

УДК 539.376

И. К. Сенченков, В. И. Козлов, С. Н. Якименко

К РАСЧЕТУ НИЗКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ И ВИБРОРАЗОГРЕВА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО ЦИЛИНДРА МКЭ

Для исследования статического напряженно-деформированного состояния бесконечных тел методом конечных элементов (МКЭ) существует несколько подходов. В простейшем из них [3, 7] бесконечная область заменяется конечной, на достаточно удаленной границе которой ставятся соответствующие (обычно нулевые) граничные условия. В ряде случаев размер редуцированной области оказывается значительным, что приводит к необходимости решения систем алгебраических уравнений высокого порядка. В работе [1] используются так называемые бесконечные элементы, для которых сохраняются стандартные функции формы, но для координат вводятся специальные функции формы. При этом повышаются точность и скорость вычислений. В соответствии с третьим подходом [8] на удаленной границе задаются перемещения, отвечающие точному решению вспомогательной задачи, имеющей в дальнем поле ту же асимптотику, что и исходная задача. Для этих целей применим, например, решения Буссинеска, Черутти [6] для полупространства и т. п.

Использование аналогичных приемов при анализе распространения гармонических волн осложняется необходимостью выполнения на дальней границе условий излучения или минимального отражения, обеспечивающих отсутствие ложных резонансов. Очевидно, первый из используемых в статике приемов ограничен средами с существенным затуханием. Для преодоления возникающих трудностей используется два основных подхода. Сущность первого из них состоит в постановке на удаленной границе так называемых условий «излучения (поглощения)» [5, 11].

Второй подход основан на прямом использовании в качестве аппроксимирующих функций в бесконечном элементе волновой асимпто-

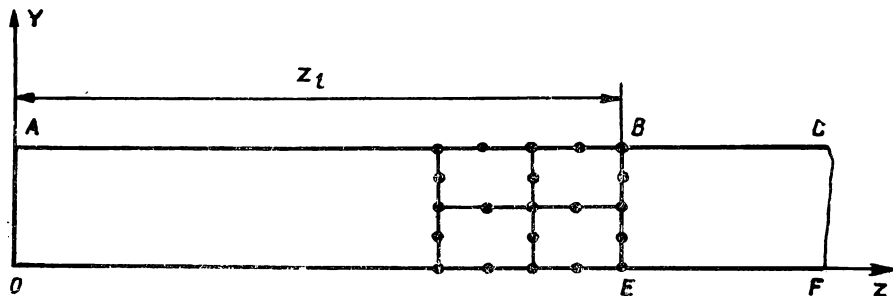


Рис. 1

тики [10]. В тех случаях, когда она известна, второй подход является, по-видимому, наиболее эффективным. К этому классу задач относятся задачи для полупространства, а также тел цилиндрической и призматической конфигурации. Для этих тел дальнейшее волновое поле определяется суперпозицией в первом случае волн Рэлея, сдвига и сжатия, а во

втором случае — распространяющихся мод, дисперсия которых хорошо изучена [2].

В настоящем сообщении данный подход в сочетании с конечно-элементной техникой, описанной в работе [4], использован для расчета низкочастотных колебаний и виброразогрева полубесконечного цилиндра.

Рассмотрим полубесконечный изотропный линейно-вязкоупругий цилиндр $r \leq R_0, z > 0$, подверженный на торце гармоническому возбуждению (рис. 1).

Осесимметричные колебания тела описываются системой уравнений

$$\operatorname{div} \tilde{\sigma} + \rho \omega^2 \tilde{u} = 0; \quad \tilde{\sigma} = \left(\tilde{K} - \frac{2}{3} \tilde{G} \right) I \operatorname{tr} \tilde{\varepsilon} + 2\tilde{G}\tilde{\varepsilon}; \quad (1)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \tilde{u} + (\operatorname{grad} \tilde{u})^T).$$

Здесь $\tilde{u}, \tilde{\sigma}, \tilde{\varepsilon}$ — комплексные амплитуды вектора перемещений, тензоров напряжений и деформации; $(\tilde{\cdot}) = (\cdot)' + i(\cdot)''$; \tilde{G}, \tilde{K} — сдвиговой и объемный комплексный модули, ρ — плотность, ω — частота колебаний, I — единичный тензор, $(\cdot)^T$ — операция транспонирования.

Одномерный аналог соотношений (1), отвечающий стержневой моде колебаний в цилиндре, дается уравнением

$$\tilde{E} \tilde{u}_{z,zz} + \rho \omega^2 \tilde{u}_z = 0 \quad (0 < z < \infty), \quad (2)$$

где \tilde{E} — модуль Юнга, $\tilde{E} = 9\tilde{K}\tilde{G}/(3\tilde{K} + \tilde{G})$, $(\cdot)_{,z} = \partial(\cdot)/\partial z$.

Если в сечении $z = z_l$ известно перемещение $\tilde{u}_z = \tilde{u}_{z_l}$, то решение уравнения (2) имеет вид

$$\tilde{u}_z = \tilde{u}_{z_l} e^{-i\gamma(z-z_l)}, \quad \tilde{\gamma} = (\rho \omega^2 / \tilde{E})^{1/2} \quad (3)$$

Разобьем полубесконечный цилиндр на две области $0 < z < z_l$ и $z_l < z < \infty$. Первую из них покроем сеткой конечных элементов с принятой в [4] квадратичной аппроксимацией компонент перемещений. В бесконечном элементе (БЭ) закон изменения осевых перемещений примем в виде (3). Интеграл для этого элемента в функционале Лагранжа [4] запишется так

$$\mathcal{E}_1 = \pi \int_0^{R_0} \int_{z_l}^{\infty} (\tilde{E} \tilde{u}_{z,z}^2 - \rho \omega^2 \tilde{u}_z^2) r dr dz. \quad (4)$$

После подстановки (3) в (4), дифференцирования по \tilde{u}_{z_l} , вычисления интеграла по z и перехода к безразмерной координате η с помощью функций формы

$$\hat{\varphi}_1 = \frac{1}{2} \eta(\eta - 1), \quad \hat{\varphi}_2 = \frac{1}{2} \eta(\eta + 1), \quad \hat{\varphi}_3 = 1 - \eta^2,$$

получаем

$$\frac{1}{\pi} \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial \tilde{u}_{z_l}} = (i\tilde{\gamma} \tilde{E} - \rho \omega^2 / i\tilde{\gamma}) \int_{-1}^1 r |J| d\eta, \quad (5)$$

где J — якобиан перехода от цилиндрической к локальной системе координат.

Таким образом, коэффициенты уравнений для узловых точек, лежащих на границе BE ($z=z_l$), подправляются с учетом (5). На границе BE автоматически выполняются условия непрерывности для \tilde{u}_z и равенство $\tilde{\sigma}_{rz}=0$. Получаемая при этом система разрешающих алгебраических уравнений имеет тот же порядок, что и в случае конечной области $ABEO$.

Проведем сравнительный анализ колебаний цилиндра при следующих, задаваемых на поверхности BE , стандартных граничных условиях

$$\tilde{u}_r = \tilde{u}_z = 0; \quad (6)$$

$$\tilde{u}_z = 0, \quad \tilde{\sigma}_{rz} = 0; \quad (7)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz} = \tilde{\sigma}_{rz} = 0, \quad (8)$$

условиях излучения [5]

$$\tilde{\sigma}_{zz} + i\omega\rho c_E \tilde{u}_z = 0, \quad \tilde{\sigma}_{rz} = 0 \quad (9)$$

и описанного выше подхода, использующего бесконечный элемент.

Рассмотрим следующие условия нагружения:

$$\tilde{u}_z = u_0, \quad \tilde{\sigma}_{rz} = 0 \quad z = 0, \quad 0 < r < R_0; \quad (10)$$

$$\tilde{\sigma}_{rr} = \tilde{\sigma}_{rz} = 0 \quad r = R_0, \quad z > 0.$$

В качестве материала цилиндра примем полиэтилен со следующими характеристиками:

$$G' = 7,0 \cdot 10^8 \text{ Па}, \quad G'' = 6,8 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad K' = 3,3 \cdot 10^9 \text{ Па}; \quad (11)$$

$$K'' = 5,6 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad \rho = 950 \text{ кг/м}^3.$$

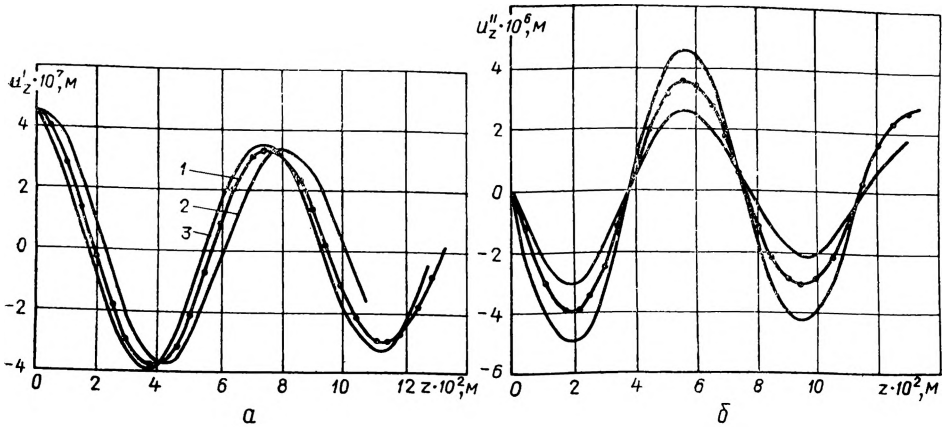
Примем также

$$u_0 = 44 \text{ мкм}, \quad f = \omega/2\pi = 20 \text{ кГц}, \quad R_0 = 0,475 \cdot 10^{-2} \text{ м}. \quad (12)$$

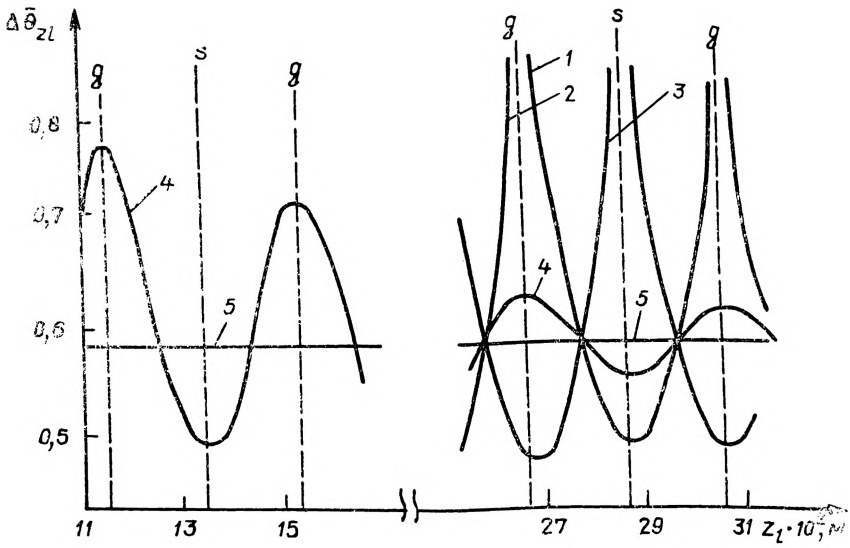
Для этих данных имеем оценки $\Omega \simeq 0,65$, $\Omega = \omega R_0 / (G'/\rho)^{1/2}$ и $R_0/\lambda_E \simeq 0,06$, $\lambda_E = f^{-1} (E'/\rho)^{1/2}$, которые указывают на преимущественно стержневой тип движения, отвечающий решению

$$\tilde{u}_z = u_0 e^{-i\gamma s} \quad (0 \leq z < \infty). \quad (13)$$

На рис. 2, а, б приведены графики изменения действительной (а) и мнимой (б) частей амплитуды осевого перемещения u_z , $u_z = u'_z + iu''_z$. Кривые 1 соответствуют стержневому решению (1), кривые 2 и 3 — решению МКЭ с использованием условий излучения (9) соответственно при $z_l = 0,11$ м и $z_l = 0,13$ м. Точки отвечают результатам, полученным МКЭ с использованием БЭ. Анализ числовых данных показывает, что рассчитанные с использованием БЭ перемещения в трех-четырёх значащих цифрах совпадают с практически точным решением (13) и практически не зависят от выбора параметра z_l , тогда как при использовании условий (9) наблюдаются некоторые расхождения (для мнимой части заметные) в зависимости от значения z_l . Они уменьшаются с увеличением z_l .



Р и с. 2.



Р и с. 3

Виброразогрев цилиндра описывается краевой задачей теплопроводности

$$c_v \dot{\theta} = \text{div} (k \text{ grad } \theta) + \bar{D};$$

$$\begin{aligned} \bar{D} = \frac{\omega}{2} \left[2G'' (|\tilde{\varepsilon}_{rr}|^2 + |\tilde{\varepsilon}_{zz}|^2 + |\tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi}|^2 + 2|\tilde{\varepsilon}_{rz}|^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} (K'' - 2G'') |\varepsilon_{rr} + \tilde{\varepsilon}_{zz} + \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi}|^2 \right]; \end{aligned} \quad (14)$$

$$k\theta_{,z} - \alpha_1(\theta - \theta_0) = 0 \quad z = 0, \quad 0 < r < R_0,$$

$$k\theta_{,r} + \alpha_2(\theta - \theta_0) = 0 \quad r = R_0 \quad z > 0;$$

$$\theta = \theta_0 \quad t = 0.$$

Здесь $|\tilde{\varepsilon}_{rr}|^2 = \varepsilon_{rs}^2 + \varepsilon_{rr}^2, \dots$; $c_v, k, \alpha_{1,2}$ — коэффициенты объемной теплоемкости, теплопроводности и теплообмена; θ_0 — температура окружающей среды.

Принимались следующие значения параметров: $c_v = 2,25 \times 10^6$ Дж/м³°С, $k = 0,5$ Дж/м·°С; $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 8,8$ Вт/м²°С.

Задача (14) также решалась МКЭ с использованием неявной схемы по времени. Для оценки влияния типа условий (6)–(9) на уровень виброразогрева использовался усредненный температурный параметр $\Delta\bar{\theta}_{z_c}$

$$\Delta\bar{\theta}_{z_c} = 2 \int_0^{R_0} \int_0^{z_c} (\theta - \theta_0) r dr dz / R_0^2 z_c,$$

причем температура θ вычисляется в момент $t = 0,01$ с при $z_c = 0,03$ м.

На рис. 3 показаны графики $\Delta\theta_z$ в зависимости от размеров конечной области и заданных при $z = z_l$ граничных условий. Кривые 1 и 2, которые совпали в принятом масштабе, отвечают весьма близким для стержневых движений условиям (6) и (7). Кривые 3 соответствуют условию свободной границы (8), а кривые 4, 5 — условиям (9) и бесконечному элементу. Штриховыми линиями показаны резонансы при $f = 20$ кГц длины стержня — $l_{fc} = (2n-1)c_E/4f$ — в случае защемленного и свободного краев (помечены буквой *s*) и $l_{cc} = nc_E/2f$ — в случае обоих защемленных краев (помечены буквой *q*), $c_E = (E'/\rho)^{1/2}$, $n = 1, 2, \dots$

Приведенные данные указывают на ярко выраженный резонансный характер зависимости уровня разогрева от размера z_l в случае стандартных условий (6)–(8), несколько сглаженную зависимость для условий (9) и практически не зависящее от z_l решение, использующее БЭ.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто низькочастотні коливання і вібророзігрів напівнескінченного в'язкопружного циліндра, який збуджується на торці. При реалізації задачі методом кінцевих елементів область розбивається на скінченну, для якої використовується звичайна процедура побудови розв'язку і нескінченну, для побудови розв'язку в якій використовується стержньова хвильова мода.

SUMMARY. Low-frequency oscillations and vibroheating of semiinfinite viscoelastic cylinder excited at the end are considered. When realizing the problem by the method of finite elements the region is divided into finite for which an ordinary procedure for construction of the solution is used and into infinite for which a rod wave mode is used to construct solution.

1. Белоконь О. М. Решение задач теории упругости для полупространства методом конечных элементов // Мат. исслед.— 1988.— № 101.— С. 24—29.
2. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.— Киев: Наук. думка, 1981.— 284 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.— М. Мир, 1975.— 541 с.
4. Козлов В. И., Якименко С. Н. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел вращения при осесимметричном гармоническом деформировании // Прикл. механика.— 1989.— 25, № 5.— С. 22—28.
5. Мирсаидов М. Решение задачи Лэмба методом конечных элементов с использованием условий излучения // Механика деформируемого твердого тела.— Томск, 1987.— С. 126—131.
6. Новацкий В. Теория упругости.— М.: Мир, 1975.— 872 с.
7. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов.— М.: Мир, 1979.— 392 с.
8. Сенченков И. К., Козлов В. И., Рубцова И. Г., Олейников А. Б. Напряженно-деформированное состояние полупространства в окрестности жесткого шара, находящегося под действием нормальной нагрузки // Прикл. механика.— 1988.— 24, № 4.— С. 19—25.
9. Червинко О. П., Сенченков И. К. Гармонические вязкоупругие волны в слое и бесконечном цилиндре // Там же.— 1986.— 22, № 12.— С. 31—37.
10. Medina F., Penzien J. Infinite element for elastodynamics // Earthquake Eng. and Struct.— 1982.— 10, N 5.— P. 699—709.
11. Sochacki J. Absorbing boundary conditions for the elastic wave equations // Appl. Math. and Comput.— 1988.— 28, N 1.— P. 1—14.

Ин-т механики АН Украины, Киев

Поступила 24.10.90.