**УДК 519.21**

**С.Я. Гончарова, канд. фіз.-мат. наук**
*Кіровоградський національний технічний університет*

# Оптимальне стохастичне керування імпульсним процесом переносу з лінійною відносно керування швидкістю переносу

Досліджується оптимальне стохастичне керування імпульсним процесом переносу.
**імпульсний процес переносу, оптимальне стохастичне керування, рівняння Беллмана**

Фізичні процеси, що мають місце в техніці, як правило, керовані, тобто можуть здійснюватися різними способами в залежності від волі людини. В зв'язку з цим виникає питання про знаходження оптимального керування процесом. Мова може йти, наприклад, про оптимальність в розумінні швидкодії, тобто про досягнення цілі процесу за найкоротший час, про досягнення цієї цілі з мінімальною затратою енергії і т.п.

У роботі досліджується модель імпульсного процесу переносу в напівмарковському випадковому середовищі, що має інтерпретацію напівмарковської випадкової еволюції. Предметом дослідження є оптимальна стабілізація імпульсного процесу переносу з лінійною відносно керування швидкістю переносу при квадратичному критерії якості.

Використовується модифікація принципу Беллмана стосовно задач оптимального керування стохастичними системами [1].

Проблеми оптимального стохастичного керування розглядалась лише для марковських систем [3], [4].

Нехай $(\Omega, F, P)$ імовірнісний простір, на якому розглядатимемо випадкові величини із значеннями у вимірному просторі $(X, \mathcal{X})$.

*Означення 1.* Напівмарковським процесом називається процес $x(t)$, що задається співвідношеннями:

$$x(t) = x_{\nu(t)}, \tag{1}$$

$$\nu(t) = \max\{n{:}\tau_n \le t\}, \quad \tau_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k, \quad n \ge 0, \quad \tau_0 = 0, \tag{2}$$

де $\tau_n$ – моменти відновлення;

$\theta_k$ – невід'ємні випадкові величини, що задають інтервали між моментами відновлення.

Розглядатимемо регулярний напівмарковський процес:

$$\mathcal{P}\{\nu(t) < +\infty\} = 1, \quad \forall t \in R_+.$$

*Означення 2.* Керований імпульсний процес переносу $z(t)$ в напівмарковському випадковому середовищі задається розв'язком рівняння

$$z(t) = z + \int_T^t \upsilon(z(s), x(s), u)ds - \sum_{k=\nu(T)}^{\nu(t)} a(x_k), \tag{3}$$

де $t \ge T \ge 0$;

$0 < z < \infty$;

функція $\upsilon(z, x, u)$ неперервна;

© С.Я. Гончарова. 2006

$u$ – параметр керування;

$a(x)$ – невід'ємна, вимірна, обмежена функція на $X$.

Припускатимемо, що параметр керування $u$ в рівнянні (3) вибирається у вигляді функції $u = u(z(t), x(t), \gamma(t))$, де $x(t)$ – напівмарковський процес, $\gamma(t) = t - \tau_{\nu(t)}$, $t \ge T$. Таке керування називатимемо марковським.

Вважатимемо, що $u = u(z, x, t)$ є дійсною скалярною або векторною функцією.

Функцію $u = u(z, x, t)$ назвемо допустимою, якщо функція $\upsilon(z, x, u(z, x, t))$ в рівнянні (3) неперервна; неперервно диференційовна по $z$; обмежена по $x$; невід'ємна і така, що $\upsilon(0, x, u(0, x, t)) = 0$, $\forall x \in X$, $t \in R_+$ та $0 \le \upsilon'_z \le K$, $K > 0$. Клас допустимих функцій позначимо $U$. Кожній функції $u \in U$ відповідає імпульсний процес переносу $z(t)$, що є єдиним розв'язком рівняння (3).

Надалі писатимемо: $u(z(t), x(t), \gamma(t)) = u(t)$.

Задача оптимального стохастичного керування полягає у виборі такого керування $u \in U$, де $U$ – компактна множина допустимих керувань у просторі дійсних неперервних функцій на $R_+ \times X \times R_+$, що задовольняють локальній умові Ліпшица по $z$, яке переводить трьохкомпонентний неперервний справа строго марковський процес $(z(t), x(t), \gamma(t))$, де $z(t)$ – керований імпульсний процес переносу, визначений в (3), з початкового стану $(z, x, T) \in G_0 \times X \times R_+$ в множину $\bar{G}^0 \times X \times R_+$ з імовірністю *1*, де $G^0 = [0, z_0)$, $z_0 \in R_+$, $\bar{G}^0 = [z_0, +\infty)$, і щоб при цьому мінімізувався в порівнянні з іншими керуваннями із раніше визначеної множини допустимих керувань $U$ функціонал якості

$$C(z, x, T, u) = E^u_{z,x,T}\left[\int_T^{\tau_u} k(z(s), x(s), \gamma(s), u(s))ds + b(z(\tau_u), x(\tau_u), \gamma(\tau_u))\right], \qquad (4)$$

де $\tau_u = \min\{t \ge T: (z(t), x(t), \gamma(t)) \notin G^0 \times X \times R_+\}$ – випадковий момент попадання в множину $\bar{G}^0 \times X \times R_+$;

$b(z, x, t)$ – невід'ємна, обмежена та неперервно диференційовна на $R_+ \times X \times R_+$ функція;

$k(z, x, t, u) \ge k_1 > 0$ – неперервна за сукупністю змінних функція.

Якщо $(z(t), x(t), \gamma(t)) \in G^0 \times X \times R_+$, $\forall t < +\infty$, то $\tau_u = +\infty$.

Визначимо *оптимальний функціонал якості*

$$C_0(z, x, T) = \inf_{u \in U} C(z, x, T, u). \qquad (5)$$

Наступна теорема є модифікацією принципу Беллмана стосовно задач оптимального керування стохастичними системами.

**Теорема** [1]. *Нехай* $z(t)$ *є керованим імпульсним процесом переносу, визначеним в (3),* $C(z, x, T, u)$ *– функціонал якості, визначений в (4),* $\bar{G}^0 \times X \times R_+$ *– цільова множина, де* $\bar{G}_0 = [z_0, +\infty)$, $z_0 \in R_+$.

*Допустиме керування* $\bar{u}$, $\bar{u} \in U$, *якому відповідає оптимальна якість* $C_0(z, x, T) \in \mathrm{Dom}(L_u)$, *є оптимальним тоді і тільки тоді, коли* $C_0$ *задовольняє рівняння*

$$\begin{cases} \inf\limits_{u \in U}[L_u C_0(z, x, T) + k(z, x, T, u)] = 0, & \forall (z, x, T) \in G^0 \times X \times R_+, \\ C_0(z, x, T) = b(z, x, T), & \forall (z, x, T) \in \partial G \times X \times R_+, \end{cases} \qquad (6)$$

*де* $G^0 = [0, z_0)$, $\partial G = \{0, z_0\}$, *оператор* $L_u$ *– твірний оператор марковського процесу* $(z(t), x(t), \gamma(t))$.

Застосуємо теорему до дослідження керованого імпульсного процесу переносу, визначеного в (3), з лінійною відносно $z$ і керування $u$ швидкістю переносу

$\upsilon(z, x, u) = \upsilon(x)(z+u)$, $z+u \geq 0$,

де $\upsilon(x)$ – додатна, обмежена, неперервна функція;

$z$ – початковий параметр, $u \in U$.

Розглянемо задачу оптимального стохастичного керування вказаним процесом при критерії якості (4) з функцією

$$k(z, x, t, u) = h(x, t)\, z^2 + \lambda(x, t)\, u^2, \tag{7}$$

де $h(x, t)$, $\lambda(x, t)$ – додатні, обмежені, неперервні функції.

Будемо шукати оптимальну якість $C_0(z, x, t)$, що задовольняє умовам теореми, у вигляді

$$C_0(z, x, t) = b(x, t) z^2, \ \forall (z, x, t) \in G^0 \times X \times R_+, \tag{8}$$
$$C_0(z, x, t) = 0, \ \ \forall (z, x, t) \in \partial G \times X \times R_+,$$

де $G^0 = [0, z_0)$, $\partial G = \{0, z_0\}$, $z_0 \in R_+$,

$b(x, t)$ – додатна, обмежена, неперервна, неперервно диференційовна по $t$ невідома функція.

Рівняння Беллмана (6), що пов'язує оптимальну якість $C_0(z, x, t)$ і оптимальне керування $\bar{u}\ (z, x, t)$, має вигляд:

$$\min_u \left\{ 2z^2 \upsilon(x) b(x, t) + Pb(x, t)[z - a(x)]^2 - b(x, t) z^2 + \frac{db(x, t)}{dt} z^2 + \right.$$
$$\left. + 2z\upsilon(x) b(x, t) u + h(x, t) z^2 + \lambda(x, t) u^2 \right\} = 0,$$

що рівносильно

$$2z^2 \upsilon(x) b(x, t) + Pb(x, t)(z - a(x))^2 -$$
$$-b(x, t) z^2 + \frac{db(x, t)}{dt} z^2 + \frac{g_x(t)}{\overline{G}_x(t)} [Pb(x, T) z^2 - b(x, t) z^2] + h(x, t) z^2 =$$
$$= -\min_u [2z\upsilon(x) b(x, t) u + \lambda(x, t) u^2] = -\bar{u} \cdot 2z\upsilon(x) b(x, t) - \bar{u}^2 \lambda(x, t). \tag{9}$$

Так як $\lambda(x, t) > 0$, то функція $\bar{u}\ (z, x, t)$ в рівнянні (9) матиме вигляд:

$$\bar{u}\ (z, x, t) = -z\upsilon(x) \frac{b(x, t)}{\lambda(x, t)}. \tag{10}$$

Звідси видно, що оптимальне керування є лінійним по $z$, якщо оптимальна якість задається формулою (8).

З співвідношень (9), (10) отримаємо рівняння для знаходження невідомої функції $b(x, t)$:

$$\frac{db(x, t)}{dt} - \frac{\upsilon^2(x)}{\lambda(x, t)} \cdot b^2(x, t) + (2\upsilon(x) - 1) \cdot b(x, t) + Pb(x, t) \left[ 1 - \frac{a(x)}{z} \right]^2 +$$
$$+ \frac{g_x(t)}{\overline{G}_x(t)} [Pb(x, T) - b(x, t)] + h(x, t) = 0, \tag{11}$$

де $z$ – заданий дійсний скалярний параметр і $h(x, t)$, $\lambda(x, t)$, $a(x)$, $\upsilon(x)$ – відомі дійсні вихідні функції.

З теореми випливає

**Лема.** *Якщо рівняння (11) має розв'язок* $b(x, t)$, *що є додатною, обмеженою,* *неперервною, неперервно диференційовною по* $t$ *функцією, то керування (10) мінімізує функціонал (4) з функцією* $k(z, x, t, u)$*, заданою у вигляді (7).*

Рівняння (11) є диференціальним рівнянням типу Ріккаті, а тому має розв'язок.

У випадку, коли функція $a(x) \equiv 0$, $\forall x \in X$, процес (3) є стохастичним процесом переносу в напівмарковському випадковому середовищі $x(t)$. Такі процеси є природними абстрактними моделями різних фізичних процесів, що протікають під впливом випадкових факторів зовнішнього середовища. Стохастичними процесами переносу описуються, наприклад, процеси коливань гармонійного осцилятора з коефіцієнтом пружності $k^2$, процеси поширення хвиль в брусах з індексом переломлення $n(x(t))$.

Отримані результати можна використовувати для розв'язання задач оптимального стохастичного керування наведеними процесами.

## Список літератури


1. Свіщук А.В., Гончарова С.Я. Оптимальне стохастичне керування процесами ризику // Нелінійні коливання. – 1998. – № 2. – С. 122-131.
2. Korolyuk V.S., Swishchuk A.V. Evolution of systems in random media // CRC Press. USA. – 1995. – 356 p.
3. Кушнер Г. Стохастическая устойчивость и управление. – М.: Мир, 1969. – 200 с.
4. Хасьминский Р. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 368 с.



Исследуется оптимальное стохастическое управление импульсным процессом переноса

The optimul stochastic control of impulse process of transfer.



*Одержано 20.11.06*