$.

13. $\vec{a}=(6,1,-3)$, $\vec{b}=(-3,2,1)$, $\vec{c}=(-1,-3,4)$, $\vec{d}=(15,6,-17)$.

14. $\vec{a}=(4,2,3)$, $\vec{b}=(-3,1,-8)$, $\vec{c}=(2,-4,5)$, $\vec{d}=(-12,14,-31)$.

15. $\vec{a}=(-2,1,3)$, $\vec{b}=(3,-6,2)$, $\vec{c}=(-5,-3,-1)$, $\vec{d}=(31,-6,22)$.

16. $\vec{a}=(1,3,6)$, $\vec{b}=(-3,4,-5)$, $\vec{c}=(1,-7,2)$, $\vec{d}=(-2,17,5)$.

17. $\vec{a}=(7,2,1)$, $\vec{b}=(5,1,-2)$, $\vec{c}=(-3,4,5)$, $\vec{d}=(26,11,1)$.

18. $\vec{a}=(3,5,4)$, $\vec{b}=(-2,7,-5)$, $\vec{c}=(6,-2,1)$, $\vec{d}=(6,-9,22)$.

19. $\vec{a}=(5,3,2)$, $\vec{b}=(2,-5,1)$, $\vec{c}=(-7,4,-3)$, $\vec{d}=(36,1,15)$.

20. $\vec{a}=(11,1,2)$, $\vec{b}=(-3,3,4)$, $\vec{c}=(-4,-2,7)$, $\vec{d}=(-5,11,-15)$.

21. $\vec{a}=(9,5,3)$, $\vec{b}=(-3,2,1)$, $\vec{c}=(4,-7,4)$, $\vec{d}=(-10,-13,8)$.

22. $\vec{a}=(7,2,1)$, $\vec{b}=(3,-5,6)$, $\vec{c}=(-4,3,-4)$, $\vec{d}=(-1,18,-16)$.

23. $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(-5,3,-1)$, $\vec{c}=(-6,4,5)$, $\vec{d}=(-4,11,20)$.

24. $\vec{a}=(-2,5,1)$, $\vec{b}=(3,2,-7)$, $\vec{c}=(4,-3,2)$, $\vec{d}=(-4,22,-13)$.

25. $\vec{a}=(3,1,2)$, $\vec{b}=(-4,3,-1)$, $\vec{c}=(2,3,4)$, $\vec{d}=(14,14,20)$.

26. $\vec{a}=(3,-1,2)$, $\vec{b}=(-2,4,1)$, $\vec{c}=(4,-5,-1)$, $\vec{d}=(-5,11,1)$.

27. $\vec{a}=(4,5,1)$, $\vec{b}=(1,3,1)$, $\vec{c}=(-3,-6,7)$, $\vec{d}=(19,33,0)$.

28. $\vec{a}=(1,-3,1)$, $\vec{b}=(-2,-4,3)$, $\vec{c}=(0,-2,3)$, $\vec{d}=(-8,-10,13)$.

29. $\vec{a}=(5,7,-2)$, $\vec{b}=(-3,1,3)$, $\vec{c}=(1,-4,6)$, $\vec{d}=(14,9,-1)$.

30. $\vec{a}=(-1,4,3)$, $\vec{b}=(3,2,-4)$, $\vec{c}=(-2,-7,1)$, $\vec{d}=(6,20,-3)$.

***Завдання* 7.** Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Необхідно:

а) обчислити модуль та напрямні косинуси векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) знайти вектор $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$;

в) обчислити скалярний добуток $\vec{a}\vec{b}$ та косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

г) обчислити векторний добуток $\vec{b}\times\vec{c}$ та площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{b}$ і $\vec{c}$;

д) обчислити мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ та об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$;

е) знайти значення параметра α при якому вектори $\vec{a}$ і $\vec{e}=(\alpha,2,-3)$ ортогональні;

є) знайти значення параметрів β і γ при яких вектори $\vec{b}$ і $\vec{f}=(\beta,\gamma,2)$ колінеарні.

1. $\vec{a}=(2,-3,1)$, $\vec{b}=(0,1,4)$, $\vec{c}=(5,2,-3)$;

2. $\vec{a}=(3,4,1)$, $\vec{b}=(1,-2,7)$, $\vec{c}=(3,-6,21)$;

3. $\vec{a}=(2,-4,-2)$, $\vec{b}=(7,3,1)$, $\vec{c}=(3,5,-7)$;

4. $\vec{a}=(-7,0,2)$, $\vec{b}=(2,-6,4)$, $\vec{c}=(1,-3,2)$;

5. $\vec{a}=(-4,2,-1)$, $\vec{b}=(3,5,-2)$, $\vec{c}=(0,1,5)$;

6. $\vec{a}=(3,-2,1)$, $\vec{b}=(0,2,-3)$, $\vec{c}=(-3,2,-1)$;

7. $\vec{a}=(4,-1,3)$, $\vec{b}=(2,3,-5)$, $\vec{c}=(7,2,4)$;

8. $\vec{a}=(4,2,-3)$, $\vec{b}=(2,0,1)$, $\vec{c}=(-12,-6,9)$;

9. $\vec{a}=(-1,0,5)$, $\vec{b}=(-3,2,2)$, $\vec{c}=(-2,-4,1)$;

10. $\vec{a}=(6,-4,6)$, $\vec{b}=(9,-6,9)$, $\vec{c}=(1,0,-8)$;

11. $\vec{a}=(5,-3,4)$, $\vec{b}=(2,-4,-2)$, $\vec{c}=(3,5,-7)$;

12. $\vec{a}=(-4,3,-7)$, $\vec{b}=(4,6,-2)$, $\vec{c}=(6,9,-3)$;

13. $\vec{a}=(-5,2,-2)$, $\vec{b}=(7,0,-5)$, $\vec{c}=(2,3,-2)$;

14. $\vec{a}=(-4,-6,2)$, $\vec{b}=(2,3,-1)$, $\vec{c}=(-1,5,-3)$;

15. $\vec{a}=(-4,2,-3)$, $\vec{b}=(0,-3,5)$, $\vec{c}=(6,6,-4)$;

16. $\vec{a}=(-3,8,0)$, $\vec{b}=(2,3,-2)$, $\vec{c}=(8,12,-8)$;

17. $\vec{a}=(2,-4,-2)$, $\vec{b}=(-9,0,2)$, $\vec{c}=(3,5,-7)$;

18. $\vec{a}=(9,-3,1)$, $\vec{b}=(3,-15,21)$, $\vec{c}=(1,-5,7)$;

19. $\vec{a}=(-2,4,-3)$, $\vec{b}=(5,1,-2)$, $\vec{c}=(7,4,-1)$;

20. $\vec{a}=(-9,4,-5)$, $\vec{b}=(1,-2,4)$, $\vec{c}=(-5,10,-30)$;

21. $\vec{a} = (2,-7,5)$, $\vec{b} = (-1,2,-6)$, $\vec{c} = (3,2,-4)$;

22. $\vec{a} = (7,-4,-5)$, $\vec{b} = (1,-11,3)$, $\vec{c} = (5,5,3)$;

23. $\vec{a} = (4,-6,-2)$, $\vec{b} = (-2,3,1)$, $\vec{c} = (3,-5,7)$;

24. $\vec{a} = (3,-1,2)$, $\vec{b} = (-1,5,-4)$, $\vec{c} = (6,-2,4)$;

25. $\vec{a} = (-3,-1,-5)$, $\vec{b} = (2,-4,8)$, $\vec{c} = (3,7,-1)$;

26. $\vec{a} = (-3,2,7)$, $\vec{b} = (1,0,-5)$, $\vec{c} = (6,4,-1)$;

27. $\vec{a} = (3,-1,5)$, $\vec{b} = (2,-4,6)$, $\vec{c} = (1,-2,3)$;

28. $\vec{a} = (4,-5,-4)$, $\vec{b} = (5,-1,4)$, $\vec{c} = (2,4,-3)$;

29. $\vec{a} = (-9,0,4)$, $\vec{b} = (2,-4,6)$, $\vec{c} = (3,-6,9)$;

30. $\vec{a} = (5,-6,-4)$, $\vec{b} = (4,8,-7)$, $\vec{c} = (0,3,-4)$.

***Завдання* 8.** Вершини піраміди знаходяться в точках $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ і $D(x_4, y_4, z_4)$. Обчислити: а) довжину вказаного ребра; б) площу перерізу, який проходить через середину ребра l і дві вершини піраміди; в) об'єм піраміди $ABCD$.

1. $A(3,4,5), B(1,2,1), C(-2,-3,6), D(3,-6,-3)$;

   а) AC; б) $l = AB$, C і D.

2. $A(-7,-5,6), B(-2,5,-3), C(3,-2,4), D(1,2,2)$;

   а) BC; б) $l = CD$, A і B.

3. $A(1,3,1), B(-1,4,6), C(-2,-3,4), D(3,4,-4)$;

   а) AC; б) $l = BC$, A і D.

4. $A(2,4,1), B(-3,-2,4), C(3,5,-2), D(4,2,-3)$;

а) AB; б) $l = AC$, B і D.

5. $A(-5,-3,-4), B(1,4,6), C(3,2,-2), D(8,-2,4)$;

а) AC; б) $l = BC$, A і D.

6. $A(3,4,2), B(-2,3,-5), C(4,-3,6), D(6,-5,3)$;

а) BD; б) $l = BD$, A і C.

7. $A(-4,6,3), B(3,-5,1), C(2,6,-4), D(2,4,-5)$;

а) AD; б) $l = AD$, B і C.

8. $A(7,5,8), B(-4,-5,3), C(2,-3,5), D(5,1,-4)$;

а) BD; б) $l = BC$, A і D.

9. $A(3,-2,6), B(-6,-2,3), C(1,1,-4), D(4,6,-7)$;

а) AB; б) $l = BD$, A і C.

10. $A(-5,-4,-3), B(7,3,-1), C(6,-2,0), D(3,2,-7)$;

а) BC; б) $l = AD$, B і C.

11. $A(3,-5,-2), B(-4,2,3), C(1,5,7), D(-2,-4,5)$;

а) AC; б) $l = BD$, A і C.

12. $A(7,4,9), B(1,-2,-3), C(-5,-3,0), D(1,-3,4)$;

а) AD; б) $l = AB$, C і D.

13. $A(-4,-7,-3), B(-4,-5,7), C(2,-3,3), D(3,2,1)$;

а) CD; б) $l = BC$, A і D.

14. $A(-4,-5,-3), B(3,1,2), C(5,7,-6), D(6,-1,5)$;

а) AC; б) $l = BC$, A і D.

15. $A(5,2,4), B(-3,5,-7), C(1,-5,8), D(9,-3,5)$;

а) AB; б) $l = BD$, A і C.

16. $A(-6,4,5), B(5,-7,3), C(4,2,-8), D(2,8,-3)$;

а) AD; б) $l = AD$, B і C.

17. $A(5,3,6), B(-3,-4,4), C(5,-6,8), D(4,0,-3)$;

а) BC; б) $l = BC$, A і D.

18. $A(5,-4,4), B(-4,-6,5), C(3,2,-7), D(6,2,-9)$;

а) AD; б) $l = BD$, A і C.

19. $A(-7,-6,-5), B(5,1,-3), C(8,-4,0), D(3,4,-7)$;

а) BD; б) $l = AD$, B і C.

20. $A(7,-1,-2), B(1,7,8), C(3,7,9), D(-3,-5,2)$;

а) AC; б) $l = BD$, A і C.

21. $A(5,2,7), B(7,-6,-9), C(-7,-6,-3), D(1,-5,2)$;

а) AB; б) $l = AB$, C і D.

22. $A(-2,-5,1), B(-6,-7,9), C(4,-5,1), D(2,1,4)$;

а) BC; б) $l = BC$, A і D.

23. $A(-6,-3,5), B(5,1,7), C(3,5,-1), D(4,-2,9)$;

а) AC; б) $l = BC$, A і D.

24. $A(7,4,2), B(-5,3,-9), C(1,-5,3), D(7,-9,1)$;

а) AD; б) $l = BD$, A і C.

25. $A(-8,2,7), B(3,-5,9), C(2,4,-6), D(4,6,-5)$;

а) CD; б) $l = AD$, B і C.

26. $A(4,3,1), B(2,7,5), C(-4,-2,4), D(2,-3,-5)$;

а) AC; б) $l = AB$, C і D.

27. $A(-9,-7,4), B(-4,3,-1), C(5,-4,2), D(3,4,4)$;

а) CD; б) $l = CD$, A і B.

28. $A(3,5,3), B(-3,2,8), C(-3,-2,6), D(7,8,-2)$;

а) AD; б) $l = BD$, A і C.

29. $A(4,2,3), B(-5,-4,2), C(5,7,-4), D(6,4,-7)$;

а) BD; б) $l = AD$, B і C.

30. $A(-4,-2,-3), B(2,5,7), C(6,3,-1), D(6,-4,1)$;

а) AC; б) $l = BC$, A і D.

***Завдання* 9.** Задано вершини трикутника ABC:
$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$. Знайти:

а) рівняння сторони AB;

б) рівняння висоти CH;

в) рівняння та довжину медіани AM;

г) точку N перетину медіани AM та висоти CH;

д) рівняння прямої, яка проходить через точку N паралельно до сторони AB;

е) відстань від точки C до прямої AB (довжину висоти CH).

1. $A(-2,4)$, $B(3,1)$, $C(10,7)$.
2. $A(-3,-2)$, $B(14,4)$, $C(6,8)$.
3. $A(1,7)$, $B(-3,-1)$, $C(11,-3)$.
4. $A(1,0)$, $B(-1,4)$, $C(9,5)$.
5. $A(1,-2)$, $B(7,1)$, $C(3,7)$.
6. $A(-2,-3)$, $B(1,6)$, $C(6,1)$.
7. $A(-4,2)$, $B(-6,6)$, $C(6,2)$.
8. $A(4,-3)$, $B(7,3)$, $C(1,10)$.
9. $A(4,-4)$, $B(8,2)$, $C(3,8)$.
10. $A(-3,-3)$, $B(5,-7)$, $C(7,7)$.
11. $A(1,-6)$, $B(3,4)$, $C(-3,3)$.
12. $A(-4,2)$, $B(8,-6)$, $C(2,6)$.
13. $A(-5,2)$, $B(0,-4)$, $C(-5,7)$.
14. $A(4,-4)$, $B(6,2)$, $C(-1,8)$.

15. $A(-3,8)$, $B(-6,2)$, $C(0,-5)$.
16. $A(6,-9)$, $B(10,-1)$, $C(-4,1)$.
17. $A(4,1)$, $B(-3,-1)$, $C(7,-3)$.
18. $A(-4,2)$, $B(6,-4)$, $C(4,10)$.
19. $A(3,-1)$, $B(11,3)$, $C(-6,2)$.
20. $A(-7,-2)$, $B(-7,4)$, $C(5,-5)$.
21. $A(-1,-4)$, $B(9,6)$, $C(-5,4)$.
22. $A(10,-2)$, $B(4,-5)$, $C(-3,1)$.
23. $A(-3,-1), B(-4,-5), C(8,1)$.
24. $A(-2,-6)$, $B(-3,5)$, $C(4,0)$.
25. $A(-7,-2), B(3,8), C(-4,6)$.
26. $A(0,2)$, $B(-7,-4)$, $C(3,2)$.
27. $A(7,0)$, $B(1,4)$, $C(-8,-4)$.
28. $A(1,-3)$, $B(0,7)$, $C(-2,4)$.
29. $A(-5,1)$, $B(8,-2)$, $C(1,4)$.
30. $A(2,5)$, $B(-3,1)$, $C(0,4)$.

***Завдання* 10.** Задано чотири точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$; $A_2(x_2, y_2, z_2)$; $A_3(x_3, y_3, z_3)$; $A_4(x_4, y_4, z_4)$. Знайти:

а) рівняння площини $A_1A_2A_3$;

б) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$;

в) рівняння площини, яка проходить через точку A_4 перпендикулярно до прямої A_1A_2;

г) косинус кута між координатною площиною Oxy і площиною $A_1A_2A_3$;

д) рівняння прямої A_1A_2;

е) рівняння прямої A_4M перпендикулярної до площини $A_1A_2A_3$ та точку перетину вказаних прямої і площини;

є) рівняння прямої A_3N паралельної до прямої A_1A_2;

ж) синус кута між прямою A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

1. $A_1(3,1,4)$; $A_2(-1,6,1)$; $A_3(-1,1,6)$; $A_4(0,4,-1)$.

2. $A_1(3,-1,2)$; $A_2(-1,0,1)$; $A_3(1,7,3)$; $A_4(8,5,8)$.

3. $A_1(3,5,4)$; $A_2(5,8,3)$; $A_3(1,2,-2)$; $A_4(-1,0,2)$.

4. $A_1(2,4,3)$; $A_2(1,1,5)$; $A_3(4,9,3)$; $A_4(3,6,7)$.

5. $A_1(9,5,5)$; $A_2(-3,7,1)$; $A_3(5,7,8)$; $A_4(6,9,2)$.

6. $A_1(0,7,1)$; $A_2(2,-1,5)$; $A_3(1,6,3)$; $A_4(3,-9,8)$.

7. $A_1(5,5,4)$; $A_2(1,-1,4)$; $A_3(3,5,1)$; $A_4(5,8,-1)$.

8. $A_1(6,1,1)$; $A_2(4,6,6)$; $A_3(4,2,0)$; $A_4(1,2,6)$.

9. $A_1(7,5,3)$; $A_2(9,4,4)$; $A_3(4,5,7)$; $A_4(7,9,6)$.

10. $A_1(6,8,2)$; $A_2(5,4,7)$; $A_3(2,4,7)$; $A_4(7,3,7)$.

11. $A_1(4,2,5)$; $A_2(0,7,1)$; $A_3(0,2,7)$; $A_4(1,5,0)$.

12. $A_1(4,4,0)$; $A_2(7,0,2)$; $A_3(2,8,4)$; $A_4(9,6,9)$.

13. $A_1(4,6,5)$; $A_2(6,9,4)$; $A_3(2,10,10)$; $A_4(7,5,9)$.

14. $A_1(3,5,4)$; $A_2(8,7,4)$; $A_3(5,10,4)$; $A_4(4,7,8)$.

15. $A_1(10,9,6)$; $A_2(2,8,2)$; $A_3(9,8,9)$; $A_4(7,10,3)$.

16. $A_1(1,8,2)$; $A_2(5,2,6)$; $A_3(5,7,4)$; $A_4(4,10,9)$.

17. $A_1(6,6,5)$; $A_2(4,9,5)$; $A_3(4,6,11)$; $A_4(6,9,3)$.

18. $A_1(7,2,2)$; $A_2(-5,7,-7)$; $A_3(5,-3,1)$; $A_4(2,3,7)$.

19. $A_1(8,-6,4)$; $A_2(10,5,-5)$; $A_3(5,6,-8)$; $A_4(8,10,7)$.

20. $A_1(1,-1,3)$; $A_2(6,5,8)$; $A_3(3,5,8)$; $A_4(8,4,1)$.

21. $A_1(1,-2,7)$; $A_2(4,2,10)$; $A_3(2,3,5)$; $A_4(5,3,7)$.

22. $A_1(4,2,10)$; $A_2(1,2,0)$; $A_3(3,5,7)$; $A_4(2,-3,5)$.

23. $A_1(2,3,5)$; $A_2(5,3,-7)$; $A_3(1,2,7)$; $A_4(4,2,0)$.

24. $A_1(5,3,7)$; $A_2(-2,3,5)$; $A_3(4,2,10)$; $A_4(1,2,7)$.

25. $A_1(4,3,5)$; $A_2(1,9,7)$; $A_3(0,2,0)$; $A_4(5,3,10)$.

26. $A_1(3,2,5)$; $A_2(4,0,6)$; $A_3(2,6,5)$; $A_4(6,4,-1)$.

27. $A_1(2,1,6)$; $A_2(1,4,9)$; $A_3(2,-5,8)$; $A_4(5,4,2)$.

28. $A_1(2,1,7)$; $A_2(3,3,6)$; $A_3(2,-3,9)$; $A_4(1,2,5)$.

29. $A_1(2,-1,7)$; $A_2(6,3,1)$; $A_3(3,2,8)$; $A_4(2,-3,7)$.

30. $A_1(0,4,5)$; $A_2(3,-2,1)$; $A_3(4,5,6)$; $A_4(3,3,2)$.

***Завдання* 11.** Скласти канонічне рівняння: а) еліпса; б) гіперболи; в) параболи (A, B – точки, які лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

1. а) $b = 15,\quad F(-10,0)$; б) $a = 13,\quad \varepsilon = \dfrac{14}{13}$; в) $D:\ x = -4$.

2. а) $b = 2,\quad F(4\sqrt{2},0)$; б) $a = 7,\quad \varepsilon = \dfrac{\sqrt{85}}{7}$; в) $D:\ x = 5$.

3. а) $A(3,0), B(2,\dfrac{\sqrt{5}}{3})$; б) $k = \dfrac{3}{4},\quad \varepsilon = \dfrac{5}{4}$; в) $D:\ y = -2$.

4. а) $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{21}}{5},\quad A(-5,0)$; б) $A(\sqrt{80},3), B(4\sqrt{6}, 3\sqrt{2})$; в) $D: y = 1$.

5. а) $2a = 22, \varepsilon = \dfrac{\sqrt{57}}{11}$; б) $k = \dfrac{2}{3}, 2c = 10\sqrt{13}$; в) вісь симетрії Ox і $A(27,9)$.

6. а) $b = \sqrt{15}, \varepsilon = \dfrac{\sqrt{10}}{25}$; б) $k = \dfrac{3}{4}, 2a = 16$; в) вісь симетрії Ox і $A(4,-8)$.

7. а) $a=4, F=(3{,}0)$; б) $b=2\sqrt{10}, F(-11{,}0)$; в) $D:\ x=-2$.

8. а) $b=4, F=(9{,}0)$; б) $a=5, \quad \varepsilon=\frac{7}{5}$; в) $D: x=6$.

9. а) $A(0;\sqrt{3}), B(\sqrt{\frac{14}{3}};1)$; б) $k=\frac{\sqrt{21}}{10}, \quad \varepsilon=\frac{11}{10}$; в) $D: y=-4$.

10. а) $\varepsilon=\frac{7}{8}, A(8{,}0)$; б) $A(3,-\sqrt{\frac{3}{5}}), B(\sqrt{\frac{13}{5}},6)$; в) $D: y=4$.

11. а) $2a=24, \varepsilon=\frac{\sqrt{22}}{6}$; б) $k=\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad 2c=10$; в) вісь симетрії Ox і $A(-7{,}7)$.

12. а) $b=2, \quad \varepsilon=\frac{5\sqrt{29}}{29}$; б) $k=\frac{12}{13}, 2a=26$; в) вісь симетрії Ox і $A(-5{,}15)$.

13. а) $a=6, F(-4{,}0)$; б) $b=3, F(7{,}0)$; в) $D: x=-7$.

14. а) $b=7, F(5{,}0)$; б) $a=11, \quad \varepsilon=\frac{12}{11}$; в) $D: x=10$.

15. а) $A(-\sqrt{\frac{17}{3}},\frac{1}{3}), \quad B(\frac{\sqrt{21}}{2},\frac{1}{2})$; б) $k=\frac{1}{2}, \quad \varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{2}$;

16. а) $\varepsilon=3/5, \quad A(0{,}8)$; б) $A(\sqrt{6},0), B(-2\sqrt{2},1)$; в) $D: y=9$.

17. а) $2a=22, \quad \varepsilon=\frac{10}{11}$; б) $k=\frac{\sqrt{11}}{5}, \quad 2c=12$; в) вісь симетрії Ox і $A(-7{,}5)$.

18. а) $b=5, \quad \varepsilon=\frac{12}{13}$; б) $k=\frac{1}{3}, \quad 2a=6$; в) вісь симетрії Oy і $A(-9{,}6)$.

19. а) $a=9,\quad F(7,0)$; б) $b=6,\quad F(12,0)$; в) $D: x=-\dfrac{1}{4}$.

20. а) $b=5,\quad F(-10,0)$; б) $a=9,\quad \varepsilon=4/3$; в) $D: x=12$.

21. а) $A(0,-2),\quad B(\dfrac{\sqrt{15}}{2},1)$; б) $k=\dfrac{2\sqrt{10}}{9},\quad \varepsilon=\dfrac{11}{9}$; в) $D: y=5$.

22. а) $\varepsilon=\dfrac{2}{3},\quad A(-6,0)$; б) $A(\sqrt{8},0),\quad B(\dfrac{120}{3},2)$; в) $D: y=1$.

23. а) $2a=50,\quad \varepsilon=\dfrac{3}{5}$; б) $k=\dfrac{\sqrt{29}}{14},\quad 2c=30$; в) $F(0,-3)$.

24. а) $b=2\sqrt{15},\quad \varepsilon=\dfrac{7}{8}$; б) $k=\dfrac{5}{6},\quad 2a=12$; в) $F(-5,0)$.

25. а) $a=13,\quad F(-5,0)$; б) $b=44,\quad F(-7,0)$; в) $D: x=-\dfrac{3}{8}$.

26. а) $b=7,\quad F(13,0)$; б) $b=4,\quad F(-11,0)$; в) $D: x=13$.

27. а) $A(-3,0),\quad B(1,\dfrac{\sqrt{40}}{3})$; б) $k=\sqrt{\dfrac{2}{3}},\quad \varepsilon=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$; в) $D: y=4$.

28. а) $\varepsilon=\dfrac{5}{6},\quad A(0,-11)$; б) $A(\sqrt{\dfrac{32}{3}},1),\quad B(\sqrt{8},0)$; в) $D: y=-3$.

29. а) $2a=30,\quad \varepsilon=\dfrac{17}{15}$; б) $k=\dfrac{\sqrt{17}}{8},\quad 2c=18$; в) вісь симетрії Oy і $A(4,-10)$.

30. а) $b=2\sqrt{2},\quad \varepsilon=\dfrac{7}{9}$; б) $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\quad 2a=12$; в) вісь симетрії Oy і $A(-45,15)$.

***Завдання* 12.** Привести до канонічного вигляду рівняння лінії другого порядку. Зобразити дану лінію графічно.

1) $9x^2-4y^2+2x-4y-36=0$. 2) $x^2-7x-6y+10=0$.

3) $x^2-2y^2+2x-2y-4=0$. 4) $x^2-3y^2+x-2y-12=0$.

5) $x^2+4y^2-12x+4y-9=0$. 6) $2x^2+4y^2+8x-8y+4=0$.

7) $x^2+25y^2-2x-2y=0$. 8) $4x^2-8y^2-4y-32=0$.

9) $3x^2+2y^2-4x-8=0$. 10) $5x^2+8y^2-27=0$.

11) $2x^2+10y^2+12x+4y-1=0$. 12) $2x^2+2y^2-4x+6y+3=0$.

13) $x^2-2y^2+6y-5=0$. 14) $15x^2+9y^2+2x-16=0$.

15) $3x^2+y^2-4y+12=0$. 16) $4x^2-y^2+2x-4y-12=0$.

17) $2x^2+y^2+2x-4=0$. 18) $5x^2-3y^2+3x-4y-12=0$.

19) $x^2-7x-6y+10=0$. 20) $3x^2-9x+2y+12=0$.

21) $4x^2-8x-4y-32=0$. 22) $5x^2+5y^2+x-2y-12=0$.

23) $x^2+5y^2-x-y-12=0$. 24) $x^2+27y^2+2x-26=0$.

25) $4x^2+11y^2+x-y-20=0$. 26) $3x^2-y^2-2y-24=0$.

27) $x^2+2y^2+2x-2y-4=0$. 28) $6x^2+5y^2+2x-y-1=0$.

29) $x^2+2y^2+3x-2y-12=0$. 30) $6x^2+5y^2+2x-y-1=0$.

***Завдання* 13.** Записати канонічне рівняння і визначити тип поверхні. Схематично зобразити цю поверхню в прямокутній декартовій системі координат.

1) $4x^2+3y^2=12x$. 2) $2x^2+3y^2-z^2=36$.

3) $9x^2-6y^2-6z^2+1=0$. 4) $4x^2+5y^2-10z^2=60$.

5) $3x^2+12y^2+4z^2=48$. 6) $4x^2-y^2-3z^2=12$.

7) $-3x^2+6y^2-z^2-18=0$.

8) $y^2+8z^2=20x^2$.

9) $-7x^2+14y^2-z^2+21=0$.

10) $6x^2+y^2+6z^2-18=0$.

11) $5x^2-y^2-15z^2+15=0$.

12) $6x^2+y^2-3z^2=0$.

13) $-16x^2+y^2+4z^2-32=0$.

14) $6x^2-y^2+3z^2-12=0$.

15) $2y=x^2+4z^2$.

16) $x^2-7y^2-14z^2-21=0$.

17) $4z^2-3y^2-5x^2+60=0$.

18) $5x^2+2y^2=10x$.

19) $2x^2+3y^2-z^2=36$.

20) $4x^2-5y^2-5z^2+40=0$.

21) $y^2+8z^2=20x^2$.

22) $4x^2+6y^2-24z^2=96$.

23) $4x^2+9y^2+36z^2=72$.

24) $7x^2-3y^2-z^2=21$.

25) $x^2-6y^2+z^2=0$.

26) $4x^2-8y^2+z^2+24=0$.

27) $9x^2-+6y^2-6z^2+1=0$.

28) $3x^2+y^2+9z^2-9=0$.

29) $-x^2+4y^2-16z^2+16=0$.

30) $3x^2+y^2+9z^2-9=0$.

***Завдання* 14.** Задано два комплексних числа: z_1; z_2.

а) Знайти z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; z_1/z_2.

б) Записати число z_1 в тригонометричній та показниковій формі.

1) $z_1=2+3i$; $z_2=-1+4i$.

2) $z_1=-2+2i$; $z_2=i$.

3) $z_1=5+5i$; $z_2=i$.

4) $z_1=i$; $z_2=-1-i\sqrt{3}$.

5) $z_1=-i$; $z_2=-1-i\sqrt{3}$.

6) $z_1=-1-i\sqrt{3}$; $z_2=1$.

7) $z_1=1+i$; $z_2=i$.

8) $z_1=-1+i$; $z_2=-i$.

9) $z_1=-1+i$; $z_2=i$.

10) $z_1=-\sqrt{3}+i$; $z_2=-1-i\sqrt{3}$.

11) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}; \quad z_2 = -i$. 12) $z_1 = 3 - 2i; \quad z_2 = i$.

13) $z_1 = -3 + 2i; \quad z_2 = \sqrt{3} - i$. 14). $z_1 = 3 + 2i; \quad z_2 = i$.

15) $z_1 = -3 - 2i; \quad z_2 = -3 + 4i$. 16) $z_1 = \sqrt{3} - i; \quad z_2 = 3 - 4i$.

17) $z_1 = 3 - 4i; \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3}$. 18) $z_1 = -3 - 2i; \quad z_2 = i + 1$.

19). $z_1 = -\sqrt{3} + i; \quad z_2 = \sqrt{3} - i$. 20) $z_1 = -2 + i; \quad z_2 = 5 - 12i$.

21) $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}; \quad z_2 = i$. 22) $z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}; \quad z_2 = -3 - 2i$.

23) $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad z_2 = i$. 24) $z_1 = 7 - 7i; \quad z_2 = i + 5$.

25) $z_1 = 5 - 12i; \quad z_2 = 3 + 2i$. 26) $z_1 = -\sqrt{3} + i; \quad z_2 = -3$.

27) $z_1 = -2 + i; \quad z_2 = 3 + 2i$. 28) $z_1 = 3 - 3\sqrt{3}i; \quad z_2 = \sqrt{3} - i$.

29) $z_1 = \sqrt{6} + \sqrt{2}i; \quad z_2 = 1 - i$. 30) $z_1 = \sqrt{5} + \sqrt{15}i; \quad z_2 = 3 + 2i$.

***Завдання* 15**. Розв'язати рівняння на множині комплексних чисел.

1. а) $\sqrt[5]{z} + \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 0$; б) $z^2 - 1 - i\sqrt{3} = 0$; в) $z^2 - 2z + 10 = 0$;
2. а) $\sqrt[3]{z} - i\sqrt{3} - 1 = 0$; б) $z^2 + \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 0$; в) $z^2 + 4z + 5 = 0$;
3. а) $\sqrt[7]{z} - 2i - 2 = 0$; б) $z^3 - i = 0$; в) $z^2 - 4z + 13 = 0$;
4. а) $\sqrt[5]{z} - i + 1 = 0$; б) $z^4 + \sqrt{8} - 8i\sqrt{3} = 0$; в) $z^2 - 8z + 20 = 0$;
5. а) $\sqrt[5]{z} - i\sqrt{12} - 2 = 0$; б) $z^2 - 3 - 3\sqrt{3}i = 0$; в) $z^2 + 6z + 12 = 0$;
6. а) $\sqrt[5]{z} + 2i - 2 = 0$; б) $z^2 - i = 0$; в) $z^2 - 2z + 17 = 0$;
7. а) $\sqrt[4]{z} - \sqrt{8} - \sqrt{8}i = 0$; б) $z^2 + 1 - i\sqrt{3} = 0$; в) $z^2 + 4z + 13 = 0$;
8. а) $\sqrt[8]{z} - 3 - 3i = 0$; б) $z^4 + 1 = 0$; в) $z^2 + 8z + 25 = 0$;
9. а) $\sqrt[4]{z} - \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 0$; б) $z^4 + 2 = 0$; в) $z^2 - 6z + 13 = 0$;

10. а) $\sqrt[3]{z}+2-2i=0$; б) $z^2-2-i\sqrt{12}=0$; в) $z^2+2z+5=0$;

11. а) $\sqrt[5]{z}-2+i\sqrt{12}=0$; б) $z^3+1-i=0$; в) $z^2+2z+10=0$;

12. а) $\sqrt[3]{z}-\sqrt{3}-i=0$; б) $z^3+2-2i=0$; в) $z^2-4z+8=0$;

13. а) $\sqrt[3]{z}-1+i=0$; б) $z^2-8-8i\sqrt{3}=0$; в) $z^2-8z+17=0$;

14. а) $\sqrt[5]{z}+2+2i=0$; б) $z^2-3+3\sqrt{3}i=0$; в) $z^2+6z+13=0$;

15. а) $\sqrt[4]{z}-\sqrt{8}+\sqrt{8}i=0$; б) $z^3-2i=0$; в) $z^2+8z+20=0$;

16. а) $\sqrt[3]{z}-3-3\sqrt{3}i=0$; б) $z^2-2+i\sqrt{12}=0$; в) $z^2+2z+26=0$;

17. а) $\sqrt[5]{z}-3+3i=0$; б) $z^2-1+i\sqrt{3}=0$; в) $z^2+2z+2=0$;

18. а) $\sqrt[3]{z}+2-i\sqrt{12}=0$; б) $z^2+3-3\sqrt{3}i=0$; в) $z^2+4z+8=0$;

19. а) $\sqrt[3]{z}+i+\sqrt{3}=0$; б) $z^3-5i=0$; в) $z^2-8z+25=0$;

20. а) $\sqrt[4]{z}+\sqrt{2}+i\sqrt{2}=0$; б) $z^2-8-8i\sqrt{3}=0$; в) $z^2-6z+10=0$;

21. а) $\sqrt[6]{z}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=0$; б) $z^2-6-6\sqrt{3}i=0$; в) $z^2+8z+17=0$;

22. а) $\sqrt[3]{z}-3+3\sqrt{3}i=0$; б) $z^2+2+i\sqrt{12}=0$; в) $z^2+2z+17=0$;

23. а) $\sqrt[5]{z}+\sqrt{8}-\sqrt{8}i=0$; б) $z^2+3i=0$; в) $z^2-2z+26=0$;

24. а) $\sqrt[4]{z}+3-3i=0$; б) $z^2+3+3\sqrt{3}i=0$; в) $z^2-4z+5=0$;

25. а) $\sqrt[4]{z}+2i+\sqrt{12}=0$; б) $z^2+2=0$; в) $z^2-2z+2=0$;

26. а) $\sqrt[6]{z}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=0$; б) $z^2+8+8i\sqrt{3}=0$; в) $z^2+4z+29=0$;

27. а) $\sqrt[3]{z}+3-3\sqrt{3}i=0$; б) $z^2+2-i\sqrt{12}=0$; в) $z^2+6z+10=0$;

28. а) $\sqrt[4]{z}+3+3i=0$; б) $z^4+8=0$; в) $z^2-6z+18=0$;

29. а) $\sqrt[3]{z}+\sqrt{8}-\sqrt{8}i=0$; б) $z^2+1+i\sqrt{3}=0$; в) $z^2-2z+5=0$;

30. а) $\sqrt[5]{z}-2i-\sqrt{12}=0$; б) $z^3-8i=0$; в) $z^2-4z+29=0$;

Завдання **16**. Знайти вказані границі.

1. а) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$,

   г) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$, д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+5x-10}{x^3-1}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$,

   г) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$, д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{5x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$,

   г) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$, д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{2x^2}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-8}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$,

   г) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$, д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}\,3x}{2\sin x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4-x^2+x+1}{x^4+1}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$,

   в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$, г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$, д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{3x^2}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-3x-1}{x^4-1}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+3}{5x^2+3x-3}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$, д) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$,

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$, д) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\pi-2x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}{x^2}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{x^3+64}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$,

г) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\operatorname{tg}x}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{4x^2+19x-5}{2x^2+11x+5}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x-2}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$, г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{x^2}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x+\sin 3x}{x\sin x}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-5}$,

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{9x^2+17x-2}{x^2+2x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{18x^2+5x}{8-3x-9x^2}$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}$, г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+5x}{3x^2+7x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$, г) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-\sin 3x}{2x^2}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^4-5x^2+1}{x^2-1}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$,

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$, д) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2+5x-1}{x^2-5x+6}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$,

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{3-2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} 2x}\right)$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^3-64}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+4}{x^3-3x+2}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-3x}{5-3x}\right)^{x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{x^2-\frac{1}{4}}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x^2-x}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^2-4x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\arcsin x}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+11x+10}{x^2-5x+14}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin x}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3x^2+x-10}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos x}{4x^2}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{4x^2-5x+1}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2-7}{3x^4+3x+5}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+1}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\sin x}{\arcsin x}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-11x-6}{3x^2-20x+12}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-5x^2-3x^5}{x^5+6x+8}$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}$, г) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$, д) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{(\pi/2-x)^2}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2+2x-24}{2x^3+15x+18}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x^2+3}{2+2x-x^3}$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}$, г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2}{\sqrt{8+x}-3}$, д) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$.

29. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-4}{x^2-11x+18}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2+2}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{3-2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin x+\sin 7x}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{7x^2-27x-4}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$,

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{5x^2}$.

***Завдання* 17.** Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. Зробити схематичний малюнок у околі точок розриву.

1. а) $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1. \\ x^2+2, & -1\le x<1. \\ 2x, & x\ge 1. \end{cases}$ б) $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}.$

2. а) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0. \\ (x+1)^2, & 0<x\le 2. \\ -x+4, & x>2. \end{cases}$ б) $f(x)=5^{\frac{1}{x-3}}.$

3. а) $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1. \\ x^2+1, & -1<x\le 1. \\ -x+3, & x>1. \end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{x+7}{x-2}.$

4. а) $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0. \\ -(x-1)^2, & 0<x<2. \\ x-3, & x\ge 2. \end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{x-5}{x+3}.$

5. а) $f(x)=\begin{cases} -2(x+1), & x\le -1. \\ (x+1)^3, & -1<x<0. \\ x, & x\ge 0. \end{cases}$ б) $f(x)=4^{\frac{1}{3-x}}.$

6. а) $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0. \\ x^2, & 0<x\le 2. \\ x+1, & x>2. \end{cases}$ б) $f(x)=9^{\frac{1}{2-x}}.$

7. а) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1. \\ 2x, & 1<x\le 3. \\ x+2, & x>3. \end{cases}$ б) $f(x)=2^{\frac{1}{x-5}}.$

8. а) $f(x)=\begin{cases} x-3, & x<0. \\ x+1, & 0\le x\le 4. \\ 3+x, & x>4. \end{cases}$ б) $f(x)=5^{\frac{1}{x-4}}.$

9. а) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 0.\\ 0, & 0<x\le 2.\\ x-2, & x>2.\end{cases}$ б) $f(x)=6^{\frac{1}{x-3}}$.

10. а) $f(x)=\begin{cases}2x^2, & x\le 0.\\ x, & 0<x\le 1.\\ 2+x, & x>1.\end{cases}$ б) $f(x)=7^{\frac{1}{5-x}}$.

11. а) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0.\\ x, & 0\le x\le 2.\\ 0, & x>2.\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+4}$.

12. а) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le \pi/2.\\ 0, & \pi/2\le x\le \pi.\\ 2, & x\ge \pi.\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{x+5}{x-2}$.

13. а) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\le 0.\\ x^2, & 0<x<2.\\ 2x, & x\ge 2.\end{cases}$ б) $f(x)=5^{\frac{2}{x-3}}$.

14. а) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0.\\ x^2-1, & 0\le x<1.\\ -x, & x\ge 1.\end{cases}$ б) $f(x)=4^{\frac{2}{x-1}}$.

15. а) $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0.\\ x^2+1, & 0\le x<2.\\ x+1, & x\ge 2.\end{cases}$ б) $f(x)=2^{\frac{1}{1-x}}$.

16. а) $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le 0.\\ 1, & 0<x\le 2.\\ x^2-2, & x>2.\end{cases}$ б) $f(x)=8^{\frac{4}{x-2}}$.

17. а) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0.\\ \sin x, & 0\le x<\pi.\\ 3, & x\ge \pi.\end{cases}$ б) $f(x)=5^{\frac{4}{3-x}}$.

18. а) $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<-1.\\ x^2+1, & -1\le x\le 2.\\ 2x, & x>2.\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{3x}{x-4}.$

19. а) $f(x)=\begin{cases}1, & x\le 0.\\ 2^x, & 0<x\le 2.\\ x+3, & x>2.\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}.$

20. а) $f(x)=\begin{cases}-x+2, & x\le -2.\\ x^3, & -2<x\le 1.\\ 2, & x>1.\end{cases}$ б) $f(x)=2^{\frac{3}{x+2}}.$

21. а) $f(x)=\begin{cases}3x+4, & x\le -1.\\ x^2-2, & -1<x<2.\\ x, & x\ge 2.\end{cases}$ б) $f(x)=4^{\frac{3}{x-2}}.$

22. а) $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 1.\\ (x-2)^2, & 1<x<3.\\ -x+6, & x\ge 3.\end{cases}$ б) $f(x)=3^{\frac{2}{x+1}}.$

23. а) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<1.\\ x^2, & 1\le x\le 2.\\ -2x, & x>2.\end{cases}$ б) $f(x)=5^{\frac{3}{x+4}}.$

24. а) $f(x)=\begin{cases}x^3, & x<-1.\\ x-1, & -1\le x\le 3.\\ -x+5, & x>3.\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{x-4}{x+2}.$

25. а) $f(x)=\begin{cases}x, & x<-2.\\ -x+1, & -2\le x\le 1.\\ x^2-1, & x>1.\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{x-4}{x+3}.$

26. а) $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le 0.\\ -x^2+4, & 0\le x\le 2.\\ x-2, & x\ge 2.\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{x+5}{x-3}.$

27. а) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1.\\ x^2-1, & -1<x\le 2.\\ 2x, & x>2.\end{cases}$ б) $f(x)=3^{\frac{4}{1-x}}$.

28. а) $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0.\\ \cos x, & 0\le x\le \pi.\\ 1-x, & x>\pi.\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{4x}{x+5}$.

29. а) $f(x)=\begin{cases}2, & x<-1.\\ 1-x, & -1\le x\le 1.\\ \ln x, & x>1.\end{cases}$ б) $f(x)=6^{\frac{2}{4-x}}$.

30. а) $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0.\\ x^3, & 0<x\le 2.\\ x+4, & x>2.\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$.

Завдання **18.** Знайти похідні функцій, використовуючи означення похідної.

а) $y=x^2-15x$; б) $y=8x^3-8x$.

1. а) $y=2x^2-14x$; б) $y=9x^3-7x$.
2. а) $y=3x^2-13x$; б) $y=10x^2-6x$.
3. а) $y=4x^2-12x$; б) $y=11x^3-5x$.
4. а) $y=5x^2-11x$; б) $y=12x^3-4x$.
5. а) $y=6x^2-10x$; б) $y=13x^3-3x$.
6. а) $y=7x^2-9x$; б) $y=14x^3-2x$.
7. а) $y=8x^2-8x$; б) $y=15x^3-x$.
8. а) $y=9x^2-7x$; б) $y=x-15x^3$.
9. а) $y=10x^2-6x$; б) $y=2x-14x^3$.
10. а) $y=11x^2-5x$; б) $y=3x-13x^3$.
11. а) $y=12x^2-4x$; б) $y=4x-12x^3$.
12. а) $y=13x^2-3x$; б) $y=5x-11x^3$.
13. а) $y=14x^2-2x$; б) $y=6x-10x^3$.

14. а) $y = 15x^2 - x$; б) $y = 7x - 9x^3$.

15. а) $y = x - 15x^2$; б) $y = 8x - 8x^3$.

16. а) $y = 2x - 14x^2$; б) $y = 9x - 7x^3$.

17. а) $y = 3x - 13x^2$; б) $y = 10x - 6x^3$.

18. а) $y = 4x - 12x^2$; б) $y = 11x - 5x^3$.

19. а) $y = 5x - 11x^2$; б) $y = 12x - 4x^3$.

20. а) $y = 6x - 10x^2$; б) $y = 13x - 3x^3$.

21. а) $y = 7x - 9x^2$; б) $y = 14x - 2x^3$.

22. а) $y = 8x - 8x^2$; б) $y = 15x - x^3$.

23. а) $y = 9x - 7x^2$; б) $y = x^3 - 15x$.

24. а) $y = 10x - 6x^2$; б) $y = 2x^3 - 14x$.

25. а) $y = 11x - 5x^2$; б) $y = 3x^3 - 13x$.

26. а) $y = 12x - 4x^2$; б) $y = 4x^3 - 12x$.

27. а) $y = 13x - 3x^2$; б) $y = 5x^3 - 11x$.

28. а) $y = 14x - 2x^2$; б) $y = 6x^3 - 10x$.

29. а) $y = 15x - x^2$; б) $y = 7x^3 - 9x$.

***Завдання* 19.** Знайти похідні першого порядку.

1. а) $y = x^3 - \dfrac{3}{x^2} + 2\sqrt[4]{x^3}$; б) $y = 5^x \ln x + \dfrac{x^4 + \sin x}{2 - \cos x}$;

   в) $y = \mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{ctg}^4(x^5 + 1)$; г) $y = \arcsin^3(x^4 \sin x)$.

2. а) $y = x^7 - \dfrac{5}{x^3} + 4\sqrt[3]{x^5}$; б) $y = e^x \log_4 x + \dfrac{x^6 + 2\cos x}{x^7 - 3\sin x}$;

   в) $y = 2\arccos^4 x - 4^{x^2+3}$; г) $y = \lg(x^4 + x\cos x)$.

3. а) $y = x^8 - \dfrac{5}{x} + 7\sqrt[6]{x^5}$; б) $y = \sin x \arccos x - \dfrac{x^3 + x}{e^x + 4}$;

   в) $y = \log_3(x^4 + 2x) - \mathrm{tg}^3(x^2 - 1)$; г) $y = \mathrm{ctg}^2(x + x^2 \sin x)$.

4. а) $y = x^5 - \frac{4}{x^2} + 3\sqrt[4]{x^5}$; б) $y = x^4 \operatorname{arcctg} x + \frac{\arcsin x}{x - \arccos x}$;

в) $y = e^{x^4 + 5x} - \log_6^2(x^7 + 3x)$; г) $y = tg^9 \frac{1 - 2x}{3x + 1}$.

5. а) $y = x^3 + \frac{5}{x^7} - 6\sqrt[3]{x^7}$; б) $y = x^5 \operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3 - \sin x}$;

в) $y = 3^{x^2 + x} - \ln^4(x^4 + 1)$; г) $y = \log_3 \frac{4x + 1}{2 - 5x}$.

6. а) $y = x^7 + \frac{9}{x^6} - 7\sqrt[3]{x^4}$; б) $y = \lg x \operatorname{tg} x + \frac{x^7 - e^x}{x^2 + 3}$;

в) $y = \operatorname{arcctg}(1 + x^2) + \arccos^3 x^2$; г) $y = 9^{x^2 + x^3 \sin x}$.

7. а) $y = x^6 - \frac{3}{x^2} + 5\sqrt[5]{x^2}$; б) $y = x^4 \log_3 x - \frac{1 + x^4}{2^x + x^2}$;

в) $y = e^{x^2 + 9x} - \sqrt{\ln\left(x^2 + 3\right)}$; г) $y = \operatorname{arctg} \frac{7x + 1}{2 - 3x}$.

8. а) $y = x^7 + \frac{5}{x^4} - 6\sqrt[4]{x^7}$; б) $y = \sqrt{x} \sin x + \frac{x^2 - 2\cos x}{x^3 + 1}$;

в) $y = tg^4 x + \sqrt{\operatorname{ctg}(x^3 + 1)}$; г) $y = \log_5 \frac{7x + 2}{x^2 + 5}$.

9. а) $y = x^9 - \frac{4}{x^3} + 7\sqrt[6]{x^5}$; б) $y = \sqrt[3]{x} e^x + \frac{3 - 5\sin x}{\cos x + x^2}$;

в) $y = 7^{x^4 + 3x} - \operatorname{arctg}^7\left(x^5 + 4\right)$; г) $y = e^{\sin x + x^5 \cos x}$.

10. а) $y = 3x^2 - \frac{9}{x^5} + 2\sqrt[4]{x}$; б) $y = \sqrt{x^3} \arcsin x - \frac{x^4 + 9x}{x^2 + \operatorname{tg} x}$;

в) $y = 4\operatorname{ctg}^3 x + \sqrt{\operatorname{arctg} x^5}$; г) $y = \sin^5 \frac{4x + 1}{5 - 6x}$.

11. а) $y=2x^3+\frac{3}{x^4}-9\sqrt[5]{x^3}$; б) $y=x^4e^x-\frac{x^4+5}{\lg x+2}$;

в) $y=5^{x^4-7x}+\ln^5\left(x^7+3x\right)$; г) $y=\cos^3\left(1+\sqrt{x}e^x\right)$.

12. а) $y=5x^5-\frac{2}{x^6}+3\sqrt[8]{x^7}$; б) $y=\sqrt{x^9}\,\operatorname{tg}x+\frac{2x^3-\lg x}{3+5x}$;

в) $y=e^{3x+x^4}-\log_4^5\left(2+x^6\right)$; г) $y=\operatorname{tg}^4\frac{6-7x}{8x-5}$.

13. а) $y=3x^7+\frac{9}{x^8}-5\sqrt[9]{x^2}$; б) $y=x^5\arcsin x-\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}$;

в) $y=2\sqrt{\sin x}+\operatorname{arcctg}^6 x^4$; г) $y=\log_3\left(x^2+2xe^x\right)$.

14. а) $y=6x^9-\frac{5}{x}+\sqrt{x^5}$; б) $y=x^8\sin x-\frac{2x^3+3\sin x}{3x^2-7\cos x}$;

в) $y=\arccos x^5-\ln^3\left(x^4+5\right)$; г) $y=3^{5x-\sqrt{x}\sin x}$.

15. а) $y=5x^2-\frac{8}{x^3}+\sqrt[3]{x}$; б) $y=x^5\operatorname{arctg}x+\frac{4x+e^x}{1+x^5}$;

в) $y=\sin^5 x-2\operatorname{tg}^7\left(x^9+5\right)$; г) $y=\log_8\frac{9x-3}{2+\cos x}$.

16. а) $y=5x^2+\frac{4}{x}+\sqrt[3]{x^4}$; б) $y=7^x\lg x-\frac{x^2-\cos x}{3+\sin x}$;

в) $y=\operatorname{ctg}^8 x+3\operatorname{tg}^5\left(x^6+3\right)$; г) $y=\arccos^4\left(x^5\cos x\right)$.

17. а) $y=x^8-\frac{6}{x^4}+5\sqrt[5]{x^3}$; б) $y=5^x\log_2 x-\frac{x^7-3\sin x}{x^8+4\cos x}$;

в) $y=4\arcsin^6 x-e^{\sin^2 x}$; г) $y=\ln\left(x^6-4x^2\sin x\right)$.

18. а) $y=x^9-\frac{7}{x^2}+5\sqrt[5]{x^6}$; б) $y=\cos x\arcsin x+\frac{2x^2-x}{4^x+1}$;

в) $y=\log_5\left(x-3x^5\right)+\operatorname{ctg}^5\left(x^3+1\right)$;   г) $y=\operatorname{tg}^5\left(x^2-x\cos x\right)$.

19. а) $y=x^6+\dfrac{5}{x^3}-4\sqrt[6]{x^7}$;   б) $y=2x^5\operatorname{arcctg}x-\dfrac{\arccos x}{\arcsin x-x^2}$;

в) $y=3e^{x^5-4x}+\log_4^2\left(x^8-4x\right)$;   г) $y=\operatorname{ctg}^4\dfrac{2x+3}{4-5x}$.

20. а) $y=x^8-\dfrac{6}{x^5}+5\sqrt[4]{x^3}$;   б) $y=\ln x\operatorname{ctg}x-\dfrac{x^5-3e^x}{2+x^4}$;

в) $y=arctg\left(x^2-4\right)+2\arcsin^5 x^3$;   г) $y=7^{2x^3-x^2\cos x}$.

21. а) $y=x^7+\dfrac{2}{x^4}-8\sqrt{x^5}$;   б) $y=2x^5\log_6 x+\dfrac{x^5+4}{5^x+x^5}$;

в) $y=4e^{x^5-7x}+2\sqrt{\lg\left(x^3+4\right)}$;   г) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{9x-4}{5-8x}$.

22. а) $y=4x^8-\dfrac{3}{x^5}+5\sqrt[7]{x^4}$;   б) $y=2\sqrt{x}\cos x-\dfrac{x^3+3\sin x}{2-x^4}$;

в) $y=\operatorname{ctg}^4 x-4\sqrt{\operatorname{tg}\left(x^4+2\right)}$;   г) $y=\log_7\dfrac{8x+4}{x^2+6}$.

23. а) $y=x^{10}+\dfrac{5}{x^4}-6\sqrt[5]{x^6}$;   б) $y=5\sqrt[3]{x}\,3^x-\dfrac{3\cos x-5}{\sin x+x^3}$;

в) $y=9^{x^5-4x}+2\operatorname{arcctg}^6\left(x^4+7\right)$;   г) $y=e^{2\cos x-x^4\sin x}$.

24. а) $y=4x^3+\dfrac{5}{x^6}-3\sqrt{x^7}$;   б) $y=\sqrt[3]{x^2}\arccos x+\dfrac{2x^3+5x}{x^4-\operatorname{ctg}x}$;

в) $y=5\operatorname{tg}^5 x-2\sqrt{\operatorname{arcctg}x^4}$;   г) $y=\cos^4\dfrac{5x-2}{3-4x}$.

25. а) $y=3x^4-\dfrac{2}{x^5}+4\sqrt[3]{x^5}$;   б) $y=4x^7e^x+\dfrac{x^3-4}{\ln x+2}$;

в) $y=3^{x^2+5x}-\lg^6\left(x^9-4x\right)$;   г) $y=\sin^4\left(5\sqrt[3]{x}e^x+3\right)$.

26. а) $y=7x^6+\dfrac{3}{x^7}-4\sqrt[7]{x^8}$;   б) $y=\sqrt{x^5}\,\mathrm{ctg}\,x-\dfrac{4x^4+2\ln x}{1-4x}$;

в) $y=5e^{4x+x^5}+2\log_8^3\left(4+x^2\right)$;   г) $y=\mathrm{ctg}^5\,\dfrac{4-9x}{5x-4}$.

27. а) $y=6x^8-\dfrac{5}{x^9}+4\sqrt{x^9}$;   б) $y=4x^7\arccos x+\dfrac{2\,\mathrm{arcctg}\,x}{9+x^2}$;

в) $y=3\sqrt{\cos x}-4\,\mathrm{arctg}^5\,x^6$;   г) $y=\log_4\left(x^4+5x^3e^x\right)$.

28. а) $y=5x^{10}-\dfrac{3}{x}+\sqrt[5]{x^2}$;   б) $y=2x^5\cos x+\dfrac{3x^2-4\cos x}{5\sin x-7x^3}$;

в) $y=\arcsin x^4+2\lg^4\left(x^3+9\right)$;   г) $y=5^{3x+\sqrt{x}\cos x}$.

29. а) $y=6x^3+\dfrac{9}{x^4}-2\sqrt[3]{x^7}$;   б) $y=x^4\,\mathrm{arcctg}\,x-\dfrac{3e^x+5}{2-x^2}$;

в) $y=\cos^4 x+3\,\mathrm{ctg}^9\left(x^7+3\right)$;   г) $y=\log_5\dfrac{2+3x}{1+\sin x}$.

30. а) $y=2x^7-\dfrac{3}{x^5}-\sqrt[4]{x^5}$;   б) $y=\sqrt{x}\ln x+\dfrac{x^2+3x}{x^3-\cos x}$;

в) $y=\log_5(x^4+\sqrt[3]{x}\sin x)$;   г) $y=\sqrt{\arcsin(x^2\cos x)}$.

***Завдання* 20.** Знайти похідні першого порядку від функцій, заданих неявно і в параметричній формі.

1. а) $x^4+e^{3y}+\sin\left(x^2+y^3\right)=0$;   б) $x=\mathrm{tg}^2\,t^3,\ y=2t^2-\cos^3 t$.
2. а) $\mathrm{ctg}\left(3x+y^4\right)-\ln\left(x^2-y^5\right)=0$;   б) $x=\sqrt{t}+2^t,\ y=\arccos^4 t$.
3. а) $\sqrt[3]{x^2+y^5}-e^{3x}+2\,\mathrm{tg}\,y=0$;   б) $x=\lg\left(2t^5-1\right),\ y=t^2\sin t$.
4. а) $y^6-\mathrm{tg}^3(5x+2y)-4^x=0$;   б) $x=\arcsin t^3,\ y=\sqrt{t}+\sin^7 t$.

5. а) $\cos^5 x - \lg y + 5\sqrt{x}y^4 = 0$; б) $x = \log_2(5t+1), y = \sqrt{t}\cos^2 t$.

6. а) $\lg(2x^3 - 3y^2) + 2\sqrt{x} + 3y^5 = 0$; б) $x = \operatorname{arctg}^2 t, y = e^{3t} - t\operatorname{ctg}t$.

7. а) $\sqrt[5]{y^3} + x^4 \sin y - 4\sqrt{5x+6y} = 0$; б) $x = 3^{2t} + 2t^4, y = \ln^2(t^4+1)$.

8. а) $5^x - 3\sqrt{y+1} + 2\cos(y^2 - 3x) = 0$; б) $x = \operatorname{arctg}^4 t, y = \sqrt{t}\lg(2t-1)$.

9. а) $\operatorname{ctg}(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}) + 5x^5 - e^{4y} = 0$; б) $x = 7^{4t} - t, y = \log_3(2t^4 + 4)$

10. а) $y^5 \sin^3 x + \sqrt{x^4 + 5y^2} = 0$; б) $x = \arcsin t^3, y = 2\sqrt{1+t^2}$.

11. а) $9^{3x+4y} + 2\sin^5 x + x\sqrt{y} = 0$; б) $x = 2\sqrt[6]{t} + 3t, y = \lg^2(t^4+3)$.

12. а) $2y^7 + \arccos^3 x - \sqrt{5x+3y} = 0$; б) $x = \log_7(5t+1), y = t^4 \sin t$.

13. а) $5\cos x - \sin^3(xy) + \sqrt[4]{y} = 0$; б) $x = \sqrt{t}\lg t, y = 3\operatorname{arcctg}^3 t$.

14. а) $\arcsin(x^3 - 2y^2) + 3\sqrt{x}y = 0$; б) $x = 3^{2t+1}, y = t^2 \ln^3 t$.

15. а) $2\log_5(4y^2 + x^3) - 3x + 5\sqrt{y} = 0$; б) $x = \arcsin^4 t, y = 2\sqrt{t} + \cos^8 t$.

16. а) $e^{5y-x} + 3\operatorname{tg} x + x\ln y = 0$; б) $x = 3t\operatorname{arctg}t^2, y = \lg(t^4 + 9)$.

17. а) $2x^5 - e^{4y} - 3\cos(x^4 + 2y^2) = 0$; б) $x = 4\operatorname{ctg}^3 t^2, y = 3t^3 + 2\sin^5 t$.

18. а) $3\operatorname{tg}t(x^4 + 5y) + \lg(x^5 - y^2) = 0$; б) $x = \sqrt[3]{t^2} + 3^t, y = 2\arcsin^3 t$.

19. а) $\sqrt[4]{x^5 + y^2} - 2e^{6x} + 3ctgy = 0$; б) $x = \ln(3t^4+1), y = t^3 \cos t$.

20. а) $6y^5 + 5\operatorname{tg}^2(7x+4y) - 5^x = 0$; б) $x = \arccos t^5, y = \sqrt[4]{t} - \sin^6 t$.

21. а) $5\sin^4 x + \ln y + 3\sqrt{y}x^3 = 0$; б) $x = \log_5(3t+1), y = t^2\sqrt{\sin t}$.

22. а) $2\ln(3x^2 + 5y^4) - 3\sqrt{y} + 5x^4 = 0$; б) $x = \operatorname{arcctg}^9 t, y = t^2 \operatorname{tg}t$.

23. а) $\sqrt[4]{y^5} - 3x^3\cos y + 5\sqrt{3x^3 + 4y^5} = 0$;б) $x = 2^{3t} + 5t^3, y = \lg^3(t^2+4)$.

24. а) $3^x + 2\sqrt{y+4} - \sin\left(x^2 + 3y^3\right) = 0$;   б) $x = \text{arcctg} t^5, y = t^5 \ln\left(5t+1\right)$.

25. а) $2\,\text{tg}\left(\sqrt{y} - 3\sqrt[5]{x}\right) - 4x^4 + 2e^{5y} = 0$;   б) $x = 4^{7t} + 2t, y = \log_2\left(3t^3 + 8\right)$.

26. а) $2y^7 \cos^2 x - 5\sqrt{y^4 + x^3} = 0$;   б) $x = \arccos t^4, y = 3\sqrt{3 + 4t^2}$.

27. а) $7^{4x-3y} + 5\cos^4 x + \sqrt{x}y^3 = 0$;   б) $x = 3\sqrt[5]{t^2} - 4t, y = \ln^3\left(t^5 + 2\right)$.

28. а) $3y^8 + 4\arcsin^2 x - 5\sqrt{3x + 5y} = 0$;   б) $x = 2\sin t^2, y = \lg^3\left(t^2 + 3\right)$.

29. а) $3\sin x + 5\cos^2(xy) - 2\sqrt[3]{y} = 0$;   б) $x = t^2 \ln t, y = 9\,\text{arctg}^4\, t$.

30. а) $\arccos\left(x^2 + y^5\right) + 2\sqrt{y}x^4 = 0$;   б) $x = 5^{4t}, y = \sqrt[3]{t^2}\, \lg^5 t$.

***Завдання* 21.** Знайти похідні.

1. а) $y = \left(x^3 + 2\right)^{4\sin x}$;   б) $y = \left(\ln x + 5\right)^{\sqrt{x} - 3x}$.

2. а) $y = \left(2x^4 - \sqrt{x}\right)^{\cos 2x}$;   б) $y = \left(\text{tg}^2 x - 1\right)^{x^3 + 5x}$.

3. а) $y = \left(3x^5 - \sqrt[3]{x}\right)^{\text{tg} 4x}$;   б) $y = \left(e^{2x} - 2\sqrt{x}\right)^{x - 4x^4}$.

4. а) $y = \left(4x^6 - 3x\right)^{2\,\text{ctg}\, x}$;   б) $y = \left(\arcsin x + x\right)^{5x^2 + 3x}$.

5. а) $y = (5x^7 + 2x^2)^{\arcsin x}$;   б) $y = \left(3^x + 2x^4\right)^{2x^2 + 3\sqrt{x}}$.

6. а) $y = (6x^8 - 5x^4)^{\arccos 2x}$;   б) $y = \left(2e^{3x} + x\right)^{x^4 + 6x^2}$.

7. а) $y = (7x^9 + 4x^3)^{3\,\text{arctg}\, x}$;   б) $y = \left(4\lg x + 3\sqrt{x}\right)^{x^5 + 3x^2}$.

8. а) $y = (8x^{10} - 7x^7)^{\text{arcctg}\, 4x}$;   б) $y = \left(\ln x - 2x^3\right)^{3\sqrt{x} + x^2}$.

9. а) $y = (9x^{11} + 2x^3)^{5\ln x}$;   б) $y = \left(\sin 3x + x^2\right)^{2x - x^3}$.

10. а) $y = (10x^9 - 3x)^{\lg 4x}$;   б) $y = \left(\cos 5x - 2\sqrt{x}\right)^{x^4 + 1}$.

11. а) $y=(x^5-2\sqrt[3]{x})^{3\sin x}$; б) $y=\left(5^x+4x\right)^{2-3x}$.

12. а) $y=(2x^6+7x)^{\cos 3x}$; б) $y=\left(4e^{2x}-\sqrt[3]{x}\right)^{2x^3+x}$.

13. а) $y=(3x^7-5x^2)^{4\operatorname{tg} x}$; б) $y=(\arccos x+2)^{\sqrt{x}+3x}$.

14. а) $y=(4x^8+3\sqrt[4]{x})^{\operatorname{ctg} 5x}$; б) $y=(3x+\arcsin x)^{2x^6}$.

15. а) $y=(5x^9-2x^4)^{\arcsin 9x}$; б) $y=\left(2\ln x+x^2\right)^{3x+1}$.

16. а) $y=(6x^{10}+2\sqrt[5]{x})^{5\arccos x}$; б) $y=\left(\sqrt{x}-5\lg x\right)^{x^4+3x}$.

17. а) $y=(7x-5\sqrt{x})^{\operatorname{arctg} 4x}$; б) $y=(2\sin 6x+7)^{4x-5}$.

18. а) $y=(8x^2+3x)^{4\operatorname{arctg} x}$; б) $y=(9x+\cos 3x)^{x^3-x}$.

19. а) $y=(9x^3-5x)^{4\ln x}$; б) $y=(3\operatorname{tg} x-8x)^{2x+7}$.

20. а) $y=(10x^4-\sqrt[6]{x})^{\lg 5x}$; б) $y=\left(5x^4+\operatorname{ctg} x\right)^{x^5-\sqrt{x}}$.

21. а) $y=(x^5+6x^3)^{4\sin x}$; б) $y=\left(\arccos x-2\sqrt{x}\right)^{5x+x^2}$.

22. а) $y=(2x^6-\sqrt[3]{x})^{\cos 8x}$; б) $y=(4x-2\arcsin x)^{x^3-8x}$;

23. а) $y=(3x^7+7x^3)^{5tgx}$; б) $y=\left(\operatorname{arcctg} x+x^6\right)^{\sqrt{x}+4x}$.

24. а) $y=(4x^8-\sqrt[4]{x})^{ctg 3x}$; б) $y=(2x-3\operatorname{arctg} x)^{x^2+5x^5}$.

25. а) $y=(5x^9+3x^2)^{7\arcsin x}$; б) $y=\left(7^x+2\sqrt{x}\right)^{3x^4+x}$.

26. а) $y=(6x-\sqrt[5]{x})^{\arccos 9x}$; б) $y=\left(x^3+e^x\right)^{x^5-3x^4}$.

27. а) $y=(7x^2+5x)^{4\operatorname{arctg} x}$; б) $y=(2\lg x+3)^{2x-\sqrt{x}}$.

28. а) $y=(8x^3+3\sqrt[3]{x})^{\operatorname{arcctg} 5x}$; б) $y=(9x+2\lg x)^{x^4+4x}$.

29. а) $y=(9x^4-7x)^{\lg x}$; б) $y=\left(x^2+3\sin x\right)^{4x^5+x}$.

30. а) $y=(10x^5+\sqrt[8]{x})^{\lg 3x}$; б) $y=\left(7\cos 8x+2x\right)^{3x^8-5x}$.

***Завдання* 22.** Знайти похідні другого порядку.

1. а) $y=4e^{5x}-3\sin^2 x$; б) $x=5\sqrt{t}+\cos t,\quad y=\arcsin t$.
2. а) $y=2\cos^3 x+5^{4x}$; б) $x=3t^4-4\sin t,\quad y=\arccos t$.
3. а) $y=\log_4\left(x^4+1\right)+2\sqrt{x}$; б) $x=\sqrt[3]{t}-5\operatorname{tg} t,\quad y=\operatorname{arcctg} t$.
4. а) $y=8x^3+3\ln^4 x$; б) $x=2\operatorname{ctg} t+9,\quad y=\operatorname{arctg} t$.
5. а) $y=3\arcsin\left(x^4+5\right)-e^{2x}$; б) $x=2\operatorname{tg} t,\quad y=4t^3+3^{4t}$.
6. а) $y=5\arccos^4 x+3\sqrt[3]{x^2}$; б) $x=\log_5 t,\quad y=\sqrt{t}+2e^{3t}$.
7. а) $y=6\operatorname{arctg}\left(1-x^3\right)+5x$; б) $x=4\ln t,\quad y=2\sin t+\sqrt{t}$.
8. а) $y=4x^4-3\operatorname{arcctg}^5 x$; б) $x=4^{\sin t},\quad y=t^5+5\sqrt[3]{t}$.
9. а) $y=e^{\cos t}-5x^7$; б) $x=3\lg t,\quad y=2\operatorname{tg} t+3t^4$.
10. а) $y=4\sqrt[5]{x}-5^{\operatorname{tg} x}$; б) $x=\arcsin t,\quad y=9t^2+2^t$.
11. а) $y=\log_5\left(x^3+5\right)-4x^5$; б) $x=\arccos t,\quad y=3t^4-2\cos t$.
12. а) $y=\log_8^5 x-2\sqrt[6]{x}$; б) $x=\operatorname{arctg} t,\quad y=2\ln t+t^5$.
13. а) $y=5x^6+3\ln\left(x^5+5\right)$; б) $x=\operatorname{arcctg} t,\quad y=5\lg t-4\sqrt{t}$.
14. а) $y=3\lg^5 x-2x^9$; б) $x=\arcsin t,\quad y=7t^2-\ln t$.
15. а) $y=5^{\sin x}+2\sqrt[5]{x}$; б) $x=\arcsin t,\quad y=7t^2-\ln t$.
16. а) $y=\cos\left(x^3-x\right)-3x$; б) $x=\sqrt{t}+7\operatorname{ctg} t,\quad y=2\log_4 t$.
17. а) $y=2\operatorname{tg}^3 x-5e^{4x}$; б) $x=3\sin t-4\sqrt[3]{t},\quad y=\operatorname{arctg} t$.

18. а) $y = 4^{5x} - 3\operatorname{ctg}^2 x$; б) $x = 7\cos t - 6t^3, \quad y = \operatorname{arcctg} t$.

19. а) $y = 3\sqrt[3]{x} + 2\log_5(x^2 + 2)$; б) $x = 4\operatorname{ctg} t + \sqrt{t}, \quad y = \arccos t$.

20. а) $y = 5\lg^4 x - 7x^2$; б) $x = 8t + 3\operatorname{tg} t, \quad y = \arcsin t$.

21. а) $y = 2e^{3x} + 5\arccos x^3$; б) $x = 3\operatorname{ctg} t, \quad y = 4^{6t} + 5t^2$.

22. а) $y = 5\sqrt[4]{x^3} + 2\arcsin^5 x$; б) $x = 4\log_9 t, \quad y = 5e^{2t} + t^4$.

23. а) $y = 6x^2 - 5\operatorname{arcctg}\left(x^4 + 4\right)$; б) $x = 5\lg t, \quad y = \sqrt[5]{t} - 3\cos t$.

24. а) $y = 2\operatorname{arctg}^7 x + 9x^2$; б) $x = 5^{\cos t}, \quad y = 7\sqrt[4]{t} + 2t^4$.

25. а) $y = 3x^5 + 2e^{\sin x}$; б) $x = 6\lg t, \quad y = 5t^3 - 8\operatorname{ctg} t$.

26. а) $y = 4^{\operatorname{ctg} x} - 2x^6$; б) $x = 2\arccos t + \sqrt{t}, \quad y = 4t + 1$.

27. а) $y = 8\log_4(2 + x^4) - 7x^5$; б) $x = 3\arcsin t + t^2, \quad y = 2 - 5t$.

28. а) $y = \log_3^8 x + 4x^9$; б) $x = 3\operatorname{arcctg} t - 2\sqrt{t}, \quad y = 3^{2t}$;

29. а) $y = 2\lg\left(x^4 + 1\right) - 6\sqrt[6]{x}$; б) $x = 5\operatorname{arctg} t + 2t, \quad y = e^{5t}$.

30. а) $y = 9x^3 - 5\ln^2 x$; б) $x = 4^{\sin t} + t^4, \quad y = 2\operatorname{tg} t$.

***Завдання* 23.** Знайти диференціал функції і наближено обчислити її значення у заданій точці *x*.

1. $y = \arcsin\left(x^2 - 1\right), \quad x = 0{,}96$. 2. $y = \sqrt{x^3 + 1}, \quad x = 2{,}05$.

3. $y = \arccos\left(9 - x^2\right), \quad x = 2{,}94$. 4. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2}, \quad x = 5{,}05$.

5. $y = \operatorname{arctg}\left(3x^2 - 26\right), \quad x = 2{,}96$. 6. $y = \sqrt[4]{x^2 + 7}, \quad x = 3{,}03$.

7. $y = \operatorname{arcctg}\left(17 - x^2\right), \quad x = 3{,}98$. 8. $y = \ln\left(x^3 - 7\right), \quad x = 2{,}06$.

9. $y = \arcsin\left(x^2 - 1\right), \quad x = 0{,}96$. 10. $y = \operatorname{arctg}\left(x^5 + 5x\right), \quad x = 0{,}04$.

11. $y=e^{x^2-5x}, \quad x=4{,}97$.

12. $y=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right), \quad x=0{,}02$.

13. $y=e^{\sin 2x}, \quad x=-0{,}06$.

14. $y=\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right), \quad x=0{,}05$.

15. $y=\mathrm{ctg}\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right), \quad x=-0{,}04$.

16. $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+4x\right), \quad x=0{,}03$.

17. $y=\sqrt{x^3+3x^2+10}, \quad x=2{,}98$.

18. $y=\arcsin\left(x^4-x^3\right), \quad x=1{,}06$.

19. $y=\sqrt[3]{3x^3+5x}, \quad x=0{,}95$.

20. $y=\arccos\left(x^3-x^2\right), \quad x=1{,}04$.

21. $y=\sqrt[4]{3x^2+x+1}, \quad x=4{,}97$.

22. $y=\mathrm{arctg}\left(4x^3-3x\right), \quad x=1{,}02$.

23. $y=e^{x^4-5x}, \quad x=-0{,}06$.

24. $y=\mathrm{arcctg}\left(x^4-15\right), \quad x=2{,}05$.

25. $y=\mathrm{arctg}\left(x^2-3x\right), \quad x=2{,}94$.

26. $y=\ln\left(x^2-15\right), \quad x=4{,}05$.

27. $y=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-2x\right), \quad x=-0{,}04$.

28. $y=\mathrm{arcctg}\left(x^5-x^4\right), \quad x=1{,}03$.

29. $y=e^{\sin 5x}, \quad x=-0{,}02$.

30. $y=\mathrm{tg}\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right), \quad x=0{,}06$.

***Завдання* 24.** Записати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=f(x)$ в точці з абсцисою x_0.

1. $y=x^3-2x, \quad x_0=1$.

2. $y=\sqrt{x^3+2x+4}, \quad x_0=0$.

3. $y=\sin^2 x, \quad x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

4. $y=\cos^2 x, \quad x_0=\dfrac{\pi}{3}$.

5. $y=e^{x^2+3x}, \quad x_0=0$.

6. $y=\lg\left(3x^2+2x+10\right), \quad x_0=0$.

7. $y=(2x-3)^5, \quad x_0=2$.

8. $y=\sqrt[3]{x^2+3x+4}, \quad x_0=1$.

9. $y=\mathrm{tg}^2\,x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

10. $y=\mathrm{ctg}^2\,x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

11. $y=2^{x^2+x},\quad x_0=1$.

12. $y=\log_4\left(x^2+3x+4\right),\quad x_0=0$.

13. $y=\left(3x-7\right)^4,\quad x_0=3$.

14. $y=\sqrt[4]{2x^2-x+1},\quad x_0=3$.

15. $y=\mathrm{arctg}^2\,x,\quad x_0=1$.

16. $y=\mathrm{arcctg}^2\,x,\quad x_0=1$.

17. $y=\arcsin^2 x,\quad x_0=\dfrac{1}{2}$.

18. $y=\arccos^2 x,\quad x_0=\dfrac{1}{2}$.

19. $y=\left(5x-4\right)^4,\quad x_0=1$.

20. $y=\sqrt{3x^3+1},\quad x_0=2$.

21. $y=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right),\quad x_0=0$.

22. $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right),\quad x_0=0$.

23. $y=e^{x^3-2x+1},\quad x_0=1$.

24. $y=\log_2\left(x^2-2x-1\right),\quad x_0=3$.

25. $y=\mathrm{tg}\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right),\quad x_0=0$.

26. $y=\mathrm{ctg}\left(4x+\dfrac{\pi}{4}\right),\quad x_0=0$.

27. $y=\sqrt[3]{3x^2+x+13},\quad x_0=2$.

28. $y=\sqrt[4]{x^3+x^2+1},\quad x_0=4$.

29. $y=\left(2-3x\right)^5,\quad x_0=1$.

30. $y=e^{2x^3+3x-5},\quad x_0=1$.

***Завдання* 25.** Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x^2+5x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-5x-1}{\sin^2 3x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(2x+\pi/2)}{\sqrt{x^2+4x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln(x^2+3x)$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(7x+1)}{x^2+3x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 3x}{tg2x-2x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sin x-1}{\cos^3 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)\,\mathrm{ctg}\,x$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}6x}{\sqrt{2x^2+7x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x^2})$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg}(4x+\pi/2)}{\sqrt{x^3+8x}}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{\cos x}-\cos x-1}{\cos^2 x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin^3 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{x^2}}{\operatorname{arctg}x^2}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x-\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}(x^2+1)e^{-3x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(3x-5)}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{\cos x-1}\right)$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\lg(4x-3)}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x+x-\pi}{(x-\pi)^2}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{3x+1}}{2x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{\sin \pi x+\pi x-\pi}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2^{4x+3}}{9x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{\ln(x+1)}\right)$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x^2+5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2+\sin x-x}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x^3-3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+3x+1)-3x}{\sin^2 x}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^3 x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3+x^2-5x+3}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^3 x-1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{4x}+3x}{2x+e^{5x}}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{3x}-3x\ln 4-1}{\sin^2 5x}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{e^x-e^{-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{e^{4x}-4x-1}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+4x}{\sin x+5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x-\operatorname{tg}5x}{\sin 4x-4x}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3}{\ln(3x+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x\lg(5x^2+x)$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2^{3x}}{\arcsin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\ln(1-\dfrac{\pi}{2}+x)\operatorname{tg}x$

22. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{5^x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(3\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{x-\pi/2}\right)$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln(3x^2-2)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-\sin x-1}{\sin^2 x}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\lg(x^2-3)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-xe^x}{x\operatorname{arctg}x}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{10x+3}{e^{5x}+4x}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{e^{\cos x}-\cos x-1}{\cos^2 x}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3-7x}{5x+3^x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin x}-\dfrac{5}{x^2}\right)$.

27. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-2^{3x}}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 5x}{\sin 6x-6x}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2^x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\pi x+x}{x^3-x^2-x+1}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\log_2 x-1}{x^2-8x+12}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4}{\ln(x+1)}-\dfrac{3}{x^3}\right)$.

30. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-4x}{\arcsin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{arctg}x}{\sin x+x^3-x}$.

***Завдання* 26.** Дослідити функцію і побудувати її графік.

1. $y=\dfrac{x^4}{2x^2-1}$.

2. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$.

3. $y=\dfrac{x^4}{\left(x^2-4\right)^2}$.

4. $y=\dfrac{x}{x^2+4}$.

5. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-9}$.

6. $y=\dfrac{x^2}{x-3}$.

7. $y=\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right)^2$.

8. $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$.

9. $y=\dfrac{2x^3-1}{x^3}$.

10. $y=\dfrac{x^3}{x^3-8}$.

11. $y=\dfrac{x^4}{x^2-4}$.

12. $y=\dfrac{x^4+3}{x^3}$.

13. $y=\left(\dfrac{x^2}{x^2+9}\right)^2$.

14. $y=\dfrac{x}{x^2+3}$.

15. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+12}$.

16. $y=\dfrac{x^2}{2x+5}$.

17. $y=\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^2$.

18. $y=\dfrac{x^3-4}{x^2}$.

19. $y=\dfrac{4-x^2}{x^3}$.

20. $y=\dfrac{x^3}{x^3+2}$.

21. $y=\dfrac{x^4}{3-x^2}$.

22. $y=\dfrac{16+3x^4}{x^3}$.

23. $y=\left(\dfrac{x^2}{9-x^2}\right)^2$.

24. $y=\dfrac{x}{x^2-9}$.

25. $y=\dfrac{x^2-4}{9-x^2}$.

26. $y=\dfrac{x^2}{3-2x}$.

27. $y=\left(\dfrac{1-2x}{4+x}\right)^2$

28. $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$.

29. $y=\dfrac{4-3x^2}{x^3}$.

30. $y=\dfrac{x^3}{8-x^3}$.