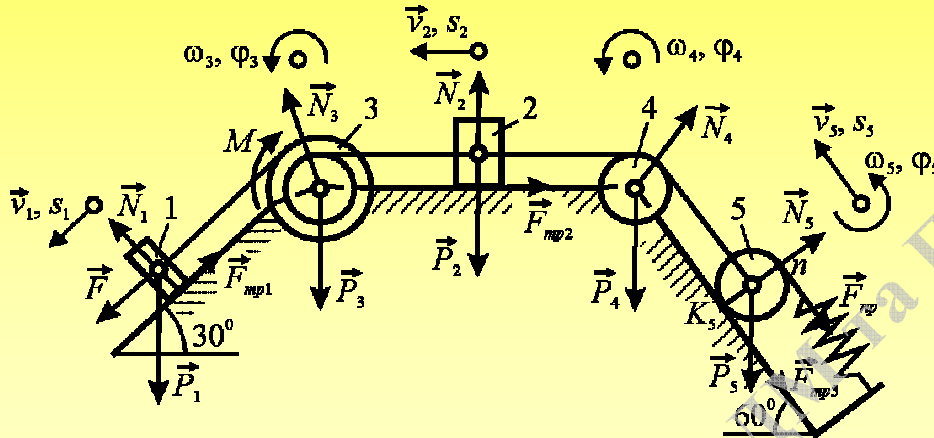
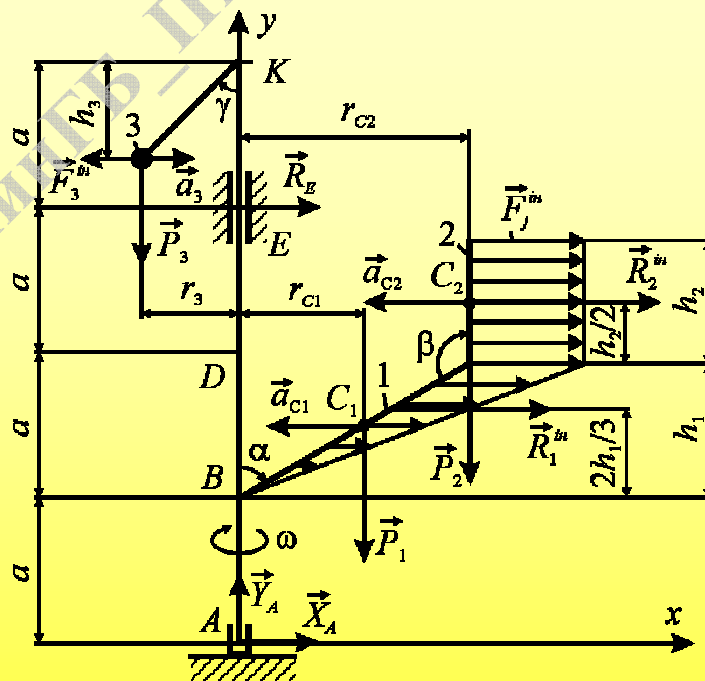


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
 КІРОВОГРАДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ  
 УНІВЕРСИТЕТ



Г. Б. Філімоніхін, В. В. Пірогов

**ПРАКТИКУМ**  
**З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ.**  
**ДИНАМІКА**



Кіровоград - 2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КІРОВОГРАДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра деталей машин та прикладної механіки

Г. Б. Філімоніхін, В. В. Пирогов

**ПРАКТИКУМ  
З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ.  
ДИНАМІКА**

навчальний посібник

Рекомендовано кафедрою  
деталей машин та прикладної  
механіки Кіровоградського  
національного технічного  
університету як навчальний  
посібник для студентів  
машинобудівних, будівельних,  
транспортних спеціальностей.

Протокол № 6 від 04.12.2014 р.

Кіровоград - 2014

Філімоніхін Г. Б., Пирогов В. В. Теоретична механіка. Динаміка: Навч. посібник [електроний ресурс]. – Кіровоград: КНТУ, 2014. – 104 с.: іл.

Табл. 13. Іл. 150. Бібліогр.: 10 назв.

Укладачі: проф., д.т.н. Філімоніхін Геннадій Борисович;  
ст. викл., к.ф.-м.н. Пирогов Володимир Васильович.

Рецензенти: д.т.н., доц. **Шифрін Б.М.**, в.о. професора кафедри механіки й конструкції авіаційної техніки Кіровоградської льотної академії національного авіаційного університету.

## ЗМІСТ

|  |    |
|--|----|
| ПЕРЕДМОВА .....  | 5  |
| ЗАДАЧА Д1 – ДИНАМІКИ ТОЧКИ (ДРУГА ЗАДАЧА ДИНАМІКИ) 6                               | 6  |
| 1.1. Умова задачі, розрахункові дані .....   | 6  |
| 1.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі .....                            | 7  |
| 1.3. Приклад розв'язання задачі Д1 (випадок, коли<br>$R_{on}=\mu v$ ) .....        | 8  |
| 1.4. Приклад розв'язання задачі Д1 (випадок, коли<br>$R_{on}=\mu v^2$ ) .....      | 12 |
| 1.5. Документ MathCad для розв'язання задачі Д1 .....                              | 16 |
| ЗАДАЧА Д2 – КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ПРИ<br>ВІДНОСНОМУ РУСІ .....              | 18 |
| 2.1. Умова задачі, розрахункові дані .....   | 18 |
| 2.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі .....                            | 20 |
| 2.3. Приклад розв'язання задачі Д2 .....   | 22 |
| 2.4. Документ MathCad для розв'язання задачі Д2 .....                              | 26 |
| ЗАДАЧА Д3 – ТЕОРЕМА ПРО РУХ ЦЕНТРА МАС МАТЕРІАЛЬНОЇ<br>СИСТЕМИ .....               | 28 |
| 3.1. Умова задачі, розрахункові дані .....   | 28 |
| 3.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі .....                            | 30 |
| 3.3. Приклад розв'язання задачі Д3 .....   | 30 |
| 3.4. Документ MathCad для розв'язання задачі Д3 .....                              | 35 |
| ЗАДАЧА Д4 - ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІЛЬКОСТІ РУХУ<br>МАТЕРІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ .....         | 39 |
| 4.1. Умова задачі, розрахункові дані .....   | 39 |
| 4.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі .....                            | 41 |
| 4.3. Приклад розв'язання задачі Д4 .....   | 41 |
| ЗАДАЧА Д5 – ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ МОМЕНТУ КІЛЬКОСТІ<br>РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ..... | 44 |
| 5.1. Умова задачі, розрахункові дані .....   | 44 |
| 5.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі .....                            | 48 |
| 5.3. Приклад розв'язання задачі Д5 .....   | 48 |
| ЗАДАЧА Д6 – ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ<br>МАТЕРІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ .....     | 53 |
| 6.1. Умова задачі, розрахункові дані .....   | 53 |
| 6.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі .....                            | 55 |
| 6.3. Приклад розв'язання задачі Д6 .....   | 55 |

|   |     |
|---|-----|
| ЗАДАЧА Д7 – ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ<br>ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА.....   | 60  |
| 7.1. Умова задачі, розрахункові дані.....   | 60  |
| 7.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі.....  | 62  |
| 7.3. Приклад розв'язання задачі Д7.....   | 62  |
| ЗАДАЧА Д8 – ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА.....  | 66  |
| 8.1. Умова задачі, розрахункові дані.....   | 66  |
| 8.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі.....  | 66  |
| 8.3. Приклад розв'язання задачі Д8.....   | 68  |
| ЗАДАЧА Д9 – ПРИНЦИП МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ.....  | 72  |
| 9.1. Умова задачі, розрахункові дані.....   | 72  |
| 9.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі.....  | 72  |
| 9.3. Приклад розв'язання задачі Д9.....   | 75  |
| ЗАДАЧА Д10 – ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА (ЗАГАЛЬНЕ<br>РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ).....  | 78  |
| 10.1. Умова задачі, розрахункові дані.....  | 78  |
| 10.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі.....   | 80  |
| 10.3. Приклад розв'язання задачі Д10.....   | 80  |
| ЗАДАЧА Д11 – РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА II РОДУ ДЛЯ СИСТЕМИ З<br>ДВОМА СТУПЕНЯМИ ВІЛЬНОСТІ.....  | 84  |
| 11.1. Умова задачі, розрахункові дані.....  | 84  |
| 11.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі.....   | 87  |
| 11.3. Приклад розв'язання задачі Д11.....   | 87  |
| ЗАДАЧА Д12 – РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА II РОДУ ДЛЯ СИСТЕМИ З<br>ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ.....   | 93  |
| 12.1. Умова задачі, розрахункові дані.....  | 93  |
| 12.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі.....   | 95  |
| 12.3. Приклад розв'язання задачі Д12 (1-ий варіант<br>розв'язку (знаходження узагальненої сили<br>через потенціальну енергію))..... | 95  |
| 12.4. Приклад розв'язання задачі Д12 (2-ий варіант<br>розв'язку (знаходження узагальненої сили<br>через елементарну роботу)).....   | 99  |
| ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ З РОЗДІЛУ "ДИНАМІКА".....  | 102 |
| ЛІТЕРАТУРА.....   | 104 |

## Передмова

Теоретична механіка – загальнонаукова дисципліна, яка займає важливе місце в вузівській програмі фундаментальної підготовки спеціалістів. Її розділ "Динаміка" – відносно самостійна частина курсу використовується для вивчення багатьох предметів.

Необхідною умовою успішного оволодіння курсом є виконання індивідуальних домашніх завдань. Задачі треба розв'язувати на протязі семестру відразу після розгляду відповідної теми на лекціях, чи практичних заняттях.

Поточний контроль відбувається шляхом розв'язання типових задач курсу на контрольних і самостійних роботах, які проводяться після закінчення відповідних частин розділу "Динаміка". У посібнику сформульовані типові багатоваріантні задачі та приведені приклади їх розв'язання.

Посібник відповідає діючій робочій програмі з теоретичної механіки, призначений для студентів машинобудівних, будівельних, транспортних спеціальностей і може бути використаний як в навчальному процесі, так і в інженерній практиці.

Дані для розрахунків брати з таблиці варіантів до кожної задачі згідно номеру залікової книжки. Наприклад:

**номер залікової книжки – 6.092304150.**

Останній цифрі 0 відповідає номер рисунка, а передостанній 5 – номер рядку в таблиці вихідних розрахункових даних.

### Зауваження:

- роботи, виконані не за варіантом, або несамостійно не зараховуються;
- допускається видача інших варіантів лектором, або викладачем, що проводить практичні заняття – на першій лекції, або на першому практичному занятті.

В основу навчального посібника покладені багатоваріантні задачі Д1, ... Д12 з методичних вказівок Тарга С.М. [6]. Умови задач перекладені українською мовою, рисунки поліпшені комп'ютерним набором. Докорінним чином змінено методику розв'язання задач – створено типову методику, як правило складену із 5 пунктів, що полегшує процес розв'язання задач і запам'ятовування методик. Задачі Д1, Д2, Д1 обов'язково повинні підтверджуватись розрахунками в середовищі Mathcad.

## Задача Д1 – динаміки точки (друга задача динаміки)

### 1.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Вантаж (в подальшому просто тіло)  $D$  масою  $m$ , отримавши в точці  $A$  початкову швидкість  $v_0$ , рухається по вигнутій трубці  $ABC$  (рис. Д1.0 – Д1.9, табл. Д1). На ділянці  $AB$  на тіло, крім сили ваги, діє постійна сила  $\vec{Q}$  та сила опору середовища  $\vec{R}_{on}$ , що залежить від швидкості тіла  $\vec{v}$  (направлена в протилежну сторону руху). Тертям тіла об трубку на ділянці  $AB$  знехтувати. В точці  $B$  тіло, не змінюючи своєї швидкості, переходить на ділянку  $BC$  трубки, де на нього крім сили ваги діють сила тертя (коефіцієнт тертя  $f_{mp}=0,2$ ) і змінна сила  $\vec{F} = \vec{F}(t)$ , проекція якої  $F_x$  на вісь  $x$  задана в табл. Д1. При розв'язанні задачі врахувати, що  $\alpha=30^\circ$ .

Вважаючи тіло матеріальною точкою і знаючи відстань  $AB=l$  або час  $t_1$  руху від точки  $A$  до точки  $B$ , **знайти** швидкість тіла в точці  $B$  ( $v_B$ ) і закон руху тіла на ділянці  $BC$  ( $x=f(t)$ , де  $x=BD$ ).

Таблиця Д1

| Номер умови | $m, \text{кг}$ | $v_0, \text{м/с}$ | $Q, \text{Н}$ | $R, \text{Н}$ | $l, \text{м}$ | $t_1, \text{с}$ | $F_x, \text{Н}$ |
|-------------|----------------|-------------------|---------------|---------------|---------------|-----------------|-----------------|
| 0           | 2              | 20                | 6             | $0,4v$        | -             | 2,5             | $2 \sin(4t)$    |
| 1           | 2,4            | 12                | 6             | $0,8v^2$      | 1,5           | -               | $6t$            |
| 2           | 4,5            | 24                | 9             | $0,5v$        | -             | 3               | $3 \sin(2t)$    |
| 3           | 6              | 14                | 22            | $0,6v^2$      | 5             | -               | $-3 \cos(2t)$   |
| 4           | 1,6            | 18                | 4             | $0,4v$        | -             | 2               | $4 \cos(4t)$    |
| 5           | 8              | 10                | 16            | $0,5v^2$      | 4             | -               | $-6 \sin(2t)$   |
| 6           | 1,8            | 24                | 5             | $0,3v$        | -             | 2               | $9t^2$          |
| 7           | 4              | 12                | 12            | $0,8v^2$      | 2,5           | -               | $-8 \cos(4t)$   |
| 8           | 3              | 22                | 9             | $0,5v$        | -             | 3               | $2 \cos(2t)$    |
| 9           | 4,8            | 10                | 12            | $0,2v^2$      | 4             | -               | $-6 \cos(4t)$   |

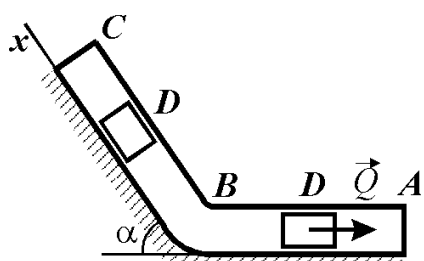


Рис. Д1.0

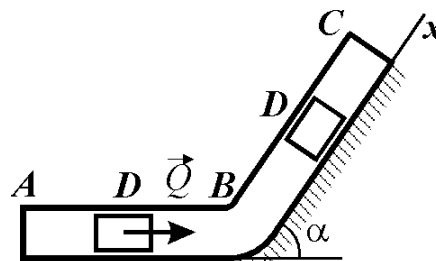


Рис. Д1.1

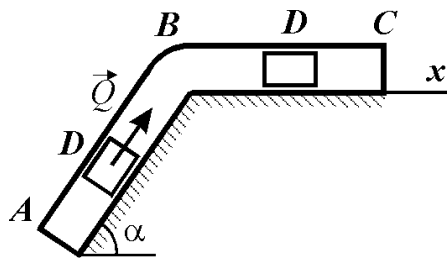


Рис. Д1.2

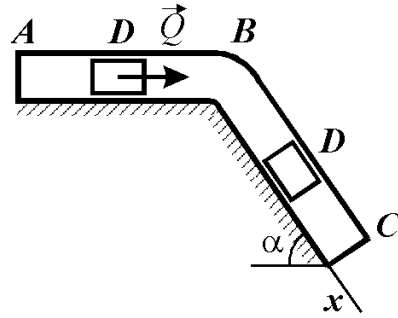


Рис. Д1.3

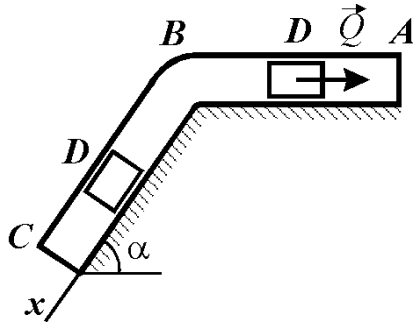


Рис. Д1.4

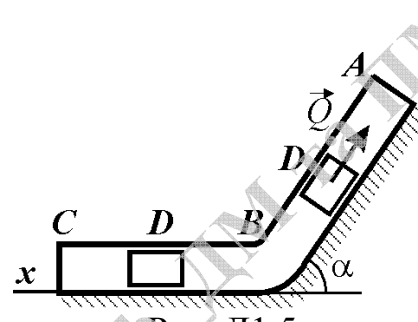


Рис. Д1.5

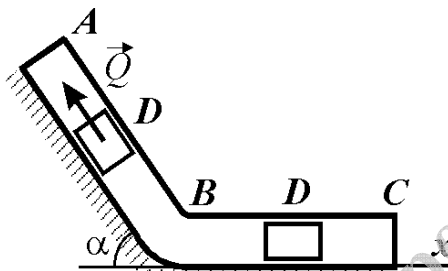


Рис. Д1.6

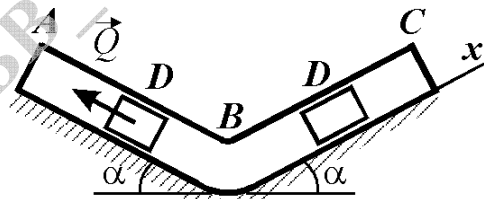


Рис. Д1.7

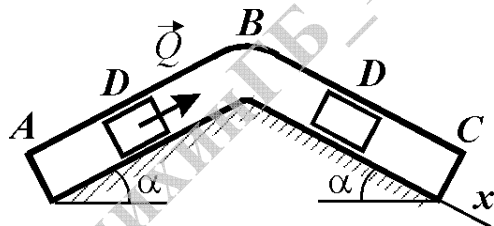


Рис. Д1.8

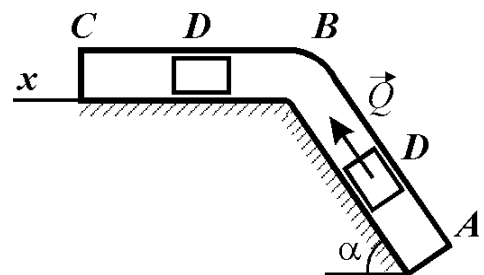


Рис. Д1.9

## 1.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача Д1 – на інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки (в даній задачі розмірами тіла нехтуємо і розглядаємо його як матеріальну точку, в подальшому просто (МТ)). Досліджуючи рух МТ доцільно розбити вирішення задачі на дві частини. Спочатку необхідно скласти та проінтегрувати методом розділення змінних диференціальне рівняння руху МТ, враховуючи початкові умови руху. Потім, знаючи час руху МТ на ділянці  $AB$  або її довжину, визначаємо



швидкість МТ в точці  $B$ . Ця швидкість буде початковою для руху МТ на ділянці  $BC$ . Після цього складаємо та інтегруємо диференціальне рівняння руху МТ на ділянці  $BC$ , ведучи відлік часу, коли МТ знаходилась в точці  $B$ . При інтегруванні рівняння руху на ділянці  $AB$  у випадку, коли відома довжина  $l$  ділянки, доцільно перейти до змінної  $y$ , врахувавши, що

$$\frac{dv_y}{dt} = v_y \frac{dv_y}{dy}.$$

### 1.3. Приклад розв'язання задачі Д1 (випадок, коли $R_{on} = \mu v$ )

**Умова задачі.** Вантаж  $D$  масою  $m$ , отримавши в точці  $A$  початкову швидкість  $v_0$ , рухається по вигнутій трубці  $ABC$  (рис. Д1а). На ділянці  $AB$  на тіло, крім сили ваги, діє постійна сила  $\vec{Q}$  та сила опору середовища  $\vec{R}_{on}$ , яка пропорційна швидкості  $\vec{v}$  тіла. Тертям тіла об трубку на ділянці  $AB$  знехтувати. В точці  $B$  тіло, не змінюючи своєї швидкості, переходить на ділянку  $BC$  трубки, де на нього крім сили ваги діють сила тертя і змінна сила  $\vec{F} = \vec{F}(t)$ .

**Дано:**  $m=1,5$  кг;  $g=9,81$  м/с<sup>2</sup>;  $Q=20$  Н;  $\alpha=60^\circ$ ;  $f_{mp}=0,2$ ;  $F_x=5\sin(3t)$  Н;  $v_0=15$  м/с;  $R_{on}=\mu v$ , де  $\mu=0,35$  кг/с;  $t_1=2$  с.

**Знайти:** швидкість тіла в точці  $B$  ( $v_B$ ) і закон руху тіла на ділянці  $BC$  ( $x=f(t)$ , де  $x=BD$ ).

#### Розв'язок

##### 1. Розглянемо рух МТ на ділянці $AB$ .

##### 1. Побудова розрахункової схеми (рис. Д1б).

Вводимо осі  $y$  та  $z$ , відносно яких будемо вивчати рух МТ. Прикладаємо до МТ активні сили  $\vec{Q}$ ,  $\vec{P}$  (сила ваги),  $\vec{R}_{on}$  (сила опору), та реакції в'язей (на ділянці  $AB$  реакція в'язі відсутня).

##### 2. Складання диференціального рівняння руху МТ.

2.1. Векторна форма диференціального рівняння:

$$m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{P} + \vec{R}_{on}. \quad (1a)$$

2.2. Координатна форма диференціального рівняння (для цього споектуємо рівняння (1a) на осі  $y$  та  $z$ )

$$y: m\ddot{y} = Q - P - R_{on}, \text{ тут } P=mg;$$

$$z: 0 = 0. \quad (2a)$$

Зауважимо, що в рівнянні всі змінні сили необхідно обов'язково виражати через величини від яких вони залежать.

Перетворимо перше диференціальне рівняння системи (2a). Враховуючи, що  $\ddot{y} = dv_y/dt$  та  $v_y = v$ , матимемо:

$$m \frac{dv}{dt} = Q - mg - \mu v. \quad (3a)$$

Поділимо на  $m$  праву і ліву частину диференціального рівняння (3a), отримаємо:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{m} v + \frac{Q}{m} - g,$$

або після перетворень

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{m} \left( v - \frac{Q - mg}{\mu} \right). \quad (4a)$$

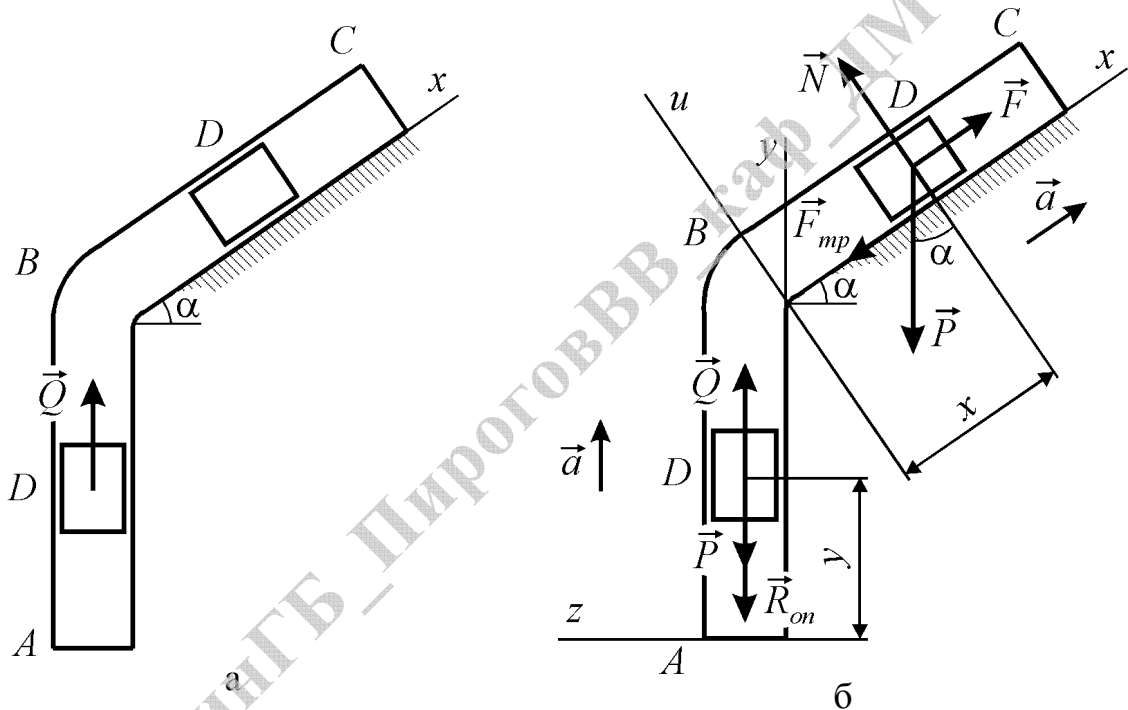


Рис. Д1 Схеми руху вантажа: а – вихідна схема; б – розрахункова схема

Введемо нові позначення:

$$k = \mu / m ; \quad b = (Q - mg) / \mu. \quad (5a)$$

Із врахуванням (5a), диференціальне рівняння (4a) матиме вигляд:

$$\frac{dv}{dt} = -k(v - b). \quad (6a)$$

### 3. Інтегрування диференціального рівняння руху МТ.

Розділимо змінні  $v$  та  $t$  у рівнянні (6a) помноживши праву і ліву частину рівняння на дріб вигляду  $dt/(v-b)$ , матимемо

$$\frac{dv}{(v-b)} = -k dt ; \quad \int \frac{dv}{(v-b)} = -k \int dt .$$

Після інтегрування отримаємо

$$\ln(v-b) = -kt + C_1. \quad (7a)$$

Отримане рівняння (7a) є першим інтегралом.

**4. Знаходження сталих інтегрування та невідомої величини (швидкості  $v_B$ ).**

Знайдемо спочатку сталу інтегрування  $C_1$ . Враховуючи початкові умови руху МТ, при  $t_0=0$ ,  $y_0=0$  м;  $v_0=15$  м/с, з першого інтегралу (7a) отримаємо:  $C_1=\ln(v_0-b)$ . З урахуванням знайденої сталої інтегрування  $C_1$  перший інтеграл (7a) матиме вигляд:  $\ln(v-b)=-kt+\ln(v_0-b)$ . Після перетворень отримаємо

$$\ln \frac{(v-b)}{(v_0-b)} = -kt \Rightarrow \frac{(v-b)}{(v_0-b)} = e^{-kt}.$$

Приймаємо, що  $v=v_B$ , тоді:

$$v_B = e^{-kt} (v_0 - b) + b.$$

**5. Проведення розрахунків.** Знайдемо коефіцієнти  $k$  та  $b$ :

$$k = 0,35 / 1,5 = 0,23 \text{ с}^{-1}, \quad b = (20 - 1,5 \cdot 9,81) / 0,35 = 15,1 \text{ м/с}.$$

При  $t=t_1=2$  с, отримаємо:

$$v_B = 2,71^{-0,23 \cdot 2} (15 - 15,1) + 15,1 = 15,04 \text{ м/с}.$$

**II. Розглянемо рух МТ на ділянці ВС.** (Порядок розв'язання задачі на ділянці ВС аналогічний порядку розв'язання задачі на ділянці АВ, наводимо тільки порядковий номер пункту).

1. На ділянці ВС на МТ діють активні сили  $\vec{F}$  (змінна рушійна сила),  $\vec{F}_{mp}$  (сила тертя),  $\vec{P}$  (сила ваги), та реакція в'язі  $\vec{N}$ .

2. 2.1. Векторна форма диференціального рівняння:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{mp} + \vec{N} + \vec{P}.$$

2.2. Координатна форма диференціального рівняння:

$$x: m\ddot{x} = m \frac{dv_x}{dt} = F_x - F_{mp} - P \sin \alpha;$$

$$u: 0 = N - P \cos \alpha, \text{ звідки } N = P \cos \alpha, \quad (8a)$$

де в (8a):  $P=mg$ ,  $F_{mp}=f_{mp}N=f_{mp}mg \cos \alpha$ .

Перетворимо диференціальне рівняння руху МТ з урахуванням виразів активних сил, матимемо:

$$m \frac{dv_x}{dt} = 5 \sin(3t) - mg(f_{mp} \cos \alpha + \sin \alpha). \quad (9a)$$

Поділимо праву і ліву частину рівняння (9a) на  $m$ , отримаємо:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{5}{m} \sin(3t) - g(f_{mp} \cos \alpha + \sin \alpha). \quad (10a)$$

Розділимо змінні  $v_x$  та  $t$  у рівнянні (10а) помноживши праву і ліву його частину на  $dt$ , отримаємо:

$$dv_x = \left[ \frac{5}{m} \sin(3t) - g(f_{mp} \cos \alpha + \sin \alpha) \right] dt . \quad (11a)$$

3. Проінтегруємо диференціальне рівняння (11а).

$$\int dv_x = \int \left[ \frac{5}{m} \sin(3t) - g(f_{mp} \cos \alpha + \sin \alpha) \right] dt , \text{ звідки}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{5}{3m} \cos(3t) - gt(f_{mp} \cos \alpha + \sin \alpha) + C_2 . \quad (12a)$$

Отримане рівняння (12а) є першим інтегралом.

Розділимо змінні  $x$  та  $t$  у рівнянні (12а) помноживши праву і ліву частину рівняння на  $dt$ , отримаємо:

$$dx = \left[ -\frac{5}{3m} \cos(3t) - gt(f_{mp} \cos \alpha + \sin \alpha) + C_2 \right] dt . \quad (13a)$$

Проінтегруємо рівняння (13а).

$$\int dx = \int \left[ -\frac{5}{3m} \cos(3t) - gt(f_{mp} \cos \alpha + \sin \alpha) + C_2 \right] dt , \text{ звідки}$$

$$x = -\frac{5}{9m} \sin(3t) - g \frac{t^2}{2} (f_{mp} \cos \alpha + \sin \alpha) + C_2 t + C_3 . \quad (14a)$$

Отримане рівняння (14а) є другим інтегралом.

4. Враховуючи початкові умови руху МТ

$$t_0=0, \quad x_0=0, \quad v(0)=v_B,$$

з першого (12а) та другого (14а) інтегралу, отримаємо

$$v_B = -\frac{5}{3m} - 0 + C_2, \quad 0 = -0 - 0 + 0 + C_3, \text{ звідки}$$

$$C_2 = v_B + \frac{5}{3m}, \quad C_3 = 0 .$$

5. З урахуванням вихідних даних знайдемо сталі інтегрування:

$$C_2 = 15,04 + 5/(3 \cdot 1,5) \approx 16,15, \quad C_3 = 0.$$

Отже, остаточно закон руху МТ на ділянці ВС, після підстановки сталих інтегрування та вихідних даних, матиме вигляд:

$$x = -\frac{5}{9 \cdot 1,5} \sin(3t) - 9,81 \frac{t^2}{2} (0,2 \cdot 0,5 + 0,866) + 16,15t \text{ або}$$

$$x = -0,37 \sin(3t) - 4,738t^2 + 16,15t ,$$

де  $x$  – в метрах,  $t$  – в секундах.

**Відповідь:**  $x = -0,37 \sin(3t) - 4,738t^2 + 16,15t$  [м].

#### 1.4. Приклад розв'язання задачі Д1 (випадок, коли $R_{on}=\mu v^2$ )

**Умова задачі.** Вантаж  $D$  масою  $m$ , отримавши в точці  $A$  початкову швидкість  $v_0$ , рухається по вигнутій трубці  $ABC$  (рис. Д1а). На ділянці  $AB$  на тіло, крім сили ваги, діє постійна сила  $\vec{Q}$  та сила опору середовища  $\vec{R}_{on}$ , яка пропорційна квадрату швидкості  $\vec{v}$  тіла. Тертям тіла об трубку на ділянці  $AB$  знехтувати. В точці  $B$  тіло, не змінюючи своєї швидкості, переходить на ділянку  $BC$  трубки, де на нього крім сили ваги діють сила тертя і змінна сила  $\vec{F} = \vec{F}(t)$ .

**Дано:**  $m=2$  кг;  $g=9,81$  м/с<sup>2</sup>;  $Q=5$  Н;  $\alpha=30^\circ$ ;  $f_{mp}=0,2$ ;  $F_x=16\sin(4t)$  Н;  $v_0=5$  м/с;  $R_{on}=\mu v^2$ , де  $\mu=0,4$  кг/с;  $l=2,5$  м.

**Знайти:** швидкість тіла в точці  $B$  ( $v_B$ ) і закон руху тіла на ділянці  $BC$  ( $x=f(t)$ , де  $x=BD$ ).

#### Розв'язок

##### 1. Розглянемо рух МТ на ділянці AB.

##### 1. Побудова розрахункової схеми (рис. Д1г).

Вводимо осі  $y$  та  $z$ , відносно яких будемо вивчати рух МТ. Прикладаємо до МТ активні сили  $\vec{Q}$ ,  $\vec{P}$  (сила ваги),  $\vec{R}_{on}$  (сила опору), та реакції в'язей (на ділянці  $AB$  реакція в'язі відсутня).

##### 2. Складання диференціального рівняння руху МТ.

##### 2.1. Векторна форма диференціального рівняння:

$$m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{P} + \vec{R}_{on}. \quad (16)$$

2.2. Координатна форма диференціального рівняння (для цього споектуємо рівняння (16) на осі  $y$  та  $z$ ):

$$y: m\ddot{y} = Q + P - R_{on}, \text{ тут } P=mg;$$

$$z: 0 = 0. \quad (26)$$

Зауважимо, що в рівнянні всі змінні сили необхідно обов'язково виражати через величини від яких вони залежать.

Перетворимо перше диференціальне рівняння системи (26).

Враховуючи, що  $\ddot{y} = dv_y/dt$  та  $v_y=v$ , матимемо:

$$m \frac{dv}{dt} = Q + mg - \mu v^2. \quad (36)$$

Поділимо на  $m$  праву і ліву частину диференціального рівняння (36), отримаємо:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{m} v^2 + \frac{Q}{m} + g,$$

або після перетворень

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{m} \left( v^2 - \frac{Q+mg}{\mu} \right). \quad (46)$$

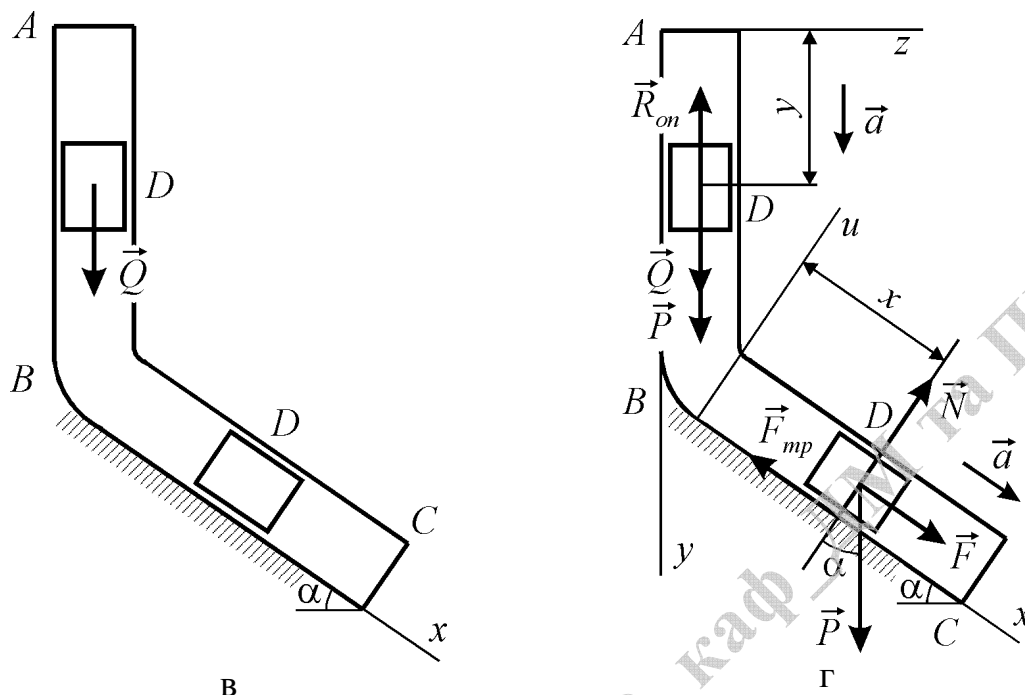


Рис. Д1 Схеми руху вантажа:  
в – вихідна схема; г – розрахункова схема

Введемо нові позначення:

$$k = \mu / m ; \quad b = (Q + mg) / \mu . \quad (56)$$

Із врахуванням (56), диференціальне рівняння (46) матиме вигляд:

$$\frac{dv}{dt} = -k(v^2 - b). \quad (66)$$

### 3. Інтегрування диференціального рівняння руху МТ.

Перейдемо в рівнянні (66) від змінних  $t, v$  до змінних  $y, v$  (так як в умові задачі задано не час, а довжина ділянки  $AB$ ), для цього скористаємося співвідношенням

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy}.$$

Після перетворення рівняння (66) матиме вигляд:

$$v \frac{dv}{dy} = -k(v^2 - b). \quad (76)$$

Розділимо змінні  $v$  та  $y$  у рівнянні (76) домноживши праву і ліву частину рівняння на дріб вигляду  $2dy/(v^2-b)$ , матимемо

$$\frac{2v dv}{(v^2 - b)} = -2k dy ; \quad 2 \int \frac{v dv}{(v^2 - b)} = -2k \int dy .$$

Після інтегрування отримаємо

$$\ln(v^2 - b) = -2ky + C_1. \quad (8б)$$

Отримане рівняння (8б) є першим інтегралом.

**4. Знаходження сталих інтегрування та невідомої величини (швидкості  $v_B$ ).**

Знайдемо сталу інтегрування  $C_1$ . Враховуючи початкові умови руху МТ, при  $t_0=0$ ,  $y_0=0$  м,  $v_0=5$  м/с, з першого інтегралу (8б) отримаємо:  $C_1=\ln(v_0^2-b)$ . З урахуванням знайденої сталої інтегрування  $C_1$  перший інтеграл (8б) матиме вигляд:  $\ln(v^2 - b) = -2ky + \ln(v_0^2 - b)$ .

Після перетворень отримаємо

$$\ln \frac{(v^2 - b)}{(v_0^2 - b)} = -2ky \Rightarrow \frac{(v^2 - b)}{(v_0^2 - b)} = e^{-2ky}.$$

Приймаємо, що  $v=v_B$  і  $y=l$ , тоді:

$$v_B = \sqrt{e^{-2kl} (v_0^2 - b) + b}.$$

**5. Проведення розрахунків.** Знайдемо коефіцієнти  $k$  та  $b$ :

$$k = 0,4 / 2 = 0,2 \text{ м}^{-1}; \quad b = (5 + 2 \cdot 9,81) / 0,4 = 61,55 \text{ м}^2/\text{с}^2.$$

При  $l=2,5$  м, отримаємо:

$$v_B = \sqrt{2,71^{-2 \cdot 0,2 \cdot 2,5} (5^2 - 61,55) + 61,55} \approx 6,93 \text{ м/с}.$$

## **II. Розглянемо рух МТ на ділянці ВС.**

1. На ділянці  $BC$  на МТ діють активні сили  $\vec{F}$  (змінна рушійна сила),  $\vec{F}_{mp}$  (сила тертя),  $\vec{P}$  (сила ваги), та реакція в'язі  $\vec{N}$ .

2. 2.1. Векторна форма диференціального рівняння:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{mp} + \vec{N} + \vec{P}.$$

2.2. Координатна форма диференціального рівняння:

$$x: m\ddot{x} = m \frac{dv_x}{dt} = F_x - F_{mp} + P \sin \alpha;$$

$$y: 0 = N - P \cos \alpha, \text{ звідки } N = P \cos \alpha, \quad (9б)$$

де в (9б):  $P=mg$ ,  $F_{mp}=f_{mp}N=f_{mp}mg \cos \alpha$ .

Перетворимо диференціальне рівняння руху МТ з урахуванням виразів активних сил, матимемо:

$$m \frac{dv_x}{dt} = 16 \sin(4t) - mg(f_{mp} \cos \alpha - \sin \alpha). \quad (10б)$$

Поділимо праву і ліву частину рівняння (10б) на  $m$ , отримаємо:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{16}{m} \sin(4t) - g(f_{mp} \cos \alpha - \sin \alpha). \quad (11б)$$

Розділимо змінні  $v_x$  та  $t$  у рівнянні (11б) домноживши праву і ліву його частину на  $dt$ , отримаємо:

$$dv_x = \left[ \frac{16}{m} \sin(4t) - g(f_{mp} \cos \alpha - \sin \alpha) \right] dt. \quad (12б)$$

3. Проінтегруємо диференціальне рівняння (12б).

$$\int dv_x = \int \left[ \frac{16}{m} \sin(4t) - g(f_{mp} \cos \alpha - \sin \alpha) \right] dt, \text{ звідки}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{4}{m} \cos(4t) - gt(f_{mp} \cos \alpha - \sin \alpha) + C_2. \quad (13б)$$

Отримане рівняння (13б) є першим інтегралом.

Розділимо змінні  $x$  та  $t$  у рівнянні (13б) домноживши праву і ліву частину рівняння на  $dt$ , отримаємо:

$$dx = \left[ -\frac{4}{m} \cos(4t) - gt(f_{mp} \cos \alpha - \sin \alpha) + C_2 \right] dt. \quad (14б)$$

Проінтегруємо рівняння (14б).

$$\int dx = \int \left[ -\frac{4}{m} \cos(4t) - gt(f_{mp} \cos \alpha - \sin \alpha) + C_2 \right] dt, \text{ звідки}$$

$$x = -\frac{1}{m} \sin(4t) - g \frac{t^2}{2} (f_{mp} \cos \alpha - \sin \alpha) + C_2 t + C_3. \quad (15б)$$

Отримане рівняння (15б) є другим інтегралом.

4. Враховуючи початкові умови руху МТ

$$t_0=0, x_0=0, v(0)=v_B,$$

з першого (13б) та другого (15б) інтегралу, отримаємо:

$$v_B = -\frac{4}{m} - 0 + C_2, \quad 0 = -0 - 0 + 0 + C_3, \text{ звідки}$$

$$C_2 = v_B + \frac{4}{m}, \quad C_3 = 0.$$

5. З урахуванням вихідних даних знайдемо сталі інтегрування:

$$C_2 = 6,93 + 4/2 = 8,93, \quad C_3 = 0.$$

Отже, остаточно закон руху МТ на ділянці  $BC$ , після підстановки сталих інтегрування та вихідних даних, матиме вигляд:

$$x = -\frac{1}{2} \sin(4t) - 9,81 \frac{t^2}{2} (0,2 \cdot 0,866 - 0,5) + 8,93t \text{ або}$$

$$x = -0,5 \sin(4t) + 1,6t^2 + 8,93t,$$

де  $x$  – в метрах,  $t$  – в секундах.

**Відповідь:**  $x = -0,5 \sin(4t) + 1,6t^2 + 8,93t$  [м].



## 1.5. Документ MathCad для розв'язання задачі Д1

Документ Mathcad  
для розв'язання задачі Д1

1. Ділянка АВ:

Проінтегруємо диференціальне рівняння руху точки:

$$\int \frac{2 \cdot v}{(v^2 - b)} dv + \int 2 \cdot k \cdot y \rightarrow \ln(b - v^2) + 2 \cdot k \cdot y \quad \text{- перший інтеграл.}$$

Розв'яжемо перший інтеграл відносно швидкості точки  $v_B$ :

$$\ln(v_B^2 - b) = -2 \cdot k \cdot y + \ln(v_0^2 - b) \text{ solve, } v_B \rightarrow \left( \frac{\sqrt{e^{-2 \cdot k \cdot y} \cdot v_0^2 + b - b \cdot e^{-2 \cdot k \cdot y}}}{-\sqrt{e^{-2 \cdot k \cdot y} \cdot v_0^2 + b - b \cdot e^{-2 \cdot k \cdot y}}} \right)$$

Визначимо швидкість точки  $v_B$ .

Введемо розрахункові дані:

$$v_0 := 5 \quad y := 2.5 \quad \mu := 0.4 \quad Q := 5 \quad m := 2 \quad g := 9.81 \quad f_{\text{мп}} := 0.2 \quad \alpha := 30 \cdot \text{deg}$$

$$k := \frac{\mu}{m} \quad b := \frac{Q + m \cdot g}{\mu}$$

$$\ln(v_B^2 - b) + 2 \cdot k \cdot y - \ln(v_0^2 - b) = 0 \text{ solve, } v_B \rightarrow \begin{pmatrix} 6.936 \\ -6.936 \end{pmatrix}$$

Остаточно, маємо:  $v_B := 6.936$ 

2. Ділянка ВС:

Проінтегруємо праву частину диференціального рівняння руху точки:

$$\int a \cdot \sin(4 \cdot t) - d \cdot t \rightarrow -\frac{a \cdot \cos(4 \cdot t)}{4} - d \cdot t \quad \text{- перший інтеграл.}$$

$$\int -\frac{a \cdot \cos(4 \cdot t)}{4} - d \cdot t \rightarrow -\frac{a \cdot \sin(4 \cdot t)}{16} - \frac{d \cdot t^2}{2} \quad \text{- другий інтеграл.}$$

де введені такі позначення  $a := \frac{16}{m}$   $d := g \cdot (f_{\text{мп}} \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha))$

Знайдемо сталі інтегрування з першого та другого інтегралів.

Переозначимо величини:

$$a := a \quad d := d \quad b := b \quad k := k \quad y := y \quad t_0 := 0 \quad x_0 := 0 \quad v_0 := v_0$$

Введемо початкові умови руху:  $t := t_0 \quad x := x_0 \quad v_x := v_0$

$$C_2 := 1 \quad C_3 := 1$$

Given

$$v_x = \frac{-a}{4} \cdot \cos(4t) - d \cdot t + C_2 \quad x = \frac{-a}{16} \cdot \sin(4t) - \frac{t^2}{2} \cdot d + C_2 \cdot t + C_3$$

$$\text{Find}(C_2, C_3) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{a}{4} + v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Обчислимо знайдені сталі інтегрування  $C_2$  та  $C_3$ .

Введемо розрахункові дані:

$$v_0 := v_B \quad a := \frac{16}{m} \quad a = 8 \quad d := g \cdot (f_{\text{imp}} \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha)) \quad d = -3.206$$

$$\text{Отримаємо: } C_2 := \frac{a}{4} + v_0 \quad C_3 := 0$$

Остаточно закон руху точки має вигляд:

$$t := t \quad a := 8 \quad d := -3.206$$

$$x_{BC}(t) := \frac{-a}{16} \cdot \sin(4t) - \frac{t^2}{2} \cdot d + C_2 \cdot t + C_3$$

$$x_{BC}(t) \rightarrow 1.603 \cdot t^2 - \frac{\sin(4 \cdot t)}{2} + 8.936 \cdot t$$

## Задача Д2 – коливання матеріальної точки при відносному русі

### 2.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Вантаж (в подальшому несьоме тіло) масою  $m$  прикріплений за допомогою трьох пружин, жорсткістю  $c_1, c_2, c_3$ , до підйомника (в подальшому тіло-носії), і здійснює вертикальні коливання (рис. Д2.0 – Д2.9, табл. Д2). Тіло-носіє рухається вертикально за законом

$$z=0,5\alpha_1 t^2+\alpha_2 \sin(pt)+\alpha_3 \cos(pt),$$

де  $z$  – в метрах,  $t$  – в секундах. Вісь  $z$  направлена по вертикалі вгору.

Таблиця Д2

| Номер умови | $m,$<br>кг | $c_1,$<br>$\frac{H}{m}$ | $c_2,$<br>$\frac{H}{m}$ | $c_3,$<br>$\frac{H}{m}$ | $\alpha_1,$<br>$\frac{m}{c^2}$ | $\alpha_2,$<br>м | $\alpha_3,$<br>м | $p,$<br>1/с | $\mu,$<br>$\frac{H \cdot c}{m}$ | $\lambda_0,$<br>м | $v_0,$<br>$\frac{m}{c}$ |
|-------------|------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------------|------------------|------------------|-------------|---------------------------------|-------------------|-------------------------|
| 0           | 1          | 300                     | 150                     | --                      | 0                              | 0,1              | 0                | 15          | 0                               | 0                 | 0                       |
| 1           | 0,8        | --                      | 240                     | 120                     | 1,5g                           | 0                | 0                | --          | 8                               | 0,1               | 0                       |
| 2           | 0,5        | --                      | 100                     | 150                     | 0                              | 0,8              | 0                | 5           | 0                               | 0                 | 4                       |
| 3           | 1          | 240                     | --                      | 160                     | 0                              | 0                | 0,5              | 6           | 0                               | 0                 | 0                       |
| 4           | 0,5        | 80                      | 120                     | --                      | -g                             | 0                | 0                | --          | 6                               | 0,2               | 0                       |
| 5           | 2          | --                      | 400                     | 400                     | 0                              | 0                | 0,1              | 16          | 0                               | 0                 | 0                       |
| 6           | 0,4        | 60                      | --                      | 120                     | -g                             | 0                | 0                | --          | 4                               | 0                 | 2                       |
| 7           | 0,5        | 120                     | --                      | 180                     | 0                              | 0,1              | 0                | 20          | 0                               | 0                 | 0                       |
| 8           | 0,4        | 50                      | 200                     | --                      | 0                              | 0                | 0,2              | 20          | 0                               | 0,2               | 0                       |
| 9           | 1          | 200                     | --                      | 300                     | 1,5g                           | 0                | 0                | --          | 5                               | 0                 | 3                       |

На несьоме тіло крім сили ваги і пружної сили, діє сила в'язкого опору середовища  $R_{on}=\mu v$ , де  $\mu$  – коефіцієнт опору середовища,  $v$  – модуль швидкості несьомого тіла відносно тіла-носія. Умова  $\mu=0$  означає, що сила опору  $R_{on}$  відсутня. Несоме тіло здійснює рух відносно тіла-носія за законом  $x=f(t)$ .

Для запобігання помилок в знаках направити вісь  $x$  в сторону видовження пружини, а несьоме тіло показати в положенні, при якому  $x>0$ , тобто пружина розтягнута.

При розрахунках масою пружин і з'єднувальної планки нехтуємо.

В таблиці позначено:  $\lambda_0$  – деформація (видовження) еквівалентної пружини в початковий момент часу  $t_0=0$ ;  $v_0$  – початкова швидкість несомого тіла відносно тіла-носія. Прочерк в стовпчиках  $c_1, c_2, c_3$  означає, що відповідна пружина відсутня і на схемі не зображується. Якщо при цьому кінець однієї з пружин, яка залишилась, виявиться вільним, його слід прикріпити у відповідному місці або до тіла-носія, або до несомого тіла; те ж саме слід зробити, якщо вільними виявляться з'єднані планкою кінці пружин, які залишились.

**Знайти:** закон вертикальних коливань несомого тіла  $x=f(t)$  та побудувати графік коливань в середовищі Mathcad.

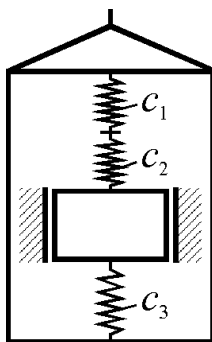


Рис. Д2.0

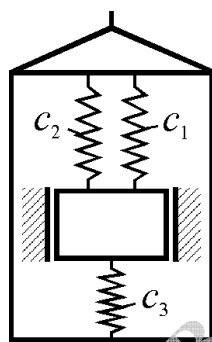


Рис. Д2.1

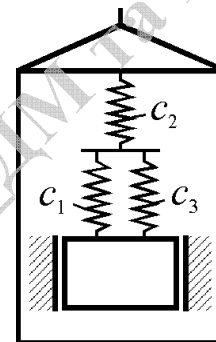


Рис. Д2.2

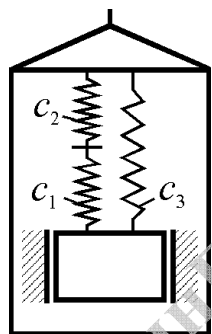


Рис. Д2.3

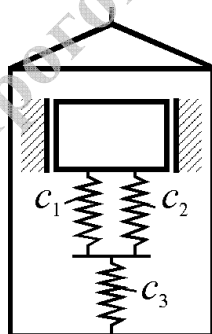


Рис. Д2.4

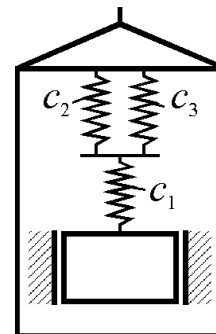


Рис. Д2.5

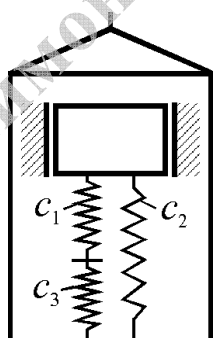


Рис. Д2.6

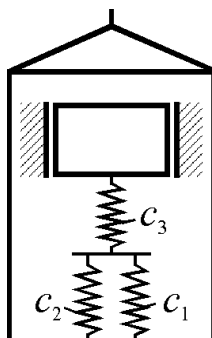


Рис. Д2.7

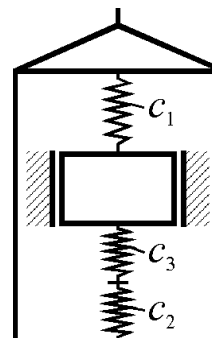


Рис. Д2.8

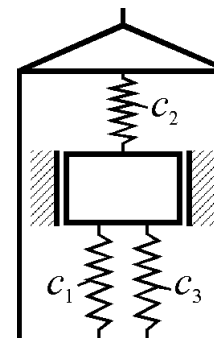


Рис. Д2.9

## 2.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача Д2 охоплює одночасно відносний рух і коливання матеріальної точки (МТ).

1. Спочатку прикріплені до несомого тіла пружини (по умові задачі їх буде дві) замінити еквівалентною пружиною з коефіцієнтом жорсткості  $c$  виконавши відповідний розрахунок.

а) Якщо пружини з'єднані одна з одною послідовно (як пружини жорсткості  $c_1, c_2$  на рис. Д2.0), то при рівновазі під дією деякої сили  $\vec{Q}$ , прикладеної до вільного кінця пружини, зусилля в будь-якому поперечному перерізі пружини однакові і рівні  $\vec{Q}$ . Видовження пружин  $\lambda_1=Q/c_1, \lambda_2=Q/c_2$ , видовження еквівалентної пружини  $\lambda=Q/c$  і  $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ . Звідки  $Q/c=(Q/c_1)+(Q/c_2)\Rightarrow 1/c=(c_1+c_2)/c_1c_2$ , або після перетворень остаточно отримаємо

$$c = c_1c_2 / (c_1 + c_2).$$

б) Якщо несоме тіло прикріплене до двох паралельних пружин (як до пружин жорсткістю  $c_1, c_2$  на рис. Д2.1) або знаходиться між двома пружинами, то при рівновазі під дією деякої сили  $\vec{Q}$  кожна з пружин і еквівалентна пружина мали б одне і те ж видовження  $\lambda$ . Тоді для двох пружин  $Q=c_1\lambda+c_2\lambda$ , а для еквівалентної пружини  $Q=c\lambda$ , звідки

$$c=c_1+c_2.$$

Після визначення жорсткості еквівалентної пружини далі необхідно скласти диференціальне рівняння відносного руху (по відношенню до тіла-носія) розглядуваного в задачі несомого тіла, для чого приєднати до діючих сил переносну силу інерції. Після того як рівняння буде складене (це буде лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку), його необхідно проінтегрувати, врахувавши початкові умови руху.

2. Еквівалентну пружину розташовуємо угорі над вантажем, внаслідок чого отримуємо основну задачу з теорії прямолінійних коливань.

3. При побудові схеми сил та складанні диференціальних рівнянь руху замість несомого тіла розглядатимемо рух МТ.

4. При знаходженні загального інтегралу диференціального рівняння руху та сталих інтегрування, що входять до нього, використовуватимемо такі закони коливань:

- у випадку вільних затухаючих коливань

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0,$$

закон коливального руху має вигляд

$$x = e^{-ht} \left( x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega} \sin \omega t \right);$$

- у випадку вимушених коливань, коли збурна сила змінюється за лінійним законом

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = H, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0,$$

закон коливального руху має вигляд

$$x = x_1 + x_2,$$

де

$$x_1 = e^{-ht} \left( x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega} \sin \omega t \right), \quad x_2 = \frac{H}{\omega_0^2};$$

- у випадку вимушених коливань, коли збурна сила змінюється за синусоїдальним законом

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = H \sin pt, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0,$$

закон коливального руху має вигляд

$$x = x_1 + x_2 + x_3,$$

де

$$x_1 = e^{-ht} \left( x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega} \sin \omega t \right),$$

$$x_2 = \frac{pHe^{-ht}}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} \left[ 2h \cos \omega t + \frac{2h^2 - (\omega_0^2 - p^2)}{\omega} \sin \omega t \right],$$

$$x_3 = \frac{H}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} [(\omega_0^2 - p^2) \sin pt - 2hp \cos pt];$$

- у випадку вимушених коливань, коли збурна сила змінюється за косинусоїдальним законом

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = H \cos pt, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0,$$

закон коливального руху має вигляд

$$x = x_1 + x_2 + x_3,$$

де

$$x_1 = e^{-ht} \left( x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega} \sin \omega t \right),$$

$$x_2 = \frac{He^{-ht}}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} \left[ (\omega_0^2 - p^2) \cos \omega t + \frac{h(\omega_0^2 + p^2)}{\omega} \sin \omega t \right],$$

$$x_3 = \frac{H}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} [(\omega_0^2 - p^2) \cos pt + 2hp \sin pt].$$

В приведених розв'язках приймаємо, що:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}.$$

### 2.3. Приклад розв'язання задачі Д2

**Умова задачі.** Несоме тіло масою  $m$  прикріплене за допомогою трьох пружин, жорсткістю  $c_1, c_2, c_3$ , до тіла-носія, і здійснює вертикальні коливання (рис. Д2а). Тіло-носіє рухається вертикально за законом  $z=0,5\alpha_1 t^2 + \alpha_2 \sin(pt) + \alpha_3 \cos(pt)$ , де  $z$  – в метрах,  $t$  – в секундах. Вісь  $z$  направлена по вертикалі вгору.

На несоме тіло крім сили ваги і пружної сили, діє сила в'язкого опору середовища  $R_{on} = \mu v$ , де  $\mu$  – коефіцієнт опору середовища,  $v$  – модуль швидкості несомого тіла відносно тіла-носія. Несоме тіло здійснює рух відносно тіла-носія за законом  $x=f(t)$ . При розрахунках масою пружин і з'єднувальної планки нехтуємо. Деформація еквівалентної пружини в початковий момент часу рівна  $\lambda_0$ , а початкова швидкість несомого тіла відносно тіла-носія –  $v_0$ .

**Дано:**  $m=0,5$  кг;  $g=9,81$  м/с<sup>2</sup>;  $R_{on}=\mu v$  Н;  $\mu=0,2$  кг/с;  $v_0=1,5$  м/с;  $\lambda_0=0,05$  м;  $c_1=c_2=100$  Н/м;  $c_3=200$  Н/м;  $\alpha_1=0$ ;  $\alpha_2=10$  м;  $\alpha_3=0$ ;  $p=5$  рад/с.

**Знайти:** закон вертикальних коливань несомого тіла  $x=f(t)$  та побудувати графік коливань в середовищі Mathcad.

#### Розв'язок

##### 1. Побудова розрахункової схеми.

1.1. Замінюємо три пружини однією еквівалентною (рис. Д2б). Визначимо жорсткість еквівалентної пружини. Для цього спочатку замінюємо першу і другу пружину на еквівалентну пружину жорсткістю

$$c_{12} = c_1 + c_2 = 100 + 100 = 200 \text{ Н/м};$$

пружину жорсткістю  $c_{12}$  і третю пружину замінюємо на еквівалентну пружину жорсткістю

$$c_{екв} = c = \frac{c_{12} \cdot c_3}{c_{12} + c_3} = \frac{200 \cdot 200}{200 + 200} = 100 \text{ Н/м}.$$

В зв'язку з тим, що несоме тіло здійснює поступальний рух, то замість нього розглянемо рух матеріальної точки (в подальшому просто МТ).

1.2. Будуємо схему деформацій пружини та схему сил, які діють на несоме тіло (рис. Д2в, г). На схемі  $l_0$  – початкова довжина пружини,  $\Delta l_{ст}$  – статична деформація пружини,  $x$  – поточна деформація пружини,  $\Delta l$  – повна деформація пружини,  $l$  – повна довжина пружини з урахуванням деформацій. В подальшому замість руху несомого тіла розглядатимемо рух матеріальної точки або МТ.

**2. Складання диференціального рівняння коливального руху МТ.** Так як МТ здійснює складний рух, то за теоремою Коріоліса

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c, \quad (1)$$

де  $\vec{a}_r, \vec{a}_e, \vec{a}_c$  – відповідно відносне, переносне і коріолісове пришвидшення.

2.1. Векторна форма диференціального рівняння руху має вигляд:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{np} + \vec{R}_{on},$$

або з урахуванням (1)

$$m(\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c) = m\vec{g} + \vec{F}_{np} + \vec{R}_{on}. \quad (2)$$

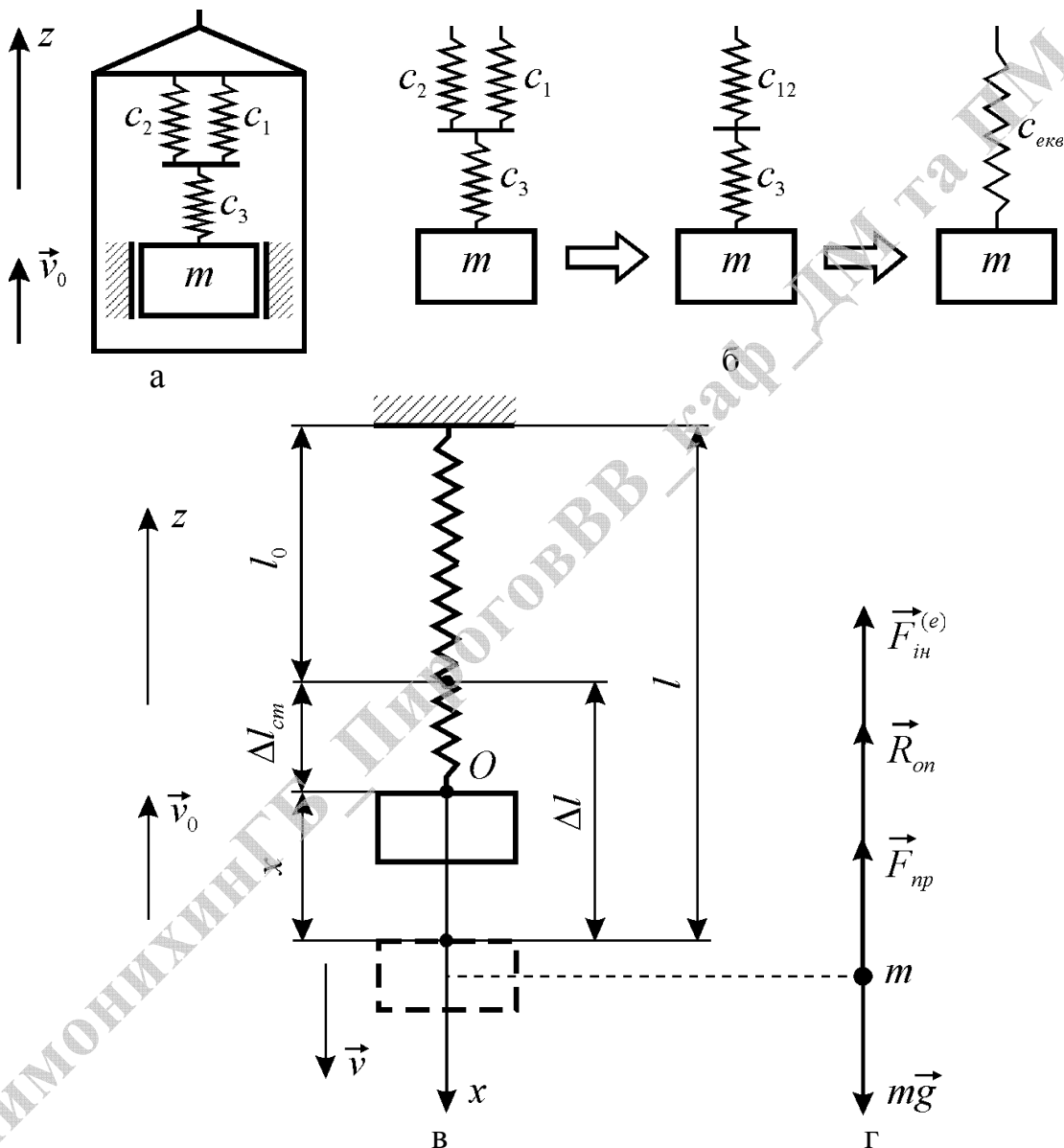


Рис. Д2 Етапи побудови розрахункової схеми коливального руху МТ:  
 а – вихідна схема; б – схема перетворення пружинного блоку;  
 в – схема деформації пружини; г – схема сил діючих на МТ

Перепишемо рівняння (2) у наступному вигляді:

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_{np} + \vec{R}_{on} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c,$$

або



$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_{np} + \vec{R}_{on} + \vec{F}_{in}^{(e)} + \vec{F}_{in}^{(c)}, \quad (3)$$

де в (3)  $\vec{F}_{in}^{(e)}$  – сила інерції переносного руху,  $\vec{F}_{in}^{(c)}$  – сила інерції пришвидшення Коріоліса. Тут

$$\vec{F}_{in}^{(e)} = -m\vec{a}_e, \quad \vec{F}_{in}^{(c)} = -m\vec{a}_c = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r). \quad (4)$$

Враховуючи, що  $\vec{\omega} = 0$ , з (4) отримуємо що  $\vec{F}_{in}^{(c)} = 0$ . Остаточо, диференціальне рівняння (3) матиме вигляд:

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_{np} + \vec{R}_{on} + \vec{F}_{in}^{(e)}. \quad (5)$$

## 2.2. Координатна форма диференціального рівняння руху.

Проведемо вертикальну вісь  $x$  направлену вниз і з початком у положенні статичної рівноваги – в точці  $O$ . Спроекуємо на вісь  $x$  векторне рівняння руху (5), отримаємо:

$$x: m\ddot{x} = mg - F_{np} - R_{on} - F_{in}^{(e)}, \quad (6)$$

де

$$F_{np} = c\Delta l = c(\Delta l_{cm} + x) = c\Delta l_{cm} + cx; \quad R_{on} = \mu v = \mu \dot{x};$$

$$F_{in}^{(e)} = m\ddot{z} = m[\alpha_2 \sin(pt)]'' = -m\alpha_2 p^2 \sin(pt). \quad (7)$$

Диференціальне рівняння руху (6) з урахуванням (7) матиме наступний вигляд:

$$m\ddot{x} = mg - cx - c\Delta l_{cm} - \mu \dot{x} + m\alpha_2 p^2 \sin(pt). \quad (8)$$

Враховуючи, що у положенні статичної рівноваги  $mg = c\Delta l_{cm}$ , рівняння (8) матиме вигляд:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu \dot{x} + F_0 \sin(pt), \quad (9)$$

де в (9)  $F_0 = m\alpha_2 p^2$ . Перенісши в ліву частину рівняння змінну  $x$  та  $\dot{x}$ , і поділивши праву і ліву частину диференціального рівняння руху на  $m$ , матимемо:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = H \sin(pt), \quad (10)$$

де

$$h = \frac{\mu}{2m}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad H = \frac{F_0}{m} = \frac{m\alpha_2 p^2}{m} = \alpha_2 p^2.$$

Рівняння (10) – це диференціальне рівняння вимушених коливань МТ за наявності сил опору.

**3. Визначення початкових умов руху.** Визначимо  $x_0$ . Враховуючи, що  $\Delta l_{cm} = mg/c$ , отримаємо:

$$x_0 + \Delta l_{cm} = \lambda_0, \quad \text{звідки } x_0 = \lambda_0 - \Delta l_{cm} = \lambda_0 - mg/c.$$

Остаточо, початкові умови руху МТ мають вигляд:

$$x_0 = 0,05 - 0,5 \cdot 9,81/100 \approx 0,001 \text{ м}; \quad v_0 = \dot{x}_0 = 1,5 \text{ м/с}. \quad (11)$$

**4. Знаходження загального інтегралу рівняння (10).** Розв'язок рівняння (10), при початкових умовах руху (11), має вигляд:

$$x = x_1 + x_2 + x_3, \quad (12)$$

де

$$x_1 = e^{-ht} \left( x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega} \sin \omega t \right),$$

$$x_2 = \frac{pHe^{-ht}}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} \left[ 2h \cos \omega t + \frac{2h^2 - (\omega_0^2 - p^2)}{\omega} \sin \omega t \right],$$

$$x_3 = \frac{H}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} [(\omega_0^2 - p^2) \sin pt - 2hp \cos pt], \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}.$$

**5. Проведення розрахунків.** Знайдемо значення параметрів  $h$ ,  $H$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega$ , отримаємо:

$$h = \frac{0,2}{2 \cdot 0,5} = 0,2 \text{ рад/с}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{100}{0,5}} = 14,1 \text{ рад/с};$$

$$H = 10 \cdot 5^2 = 250 \text{ м/с}; \quad \omega = \sqrt{14,1^2 - 0,2^2} \approx 14,098 \text{ рад/с}.$$

Після підстановки вихідних даних та відповідних параметрів отримаємо:

$$x_1 = e^{-0,2t} (0,001 \cos 14,098t + 0,106 \sin 14,098t),$$

$$x_2 = e^{-0,2t} (0,0164 \cos 14,098t - 0,501 \sin 14,098t),$$

$$x_3 = 1,44 \sin 5t - 0,0166 \cos 5t. \quad (13)$$

Остаточню, закон коливального руху МТ (12) з урахуванням (13) матиме вигляд:

$$x = e^{-0,2t} (0,0174 \cos 14,098t - 0,395 \sin 14,098t) + 1,44 \sin 5t - 0,0166 \cos 5t \text{ [м]}.$$

**Відповідь:**  $x = e^{-0,2t} (0,0174 \cos 14,098t - 0,395 \sin 14,098t) + 1,44 \sin 5t - 0,0166 \cos 5t \text{ [м]}.$

## 2.4. Документ MathCad для розв'язання задачі Д2

Документ Mathcad  
для розв'язання задачі Д2

1. Введемо розрахункові дані:

$$\underline{m} := 0.5 \quad \underline{g} := 9.81 \quad \underline{\mu} := 0.2 \quad \underline{c} := 100 \quad p := 5 \quad \alpha_2 := 10$$

Початкові умови руху точки:

$$x_0 := 0.001 \quad v_0 := 1.5$$

Нові позначення:

$$h := \frac{\mu}{2 \cdot m} \quad h = 0.2 \quad \omega_0 := \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \omega_0 = 14.142$$

$$\underline{H} := \alpha_2 \cdot p^2 \quad H = 250$$

$$\omega := \sqrt{\omega_0^2 - h^2} \quad \omega = 14.141$$

2. Введення закону коливального руху матеріальної точки:

Частинні розв'язки мають вигляд:

$$x_1(t) := e^{-ht} \cdot \left( x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{v_0 + h \cdot x_0}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) \right)$$

$$x_2(t) := \frac{p \cdot H \cdot e^{-ht}}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4 \cdot h^2 \cdot p^2} \cdot \left[ \begin{array}{l} 2 \cdot h \cdot \cos(\omega \cdot t) \dots \\ 2 \cdot h^2 - (\omega_0^2 - p^2) \\ + \frac{2 \cdot h \cdot (\omega_0^2 - p^2)}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{array} \right]$$

$$x_3(t) := \frac{H}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4 \cdot h^2 \cdot p^2} \cdot \left[ \begin{array}{l} (\omega_0^2 - p^2) \cdot \sin(p \cdot t) \dots \\ + -2 \cdot h \cdot p \cdot \cos(p \cdot t) \end{array} \right]$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$x(t) := x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

Після підстановки вихідних даних та відповідних параметрів отримуємо:

$$x_1(t) \rightarrow e^{-0.2t} \cdot (1 \times 10^{-3} \cdot \cos(14.1407 \cdot t) + 0.1061 \cdot \sin(14.1407 \cdot t))$$

$$x_2(t) \rightarrow -0.0408 \cdot e^{-0.2t} \cdot (-0.4 \cdot \cos(14.1407 \cdot t) + 12.3699 \cdot \sin(14.1407 \cdot t))$$

$$x_3(t) \rightarrow -0.0163 \cdot \cos(5 \cdot t) + 1.4284 \cdot \sin(5 \cdot t)$$

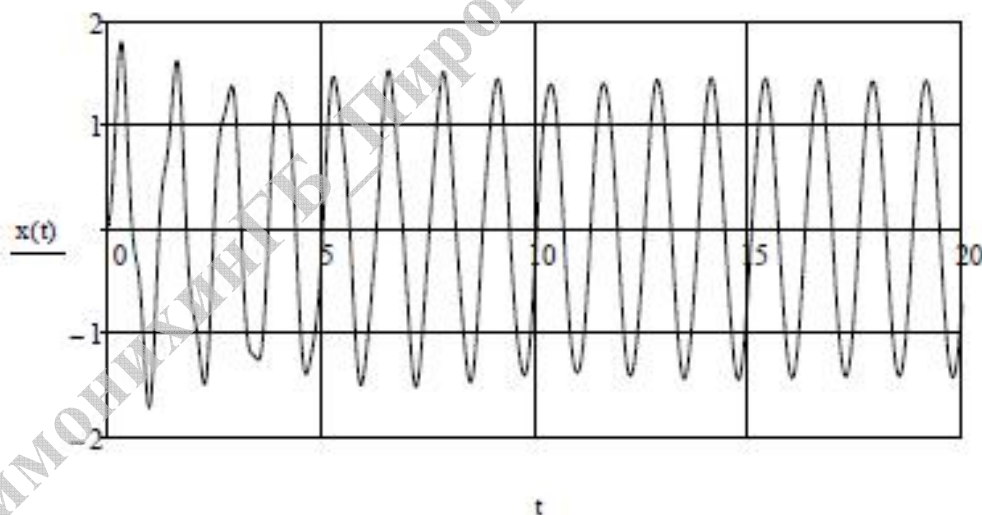
Остаточно, закон коливального руху матеріальної точки матиме вигляд:

$$x(t) \text{ simplify} \rightarrow 1.428 \cdot \sin(5 \cdot t) - 0.016 \cdot \cos(5 \cdot t) + 0.017 \cdot \cos(14.141 \cdot t) \cdot e^{-0.2t} - 0.$$

$$\begin{aligned} x(t) &:= 1.428 \cdot \sin(5 \cdot t) - 0.016 \cdot \cos(5 \cdot t) \dots \\ &+ 0.017 \cdot \cos(14.141 \cdot t) \cdot e^{-0.2t} - 0.399 \cdot \sin(14.141 \cdot t) \cdot e^{-0.2t} \end{aligned}$$

Нижче приведено графік вимушеного коливального руху матеріальної точки за наявності сил опору. На графіку  $t$  - час (с),  $x(t)$  - переміщення матеріальної точки (м).

$$t := 0, 0.0001 \dots 20$$



## Задача Д3 – теорема про рух центра мас матеріальної системи

### 3.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Механічна система складається із вантажів  $D_1$  масою  $m_1=2$  кг і  $D_2$  масою  $m_2=6$  кг, та плити масою  $m_3=12$  кг (рис. Д3.0–Д3.9, табл. Д3). В подальшому вантажі розглядатимемо як матеріальні точки (МТ), а плиту, як абсолютно тверде тіло (АТТ). АТТ рухається вздовж горизонтальних напрямних. В момент часу  $t_0=0$ , коли система знаходилась в стані спокою, під дією внутрішніх сил МТ розпочинають рух по жолобам, що являють собою кола радіусом  $r=0,4$  м і  $R=0,8$  м. При розв’язанні задачі силами опору нехтуємо. При русі МТ кут  $\varphi_1=\angle A_1C_3D_1$  змінюється за законом  $\varphi_1=f_1(t)$ , а кут  $\varphi_2=\angle A_2C_3D_2$  – за законом  $\varphi_2=f_2(t)$  (де  $\varphi$  вимірюється в радіанах, а  $t$  – в секундах).

**Знайти:** закон руху центра мас АТТ  $x_3=f_3(t)$  або повну нормальну реакцію напрямних  $N$ , а також побудувати графіки переміщення центра мас АТТ, вантажів, центра мас системи або зміни нормальної реакції напрямних.

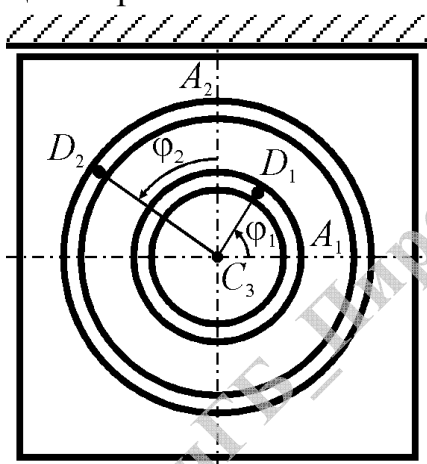


Рис. Д3.0

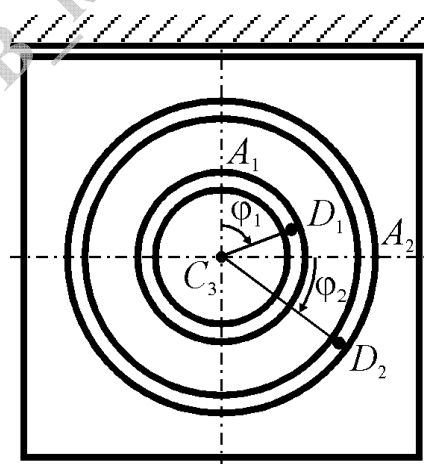


Рис. Д3.1

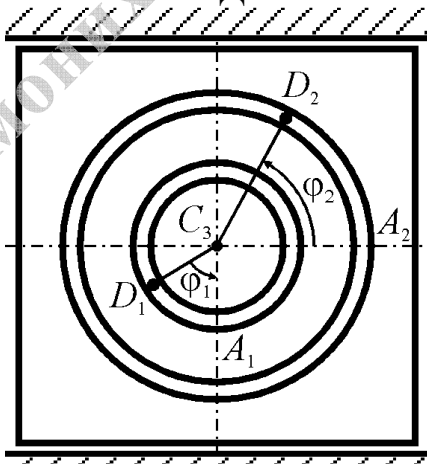


Рис. Д3.2

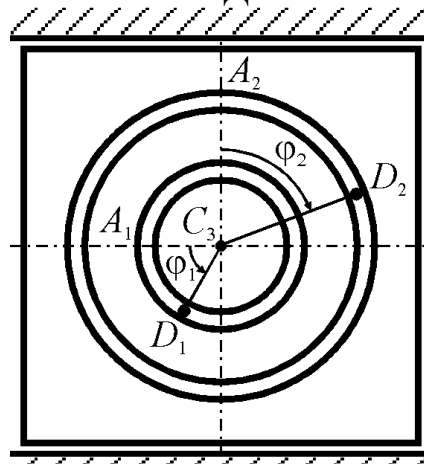


Рис. Д3.3

Таблица Д3

| Номер<br>умови | Рис. 0-4              |                       | Рис. 5-9              |                      | Знайти |
|----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|--------|
|                | $\varphi_1=f_1(t)$    | $\varphi_2=f_2(t)$    | $\varphi_1=f_1(t)$    | $\varphi_2=f_2(t)$   |        |
| 0              | $\frac{\pi}{3}(t+1)$  | $\frac{\pi}{6}(t-2)$  | $\frac{\pi}{2}(3-t)$  | $\frac{\pi}{3}(t+2)$ | $x_3$  |
| 1              | $\pi(2-t)$            | $\frac{\pi}{4}(t+3)$  | $\frac{\pi}{4}(2t-1)$ | $\frac{\pi t}{6}$    | $N$    |
| 2              | $\frac{\pi}{4}(t+2)$  | $\frac{\pi}{6}(5-t)$  | $\frac{\pi}{3}(4-t)$  | $\pi t$              | $x_3$  |
| 3              | $\frac{\pi t}{3}$     | $\frac{\pi}{2}(t-2)$  | $\frac{\pi}{6}(3t-2)$ | $\frac{\pi}{2}(3-t)$ | $N$    |
| 4              | $\frac{\pi}{4}(1-3t)$ | $\frac{\pi}{3}(t-4)$  | $\frac{\pi t}{2}$     | $\frac{\pi}{4}(2-t)$ | $x_3$  |
| 5              | $\frac{\pi}{6}(t+2)$  | $\frac{\pi}{4}(1-t)$  | $\pi(3-t)$            | $\frac{\pi}{6}(t-1)$ | $N$    |
| 6              | $\pi t$               | $\frac{\pi}{6}(1-2t)$ | $\frac{\pi}{4}(2t-3)$ | $\frac{\pi}{3}(2-t)$ | $x_3$  |
| 7              | $\frac{\pi}{3}(5-t)$  | $\frac{\pi}{4}(t+4)$  | $\frac{\pi t}{6}$     | $\frac{\pi}{4}(4-t)$ | $N$    |
| 8              | $\frac{\pi}{6}(t+3)$  | $\frac{\pi}{2}(2-t)$  | $\frac{\pi}{3}(4-t)$  | $\pi(t+2)$           | $x_3$  |
| 9              | $\frac{\pi}{2}(4-t)$  | $\pi(t+5)$            | $\frac{\pi}{6}(2t-1)$ | $\frac{\pi}{2}(2-t)$ | $N$    |

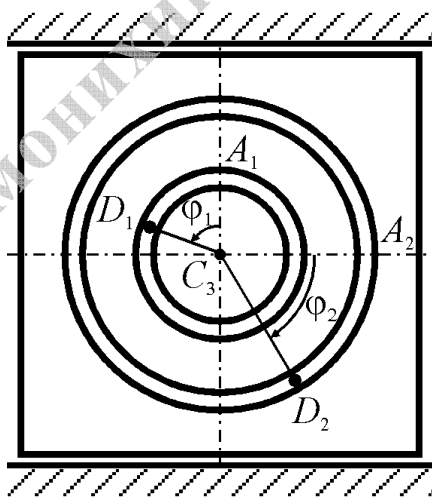


Рис. Д3.4

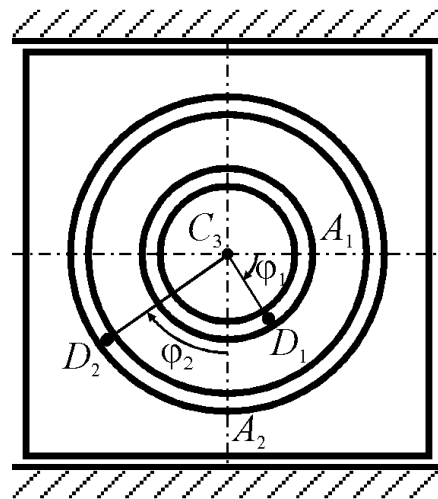


Рис. Д3.5

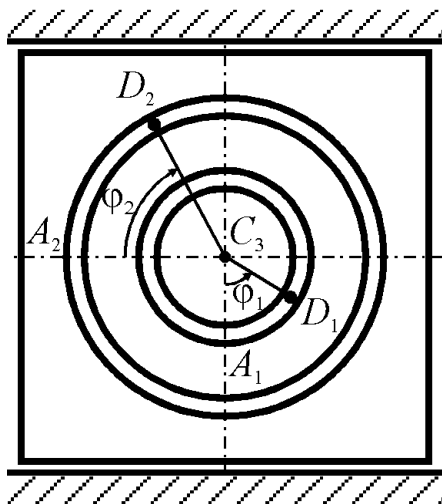


Рис. Д3.6

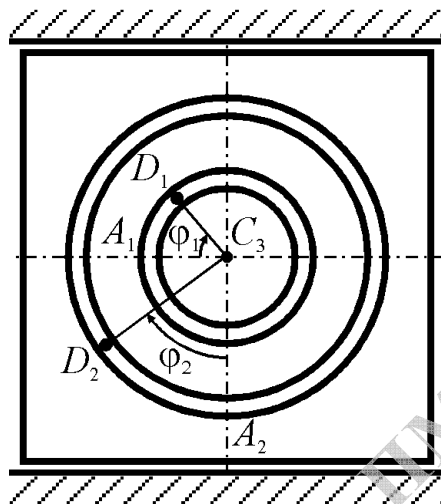


Рис. Д3.7

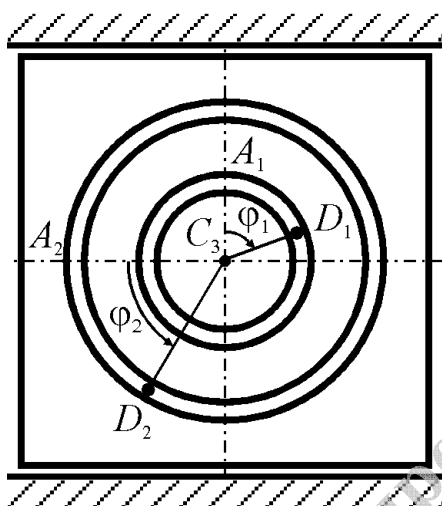


Рис. Д3.8

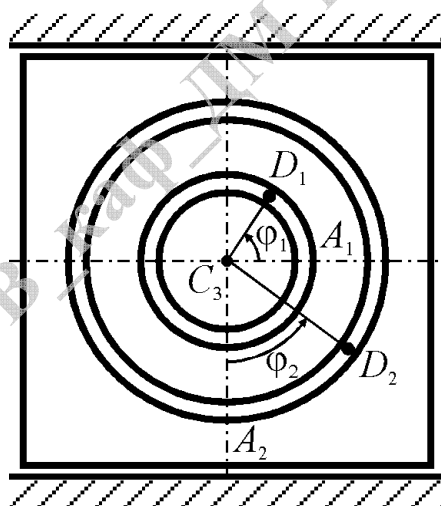


Рис. Д3.9

### 3.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача Д3 – на застосування теореми про рух центра мас системи. При цьому для визначення  $x_3=f_3(t)$  необхідно скласти рівняння в проекції на горизонтальну вісь  $x$ , а для визначення  $N$  – на вертикальну вісь  $y$ .

### 3.3. Приклад розв'язання задачі Д3

**Умова задачі.** Механічна система складається із вантажів  $D_1$  масою  $m_1$  і  $D_2$  масою  $m_2$ , та плити масою  $m_3$  (рис. Д3а). В подальшому вантажі розглядатимемо як матеріальні точки (МТ), а плиту, як абсолютно тверде тіло (АТТ). АТТ рухається вздовж горизонтальних напрямних. В момент часу  $t_0=0$ , коли система знаходилась в стані спокою, під дією внутрішніх сил МТ розпочинають рух по жолобам, що являють собою кола радіусом  $r$  і  $R$  відповідно. При розв'язанні задачі силами опору нехтуємо.

При русі МТ кут  $\varphi_1 = \angle A_1 C_3 D_1$  змінюється за законом  $\varphi_1 = f_1(t)$ , а кут  $\varphi_2 = \angle A_2 C_3 D_2$  – за законом  $\varphi_2 = f_2(t)$  (де  $\varphi$  вимірюється в радіанах, а  $t$  – в секундах).

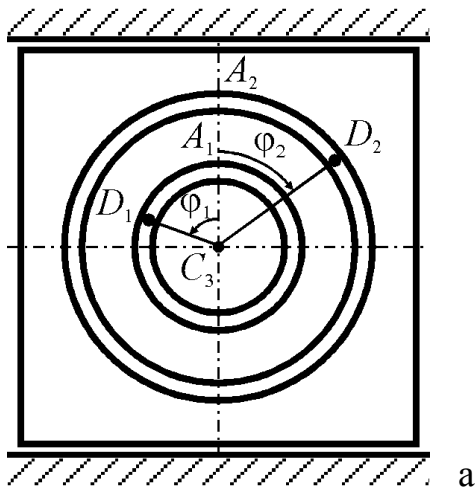
**Дано:**  $m_1 = 4 \text{ кг}$ ;  $m_2 = 1 \text{ кг}$ ;  $m_3 = 10 \text{ кг}$ ;  $r = 0,5 \text{ м}$ ;  $R = 1 \text{ м}$ ;  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ;  $\varphi_1 = \pi t \text{ рад}$ ;  $\varphi_2 = \pi(t+2) \text{ рад}$ ;  $H = 1,2 \text{ м}$ .

**Знайти:** закон руху центра мас АТТ  $x_3 = f_3(t)$  або повну нормальну реакцію напрямних  $N$ .

### Розв'язок

#### I. Знаходження закону руху центра мас АТТ $x_3 = f_3(t)$ .

##### 1. Побудова розрахункової схеми (рис. ДЗб).



1.1. Розглянемо механічну систему, що складається з АТТ і МТ в довільному положенні. Введемо координатні осі  $Ox$  так, щоб вісь  $y$  проходила через точку  $C_{30}$ , де знаходився центр мас АТТ в момент часу  $t_0$ .

1.2. Прикладаємо зовнішні сили, що діють на систему: сили ваги  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{P}_2$ ,  $\vec{P}_3$  і реакцію напрямлючих  $\vec{N}$ .

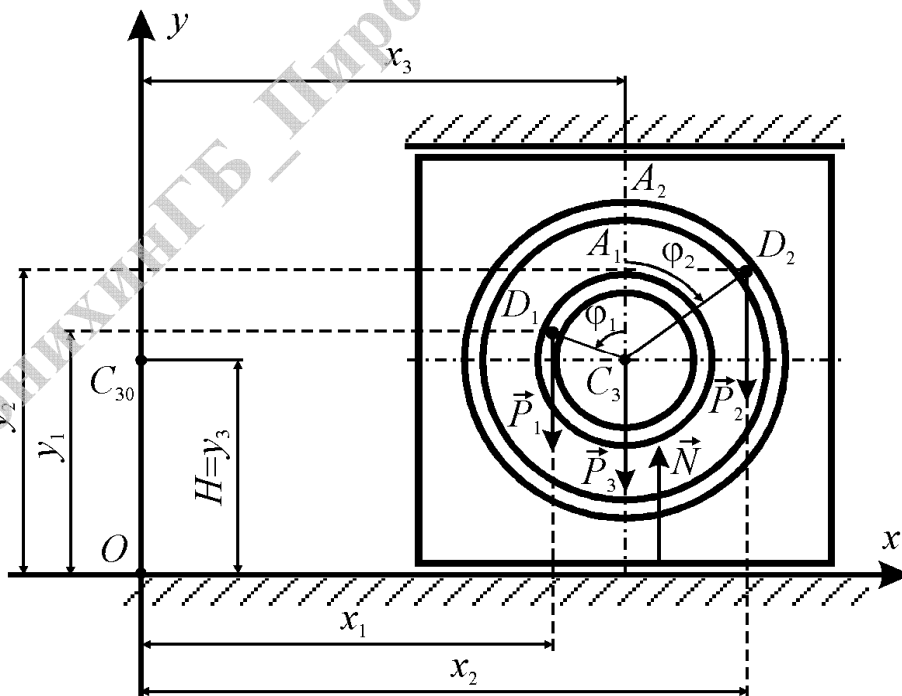


Рис. ДЗ Схема механічної системи:  
а – вихідна схема; б – розрахункова схема



1.3. Визначаємо координати центра мас АТТ та координати МТ відносно осі  $Ox$ .

$$x_3, \quad x_1 = x_3 - r \sin \varphi_1, \quad x_2 = x_3 + R \sin \varphi_2. \quad (1a)$$

## 2. Складання диференціального рівняння руху системи.

2.1. Векторна форма диференціального рівняння.

$$M_{\Sigma} \vec{a}_C = \vec{N} + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3, \quad (2a)$$

де  $M_{\Sigma} = m_1 + m_2 + m_3$  – сумарна маса системи;  $\vec{a}_C$  – пришвидшення центра мас системи. Тут в (2a)  $\vec{P}_i = m_i \vec{g}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

2.2. Координатна форма диференціального рівняння. Для визначення  $x_3 = f_3(t)$  скористаємося теоремою про рух центра мас системи. Складемо диференціальне рівняння руху центра мас системи в проекції на вісь  $Ox$ . Отримаємо

$$x: M_{\Sigma} \ddot{x}_C = 0, \quad (3a)$$

де  $\ddot{x}_C$  – проекція пришвидшення центра мас системи на вісь  $Ox$ .

## 3. Інтегрування диференціального рівняння руху системи та знаходження сталих інтегрування.

3.1. Проінтегруємо диференціальне рівняння (3a), отримаємо:

$$M_{\Sigma} \dot{x}_C = C_1, \quad (4a)$$

$$M_{\Sigma} x_C = C_1 t + C_2, \quad (5a)$$

де  $\dot{x}_C$  – проекція швидкості центра мас системи на вісь  $Ox$ ;  $x_C$  – координата центра мас системи в поточний момент часу відносно осі  $Ox$ . Отримане рівняння (4a) – перший інтеграл, а рівняння (5a) – другий інтеграл.

3.2. Знайдемо сталі інтегрування. Початкові умови руху мають вигляд:

$$t_0 = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad x_C(0) = x_{C0}, \quad \dot{x}_C(0) = 0. \quad (6a)$$

Підставивши початкові умови руху (6a) в перший та другий інтеграл (4a) та (5a) отримаємо:  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = M_{\Sigma} x_{C0}$ .

**4. Визначення координати центра мас системи в поточний ( $x_C$ ) і початковий момент часу ( $x_{C0}$ ).** В поточний момент часу координата  $x_C$  матиме вигляд:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum m_i x_i}{M_{\Sigma}} = \frac{m_1(x_3 - r \sin \varphi_1) + m_2(x_3 + R \sin \varphi_2) + m_3 x_3}{M_{\Sigma}} = \\ &= \frac{M_{\Sigma} x_3 - m_1 r \sin \varphi_1 + m_2 R \sin \varphi_2}{M_{\Sigma}} = \\ &= x_3 - \frac{m_1 r}{M_{\Sigma}} \sin(\pi t) + \frac{m_2 R}{M_{\Sigma}} \sin[\pi(t + 2)]. \end{aligned} \quad (7a)$$

Підставляючи початкові умови руху (6а) в рівняння (7а) отримаємо:

$$x_{C0} = 0. \quad (8a)$$

З врахуванням знайдених виразів (7а) та (8а) перший інтеграл (5а) матиме вигляд:

$$M_{\Sigma} x_3 - m_1 r \sin(\pi t) + m_2 R \sin[\pi(t+2)] = 0. \quad (9a)$$

Закон руху АТТ знайдемо з рівняння (9а):

$$x_3 = \frac{m_1 r}{M_{\Sigma}} \sin(\pi t) - \frac{m_2 R}{M_{\Sigma}} \sin[\pi(t+2)],$$

або враховуючи, що  $\sin[\pi(t+2)] = \sin(\pi t)$ , остаточно отримаємо

$$x_3 = \frac{(m_1 r - m_2 R)}{M_{\Sigma}} \sin(\pi t). \quad (10a)$$

**5. Проведення розрахунків.** Підставимо вихідні дані в вираз (10а), отримаємо:

$$x_3 = \frac{(4 \cdot 0,5 - 1 \cdot 1)}{4 + 1 + 10} \sin(\pi t) = 0,0667 \sin(\pi t), \text{ м.}$$

**Відповідь:**  $x_3 = 0,0667 \sin(\pi t)$  [м].

## II. Знаходження нормальної реакції напрямних N.

**1. Побудова розрахункової схеми** (рис. Д3б). Підпункти 1.1. та 1.2. даної задачі аналогічні відповідним підпунктам попередньої задачі.

1.3. Визначаємо координати центра мас АТТ та координати МТ відносно осі  $Oy$ .

$$y_3 = H, \quad y_1 = H + r \cos \varphi_1, \quad y_2 = H + R \cos \varphi_2. \quad (16)$$

### **2. Складання диференціального рівняння руху системи.**

Підпункт 2.1. даної задачі аналогічний відповідному підпункту попередньої задачі.

2.2. Координатна форма диференціального рівняння.

$$y: M_{\Sigma} \ddot{y}_C = N - \sum_{i=1}^3 P_i. \quad (26)$$

де  $\ddot{y}_C$  – проекція пришвидшення центра мас системи на вісь  $Oy$ .

З рівняння (3б) знайдемо нормальну реакцію напрямних:

$$N = M_{\Sigma} \ddot{y}_C + \sum_{i=1}^3 P_i. \quad (36)$$

Враховуючи, що

$$P_i = m_i g, \quad / i = 1, 2, 3 / ,$$

перепишемо вираз (4б)

$$N = M_{\Sigma} \ddot{y}_C + m_1 g + m_2 g + m_3 g = M_{\Sigma} \ddot{y}_C + (m_1 + m_2 + m_3) g = M_{\Sigma} (\ddot{y}_C + g). \quad (4б)$$

**3. Визначення координати  $y_C$  та пришвидшення центра мас системи  $\ddot{y}_C$ .** Знайдемо координату  $y_C$ :

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{\sum_{i=1}^3 m_i y_i}{M_{\Sigma}} = \frac{m_1(H + r \cos \varphi_1) + m_2(H + R \cos \varphi_2) + m_3 H}{M_{\Sigma}} = \\ &= \frac{M_{\Sigma} H + m_1 r \cos \varphi_1 + m_2 R \cos \varphi_2}{M_{\Sigma}} = \\ &= H + \frac{m_1 r}{M_{\Sigma}} \cos(\pi t) + \frac{m_2 R}{M_{\Sigma}} \cos[\pi(t+2)], \end{aligned}$$

або враховуючи, що  $\cos[\pi(t+2)] = \cos(\pi t)$ , остаточно отримаємо

$$y_C = H + \frac{\cos(\pi t)}{M_{\Sigma}} (m_1 r + m_2 R). \quad (5б)$$

Знайдемо першу та другу похідну від координати  $y_C$  (5б):

$$\dot{y}_C = -\pi \frac{\sin(\pi t)}{M_{\Sigma}} (m_1 r + m_2 R), \quad \ddot{y}_C = -\pi^2 \frac{\cos(\pi t)}{M_{\Sigma}} (m_1 r + m_2 R). \quad (6б)$$

**4. Визначення нормальної реакції напрямних.**

Підставляючи вираз для пришвидшення (6б) в вираз для нормальної реакції напрямних (4б), отримаємо:

$$N = M_{\Sigma} \left[ g - \pi^2 \frac{\cos(\pi t)}{M_{\Sigma}} (m_1 r + m_2 R) \right]. \quad (7б)$$

**5. Проведення розрахунків.** Підставимо вихідні дані в вираз (7б), отримаємо:

$$N = 15 \cdot [9,81 - 3,14^2 \frac{(4 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1)}{4 + 1 + 10} \cos(\pi t)] = 147,15 - 29,578 \cos(\pi t), \quad H.$$

**Відповідь:**  $N = 147,15 - 29,578 \cos(\pi t)$  [Н].

## 3.4. Документ MathCad для розв'язання задачі ДЗ

Документ Mathcad  
для розв'язання задачі ДЗ

## 1. Знаходження закону руху центра мас АТГ.

Координати центра мас АТГ та матеріальної точки відносно осі  $Ox$ :

$$x_3 := x_3 \quad x_1 := x_3 - r \cdot \sin(\varphi_1) \quad x_2 := x_3 + R \cdot \sin(\varphi_2)$$

1.1. Визначаємо координати центра мас системи в поточний момент часу:

$$x_C := \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3}{M_\Sigma}$$

$$x_C \left\{ \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{factor} \\ \text{substitute, } m_1 \cdot x_3 \dots = M_\Sigma \cdot x_3 \\ \quad + m_2 \cdot x_3 \dots \\ \quad + m_3 \cdot x_3 \end{array} \right. \rightarrow \frac{M_\Sigma \cdot x_3 + R \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_2) - m_1 \cdot r \cdot \sin(\varphi_1)}{M_\Sigma}$$

1.2. Визначаємо координати центра мас системи в початковий момент часу:

$$x_{C0} := \frac{M_\Sigma \cdot x_{30} + R \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_{20}) - m_1 \cdot r \cdot \sin(\varphi_{10})}{M_\Sigma}$$

$$x_{C0} \left\{ \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{factor} \\ \text{substitute, } x_{30} = 0 \rightarrow 0 \\ \text{substitute, } \varphi_{10} = 0 \\ \text{substitute, } \varphi_{20} = 0 \end{array} \right.$$

1.3. Визначаємо закон руху центра мас АТГ:

$$\frac{M_\Sigma \cdot x_3 \dots + R \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_2) \dots + -m_1 \cdot r \cdot \sin(\varphi_1)}{M_\Sigma} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{solve, } x_3 \\ \text{factor} \\ \text{substitute, } \sin(\varphi_2) = \sin(\varphi_1) \end{array} \right. \rightarrow \frac{\sin(\varphi_1) \cdot (R \cdot m_2 - m_1 \cdot r)}{M_\Sigma}$$

## 2. Знаходження нормальної реакції напрямних.

Координати центра мас АТГ та матеріальної точки відносно осі  $Ox$ :

$$y_3 := H \quad y_1 := H + r \cdot \cos(\varphi_1) \quad y_2 := H + R \cdot \cos(\varphi_2)$$

2.1. Визначаємо координати центра мас системи в поточний момент часу:

$$y_C := \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3}{M_\Sigma}$$

$$y_C \left\{ \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{factor} \\ \text{substitute, } m_1 \cdot H \dots = M_\Sigma \cdot H \\ \quad + m_2 \cdot H \dots \\ \quad + m_3 \cdot H \end{array} \right. \rightarrow \frac{H \cdot M_\Sigma + R \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2) + m_1 \cdot r \cdot \cos(\varphi_1)}{M_\Sigma}$$

2.2. Визначаємо прискорення центра мас системи:

$$\varphi_1(t) := \pi \cdot t \quad \varphi_2(t) := \pi \cdot (t + 2)$$

$$y_C(t) := \frac{H \cdot M_\Sigma + R \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2(t)) + m_1 \cdot r \cdot \cos(\varphi_1(t))}{M_\Sigma}$$

$$\frac{d}{dt} y_C(t) \text{ simplify} \rightarrow \frac{\pi \cdot \sin(\pi \cdot t) \cdot (R \cdot m_2 + m_1 \cdot r)}{M_\Sigma} \quad - \text{ швидкість}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y_C(t) \text{ simplify} \rightarrow \frac{\pi^2 \cdot (R \cdot m_2 + m_1 \cdot r) \cdot \left( 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right)^2 - 1 \right)}{M_\Sigma} \quad - \text{ пришвидження}$$

2.3. Остаточно, закон зміни нормальної реакції має вигляд:

$$N(t) := M_\Sigma \cdot \left[ g + \frac{\pi^2 \cdot (R \cdot m_2 + m_1 \cdot r) \cdot \left( 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right)^2 - 1 \right)}{M_\Sigma} \right]$$

або після перетворень:

$$N(t) \begin{cases} \text{simplify} \\ \text{factor} \\ \text{collect, cos}(\pi \cdot t) \\ \text{collect, } \pi \end{cases} \rightarrow [-\cos(\pi \cdot t) \cdot (R \cdot m_2 + m_1 \cdot r)] \cdot \pi^2 + g \cdot M_{\Sigma}$$

### 3. Виконуємо обчислення та будуємо графік руху центра мас АТТ.

Введемо розрахункові дані:

$$m_1 := 4 \quad m_2 := 1 \quad m_3 := 10 \quad g := 9.81 \quad r := 0.5 \quad R := 1$$

$$H := 1.2 \quad M_{\Sigma} := m_1 + m_2 + m_3 \quad \varphi_1(t) := \pi \cdot t \quad \varphi_2(t) := \pi \cdot (t + 2)$$

Остаточно отримуємо такі залежності:

$$x_3(t) := \frac{\sin(\varphi_1(t)) \cdot (R \cdot m_2 - m_1 \cdot r)}{M_{\Sigma}} \quad \text{- закон руху центра мас АТТ}$$

$$x_3(t) \rightarrow 0.0667 \cdot \sin(3.1416 \cdot t)$$

$$N(t) := [-\cos(\pi \cdot t) \cdot (R \cdot m_2 + m_1 \cdot r)] \cdot \pi^2 + g \cdot M_{\Sigma} \quad \text{- закон зміни нормальної реакції}$$

$$N(t) \rightarrow -29.609 \cdot \cos(3.142 \cdot t) + 147.15$$

$$y_1(t) := H + r \cdot \cos(\varphi_1(t)) \quad \text{- закон руху матеріальної точки } D_1$$

$$y_1(t) \rightarrow 0.5 \cdot \cos(3.142 \cdot t) + 1.2$$

$$y_2(t) := H + R \cdot \cos(\varphi_2(t)) \quad \text{- закон руху матеріальної точки } D_2$$

$$y_2(t) \rightarrow \cos(3.142 \cdot t + 6.283) + 1.2$$

$$x_{3v} := H \quad y_3 = 1.2$$

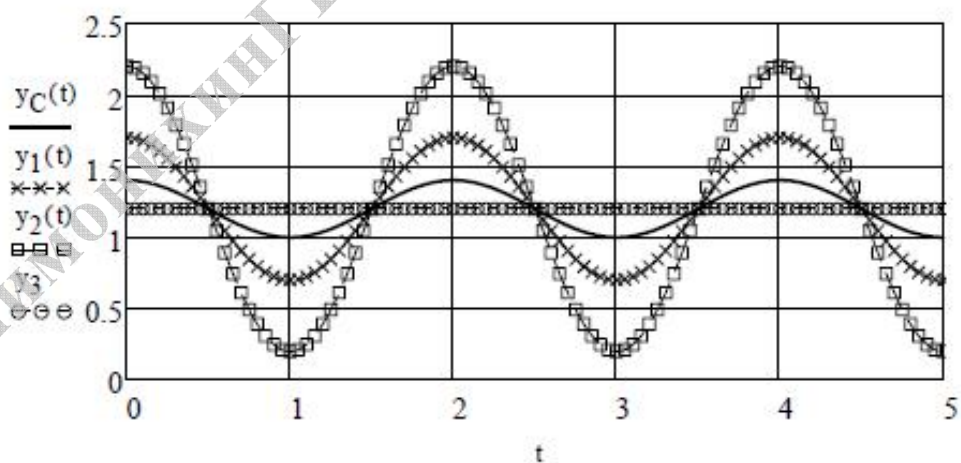
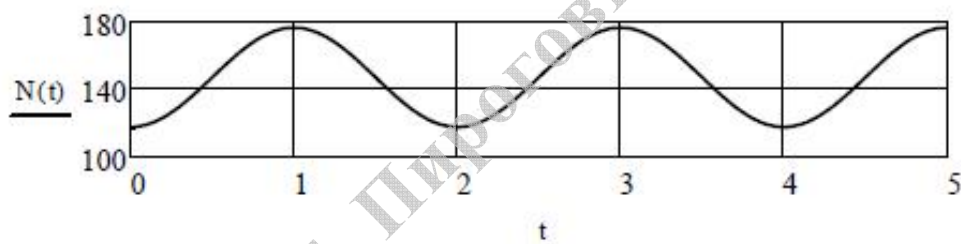
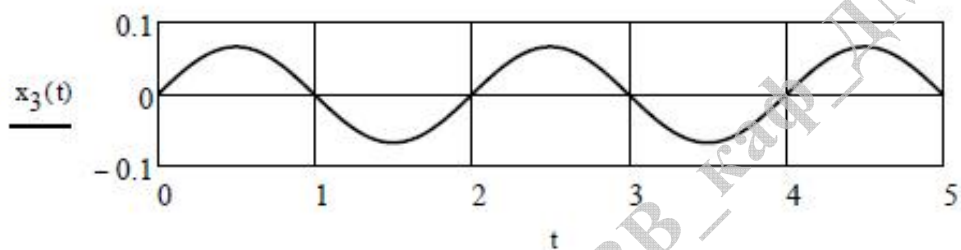
$$y_C(t) := \frac{H \cdot M_{\Sigma} + R \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2(t)) + m_1 \cdot r \cdot \cos(\varphi_1(t))}{M_{\Sigma}} \quad \text{- закон руху центра мас АТТ}$$



$$y_C(t) \rightarrow 0.133 \cdot \cos(3.142 \cdot t) + \frac{\cos(3.142 \cdot t + 6.283)}{15} + 1.2$$

Нижче приведено графіки руху (коливань) центра мас АТТ відносно початку відліку вздовж координатної осі  $Ox$ , зміни нормальної реакції напрямних, а також графіки руху центра мас АТТ, МТ та центра мас системи відносно координатної осі  $Oy$ . На графіку  $t$  - час (с),  $x_3(t)$  - переміщення центра мас АТТ відносно осі  $Ox$  (м),  $N$  - нормальна реакція напрямних (Н),  $y_C(t)$  - переміщення центра мас системи відносно осі  $Oy$  (м),  $y_1(t)$  - переміщення матеріальної точки  $D_1$  відносно осі  $Oy$  (м),  $y_2(t)$  - переміщення матеріальної точки  $D_2$  відносно осі  $Oy$  (м),  $y_3(t)$  - переміщення центра мас АТТ відносно осі  $Oy$  (м).

$$t := 0, 0.01 \dots 5$$



## Задача Д4 - теорема про зміну кількості руху матеріальної системи

### 4.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Механічна система складається з прямокутної вертикальної плити (в подальшому абсолютно твердого тіла (АТТ)) масою  $m_1=18$  кг та вантажа  $D$  (в подальшому матеріальної точки (МТ)) масою  $m_2=6$  кг (рис. Д4.0 – Д4.9, табл. Д4). АТТ рухається вздовж горизонтальних напрямних. В момент часу  $t_0=0$ , коли швидкість АТТ  $u_0=2$  м/с, МТ під дією внутрішніх сил розпочинає рух по жолобу АТТ.

На рис. Д4.0 – Д4.3 жолоб  $KE$  прямолінійний і при русі МТ відстань  $s=AD$  змінюється за законом  $s=f_1(t)$ , а на рис. Д4.4 – Д4.9 жолоб – коло радіусом  $R=0,8$  м і при русі МТ кут  $\varphi=\angle AC_1D$  змінюється за законом  $\varphi=f_2(t)$ .

**Знайти:** нехтуючи силами тертя визначити швидкість АТТ і подати її як функцію часу  $u=f(t)$ .

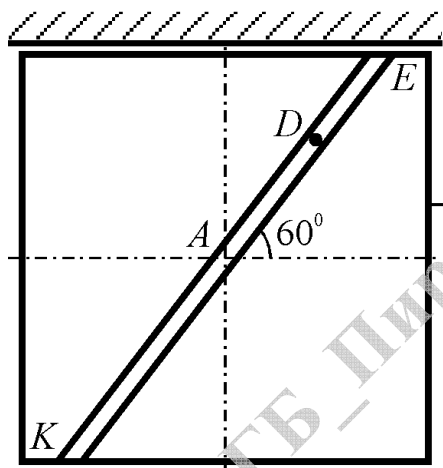


Рис. Д4.0

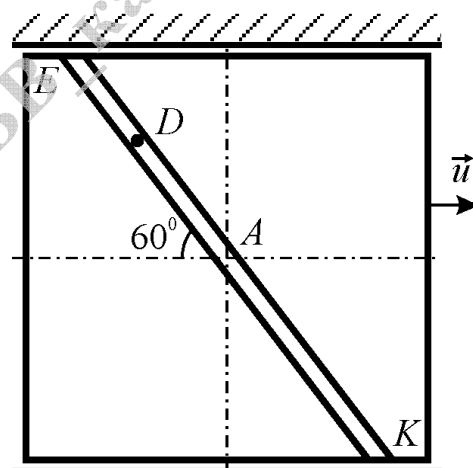


Рис. Д4.1

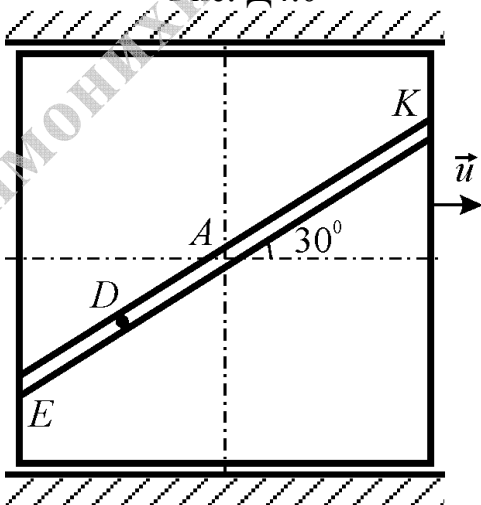


Рис. Д4.2

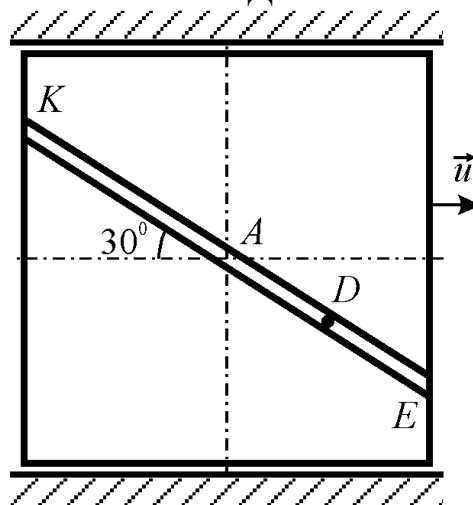


Рис. Д4.3



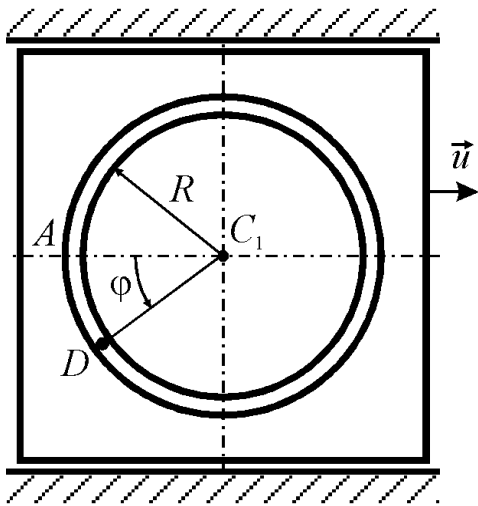


Рис. Д4.4

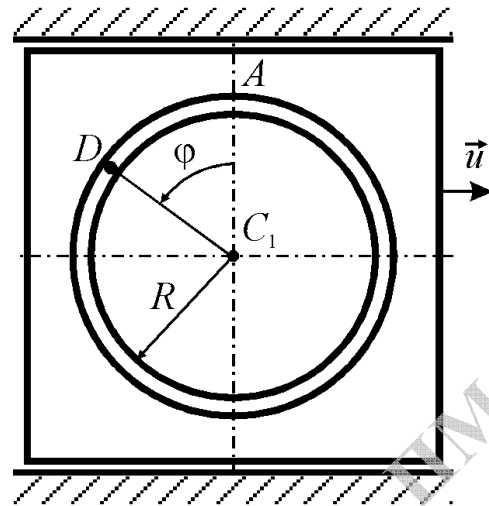


Рис. Д4.5

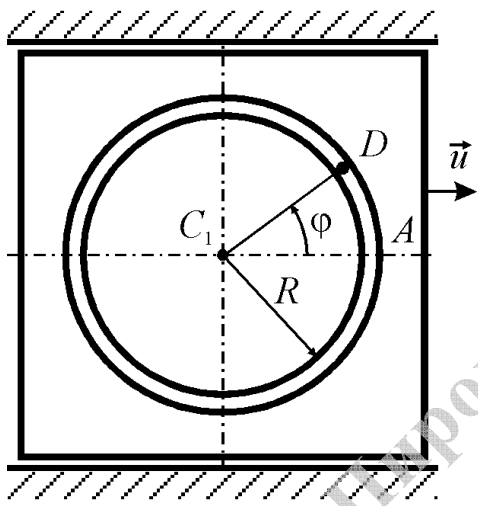


Рис. Д4.6

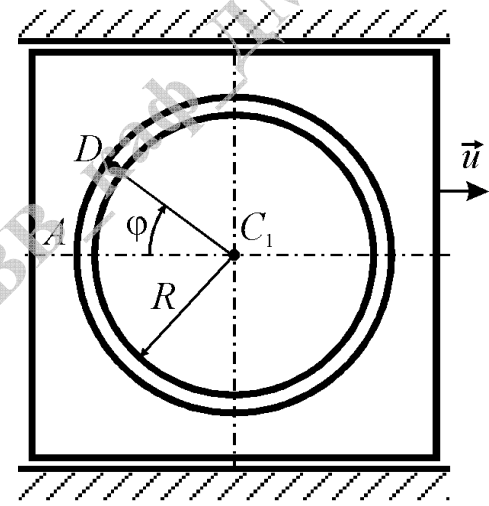


Рис. Д4.7

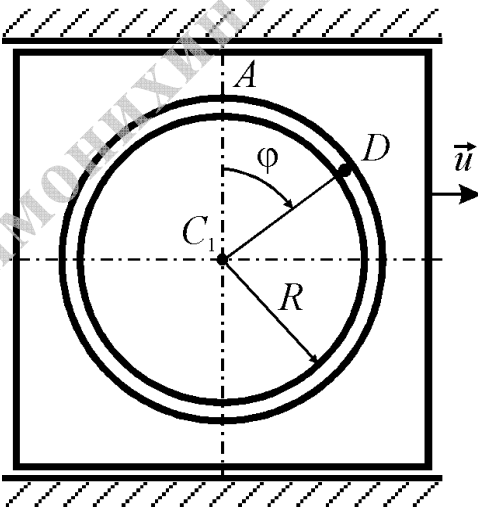


Рис. Д4.8

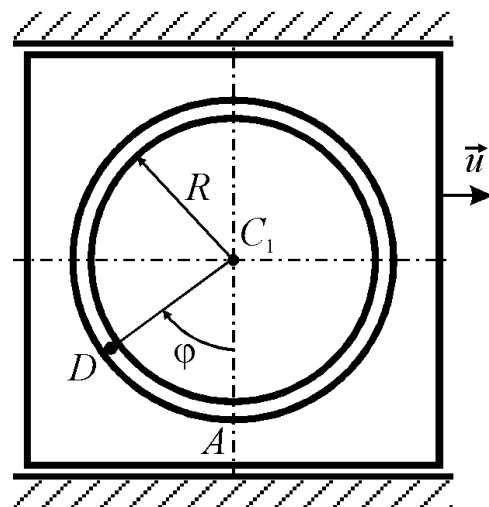


Рис. Д4.9

Таблиця Д4

| Номер умови | $s=f_1(t)$           |                      | $\varphi=f_2(t)$ |                 |
|-------------|----------------------|----------------------|------------------|-----------------|
|             | Рис. 0, 1            | Рис. 2, 3            | Рис. 4, 5, 6     | Рис. 7, 8, 9    |
| 0           | $0,8\sin(\pi t^2)$   | $0,4(3t^2-2)$        | $\pi(3-2t^2)/3$  | $\pi(2t^2-1)$   |
| 1           | $1,2\cos(\pi t/2)$   | $0,6\sin(\pi t^2/2)$ | $\pi(1-3t^2)/4$  | $\pi(1-4t^2)/3$ |
| 2           | $0,6(2t^2-1)$        | $0,8\cos(\pi t)$     | $\pi(t^2-3)/6$   | $\pi(3+4t^2)/6$ |
| 3           | $0,4\sin(\pi t^2/3)$ | $0,5\sin(\pi t^2/6)$ | $\pi(2-t^2)$     | $\pi(t^2+1)/2$  |
| 4           | $0,5\cos(\pi t/6)$   | $1,2\cos(\pi t/3)$   | $\pi(1+2t^2)/6$  | $\pi(1-5t^2)/4$ |
| 5           | $0,6\sin(\pi t^2/4)$ | $0,5(3-4t^2)$        | $\pi(5t^2+1)/4$  | $\pi(t^2-4)/3$  |
| 6           | $0,8(2-3t^2)$        | $0,8\sin(\pi t^2/3)$ | $\pi(t^2-2)/2$   | $\pi t^2/4$     |
| 7           | $0,6\cos(\pi t/3)$   | $0,4\cos(\pi t/4)$   | $\pi(3+t^2)/3$   | $\pi(3t^2-1)/6$ |
| 8           | $1,2\sin(\pi t^2/2)$ | $1,2\sin(\pi t^2)$   | $\pi t^2/2$      | $\pi(t^2+3)/2$  |
| 9           | $0,8\cos(\pi t/4)$   | $0,6\cos(\pi t/6)$   | $\pi(t^2+2)/6$   | $\pi(2-t^2)/4$  |

#### 4.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача Д4 – на застосування теореми про зміну кількості руху системи. При розв'язанні задачі необхідно скласти рівняння за допомогою вказаної теореми в проекції на вісь паралельну напрямним вздовж яких рухається АТТ.

#### 4.3. Приклад розв'язання задачі Д4

**Умова задачі.** Механічна система складається з прямокутної вертикальної плити (в подальшому абсолютно твердого тіла (АТТ)) масою  $m_1$  та вантажа  $D$  (в подальшому матеріальної точки (МТ)) масою  $m_2$  (рис. Д4а). АТТ рухається вздовж горизонтальних напрямних. В момент часу  $t_0=0$ , коли швидкість АТТ  $u=u_0$ , МТ під дією внутрішніх сил розпочинає рух по жолобу АТТ. Жолоб являє собою коло радіусом  $R$  і при русі МТ кут  $\varphi=\angle AC_1D$  змінюється за законом  $\varphi=f(t)$ .

**Дано.**  $m_1=16$  кг;  $m_2=4$  кг;  $R=0,6$  м;  $u_0=0,2$  м/с;  $\varphi=\pi(t^2+1)/3$  рад.

**Знайти:** нехтуючи силами тертя визначити швидкість АТТ і подати її як функцію часу  $u=f(t)$ .

#### Розв'язок

##### 1. Побудова розрахункової схеми (рис. Д4б).

1.1. Розглянемо механічну систему, що складається з АТТ і МТ в довільному положенні. Введемо координатні осі  $Oxy$  так, щоб вісь  $x$  була паралельна напрямним.

1.2. Прикладаємо зовнішні сили, що діють на систему: сили ваги  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{P}_2$  і реакцію направляючих  $\vec{N}$ .

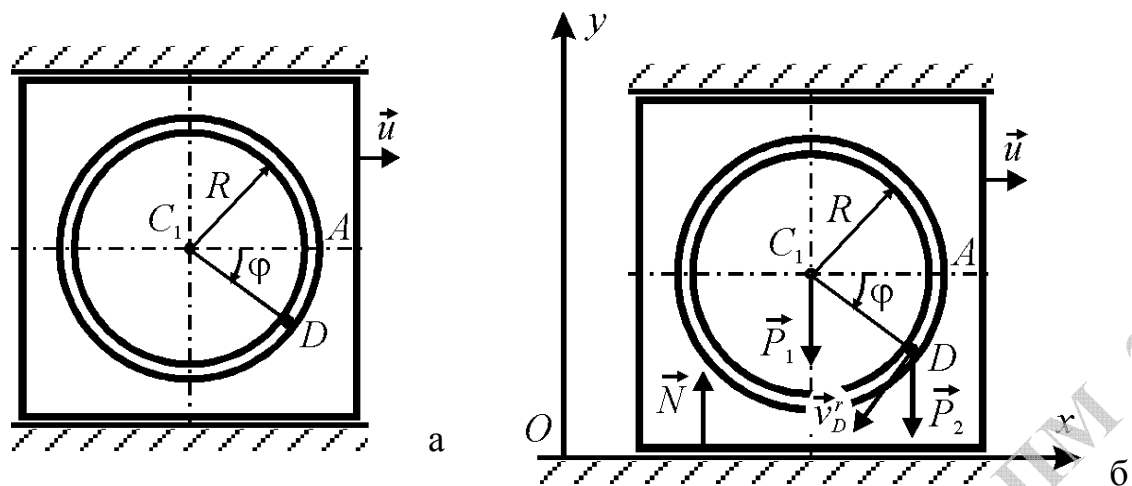


Рис. Д4 Схема механічної системи:  
а – вихідна схема; б – розрахункова схема

**2. Складання диференціального рівняння руху системи.** Для визначення  $u$  скористаємося теоремою про зміну кількості руху системи.

2.1. Векторна форма диференціального рівняння.

$$d\vec{Q} / dt = \vec{N} + \vec{P}_1 + \vec{P}_2, \quad (1)$$

де  $\vec{Q}$  – кількість руху системи. Тут

$$\vec{Q} = \vec{Q}_T + \vec{Q}_D, \quad (2)$$

де  $\vec{Q}_T$  – кількість руху АТТ;  $\vec{Q}_D$  – кількість руху МТ. В (2)

$$\vec{Q}_T = m_1 \vec{u}, \quad \vec{Q}_D = m_2 \vec{v}_D, \quad (3)$$

де  $\vec{u}$  – швидкість АТТ,  $\vec{v}_D$  – швидкість МТ відносно осей  $Oxy$ .

2.2. Координатна форма диференціального рівняння. Складемо диференціальне рівняння руху системи в проекції на вісь  $Ox$ . Отримаємо

$$x: dQ_x / dt = 0, \quad (4)$$

де  $Q_x$  – проекція кількості руху системи на вісь  $Ox$ .

**3. Інтегрування диференціального рівняння руху системи та знаходження сталої інтегрування.**

3.1. Проінтегруємо диференціальне рівняння (4). Розділимо змінні помноживши ліву і праву частину рівняння (4) на  $dt$ , отримаємо:

$$\int dQ_x = 0 \Rightarrow Q_x = C_1, \quad (5)$$

Отримане рівняння (5) – перший інтеграл. Тут в (5)

$$Q_x = Q_{Tx} + Q_{Dx}, \quad (6)$$

де  $Q_x$ ,  $Q_{Tx}$ ,  $Q_{Dx}$  – відповідно кількість руху системи, АТТ і МТ в проекції на вісь  $Ox$ .

Кількість руху АТТ:

$$Q_{Tx} = m_1 u_x, \quad (7)$$

де  $u_x = u$  – швидкість АТТ в проекції на вісь  $x$ .

Кількість руху МТ:

$$Q_{Dx} = m_2 v_{Dx}^a, \quad (8)$$

де  $v_{Dx}^a$  – абсолютна швидкість МТ в проекції на вісь  $Ox$ . Тут в (8)

$$v_{Dx}^a = v_{Dx}^e + v_{Dx}^r, \quad (9)$$

де  $v_{Dx}^e, v_{Dx}^r$  – відповідно переносна і відносна швидкість МТ в проекції на вісь  $Ox$ . Тут в (9)

$$v_{Dx}^e = u_x = u, \quad v_{Dx}^r = -v_D^r \sin \varphi = -v_D^r \sin[\pi(t^2 + 1)/3]. \quad (10)$$

В (10)

$$v_D^r = R\dot{\varphi} = 2\pi lt / 3. \quad (11)$$

Підставляючи (6-11) в (5), остаточно отримаємо:

$$m_1 u + m_2 \left\{ u - \frac{2}{3} \pi R t \sin \left[ \frac{\pi(t^2 + 1)}{3} \right] \right\} = C_1. \quad (12)$$

3.2. Знайдемо сталу інтегрування. Початкові умови руху мають вигляд:

$$t_0 = 0, \quad u(0) = u_0. \quad (13)$$

Підставивши початкові умови руху (13) в перший інтеграл (12) отримаємо:  $C_1 = (m_1 + m_2)u_0$ .

#### 4. Знаходження швидкості руху АТТ.

Підставляємо знайдену сталу інтегрування у перший інтеграл (12), отримаємо:

$$(m_1 + m_2)u - \frac{2}{3} m_2 \pi R t \sin \left[ \frac{\pi(t^2 + 1)}{3} \right] = (m_1 + m_2)u_0,$$

звідки

$$u = u_0 + \frac{2}{3} \frac{m_2 \pi R t}{(m_1 + m_2)} \sin \left[ \frac{\pi(t^2 + 1)}{3} \right]. \quad (14)$$

5. Проведення розрахунків. Підставимо вихідні дані в вираз (14), остаточно отримаємо:

$$u = 0,2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 0,6t}{3 \cdot (16 + 4)} \sin \left[ \frac{\pi(t^2 + 1)}{3} \right] = 0,2 + 0,2512t \sin[\pi(t^2 + 1)/3], \text{ м/с.}$$

**Відповідь:**  $u = 0,2 + 0,2512t \sin[\pi(t^2 + 1)/3]$  [м/с].

## Задача Д5 – теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної системи

### 5.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Однорідна горизонтальна плита (кругла, радіуса  $R$ , де  $R=1,2$  м) масою  $m_1=24$  кг обертається із кутовою швидкістю  $\omega_0=10$  с<sup>-1</sup> навколо вертикальної осі  $z$ , що знаходиться від центра мас  $C$  плити на відстані  $OC=b$  (рис. Д5.0а–Д5.9а, табл. Д5). Додаткові відстані і розміри для всіх плит показані на рис. Д5.0б–Д5.9б (вид зверху).

У момент часу  $t_0=0$  по жолобу плити починає рухатися (під дією внутрішніх сил) вантаж  $D$  масою  $m_2=8$  кг за законом  $s=AD=f(t)$ , де  $s$  – виражено в метрах,  $t$  – в секундах. Одночасно на плиту починає діяти пара сил з моментом  $M$  (заданий в ньютонметрах; при  $M<0$  його напрямок протилежний показаному на малюнках).

На всіх рисунках вантаж  $D$  показаний у положенні, при якому  $s>0$  (коли  $s<0$ , вантаж знаходиться по іншу сторону від точки  $A$ ). Зображуючи креслення розв'язуваної задачі, провести вісь  $z$  на заданій відстані  $OC=b$  від центра  $C$ .

**Знайти:** залежність  $\omega=f(t)$  (масою вала при цьому нехтуємо).

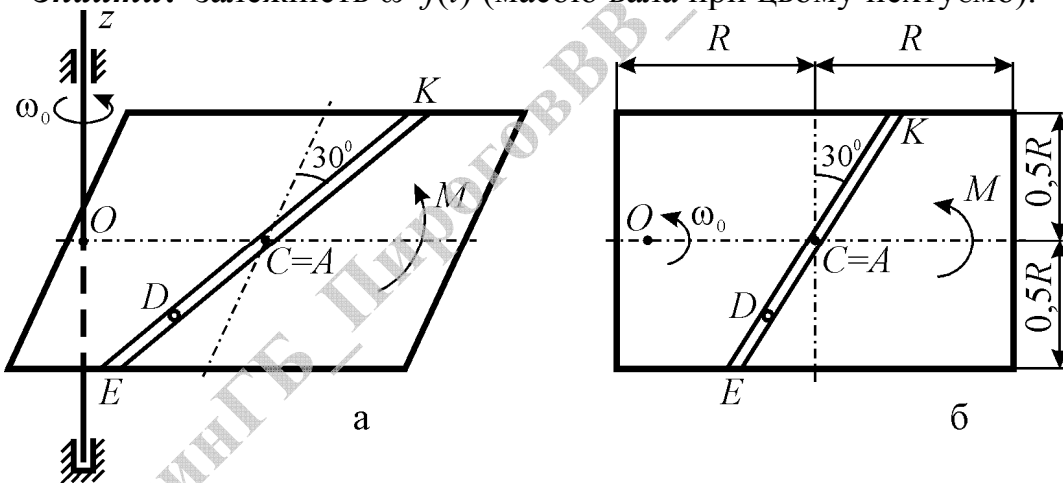


Рис. Д5.0

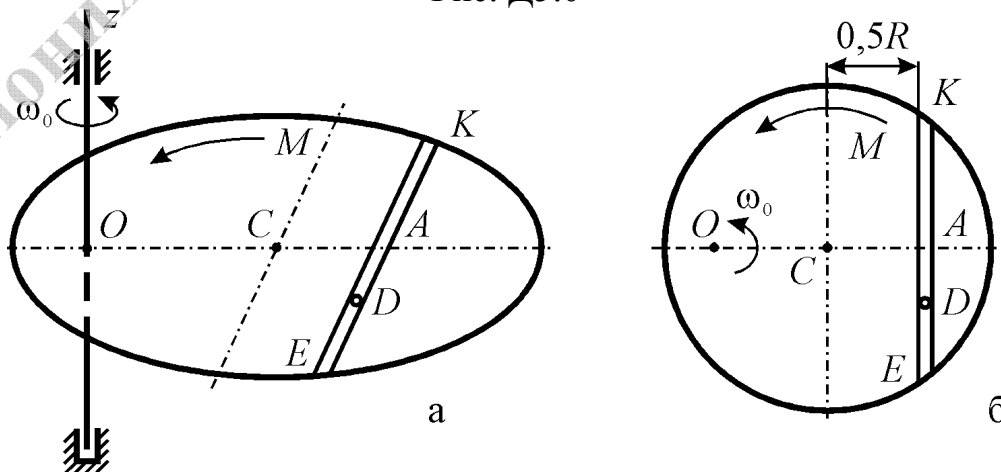


Рис. Д5.1

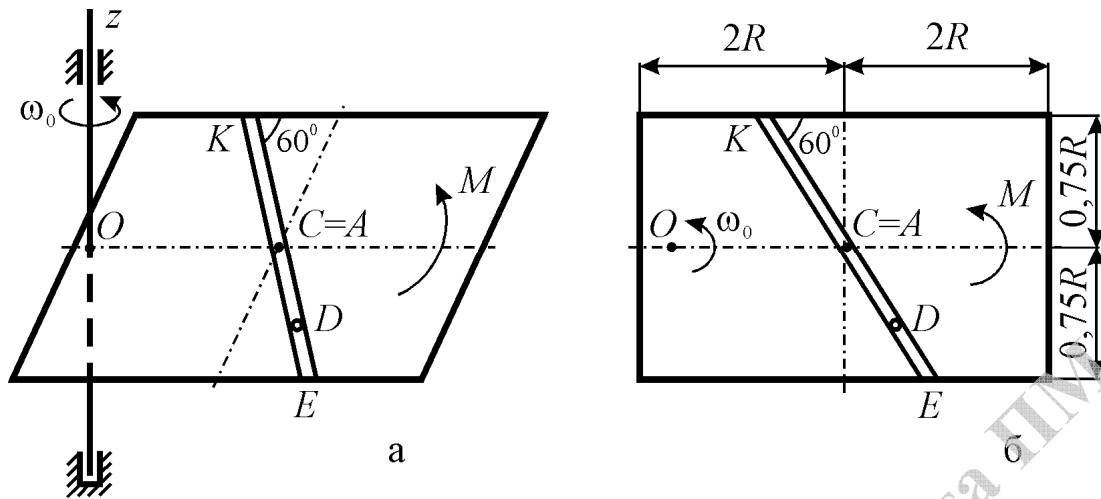


Рис. Д5.2а

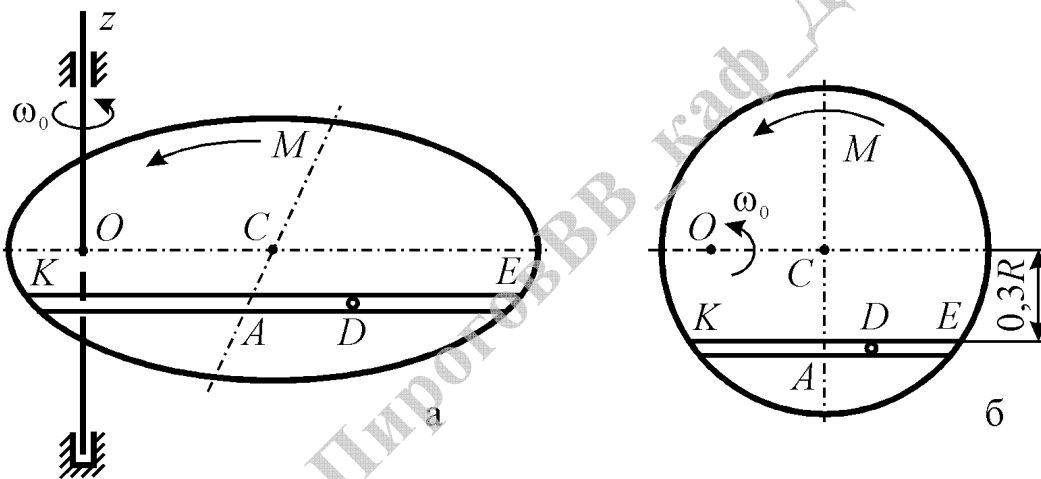


Рис. Д5.3

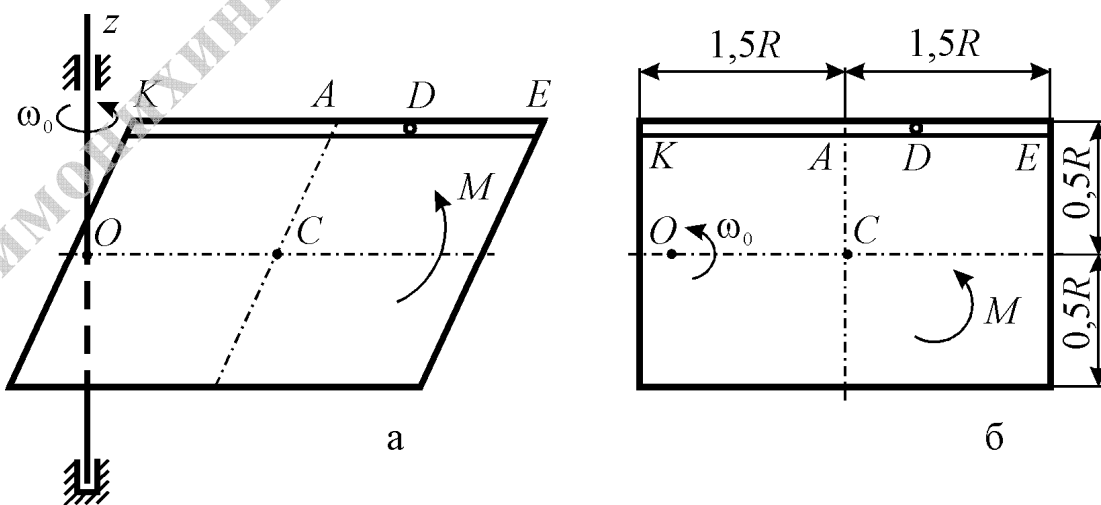


Рис. Д5.4

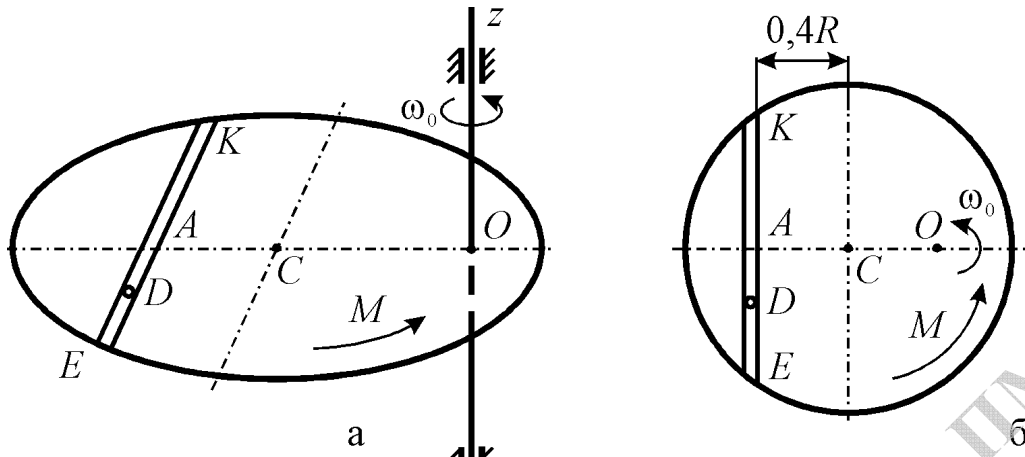


Рис. Д5.5

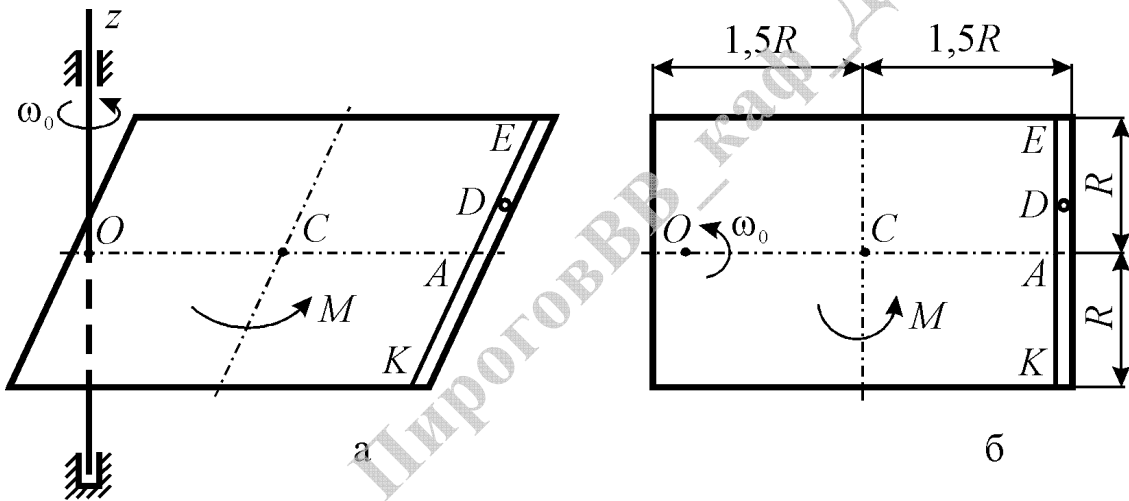


Рис. Д5.6

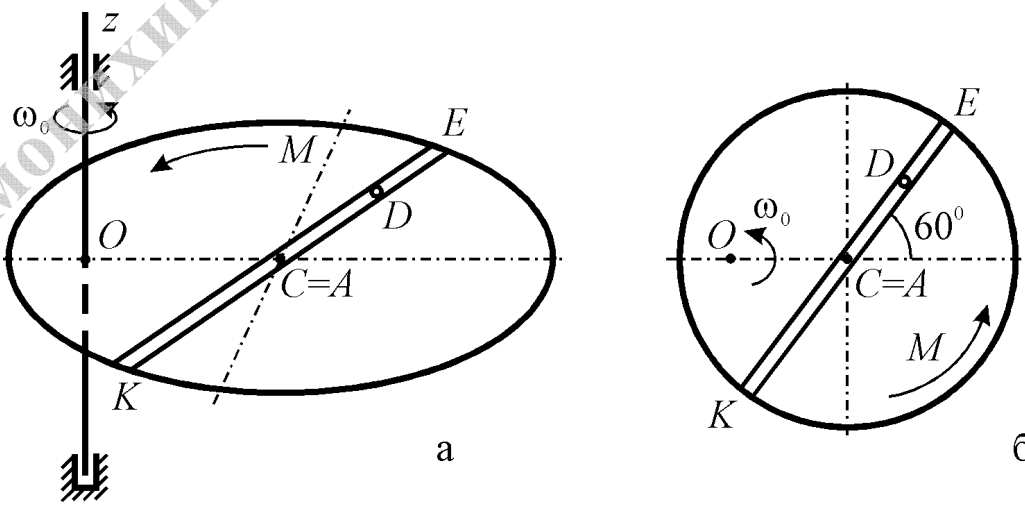


Рис. Д5.7

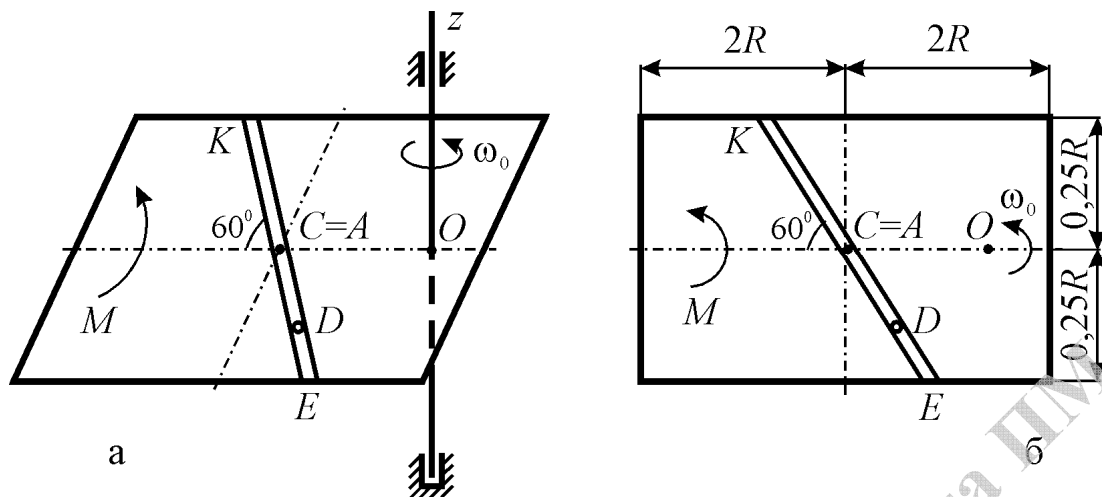


Рис. Д5.8

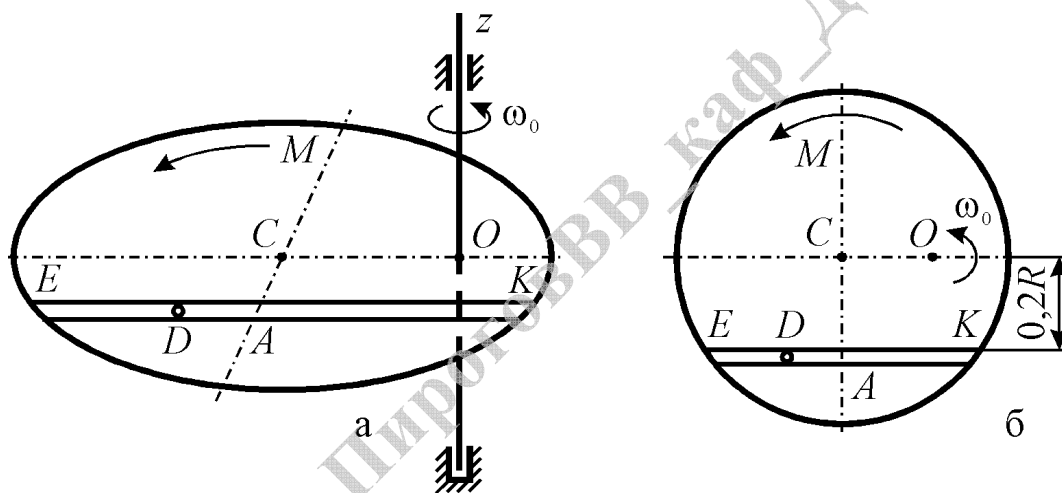


Рис. Д5.9

Таблица Д5

| Номер умови | $b$   | $s=F(t)$  | $M$     |
|-------------|-------|-----------|---------|
| 0           | $R$   | $-0,4t^2$ | 6       |
| 1           | $R/2$ | $0,6t^2$  | $4t$    |
| 2           | $R$   | $-0,8t^2$ | -6      |
| 3           | $R/2$ | $10t$     | $-8t$   |
| 4           | $R$   | $0,4t^3$  | 10      |
| 5           | $R/2$ | $-0,5t$   | $-9t^2$ |
| 6           | $R$   | $-0,6t$   | 8       |
| 7           | $R/2$ | $0,8t$    | $6t^2$  |
| 8           | $R$   | $0,4t^3$  | $-10t$  |
| 9           | $R/2$ | $0,5t^2$  | $12t^2$ |



## 5.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача Д5 – на застосування теореми про зміну кінетичного моменту системи. При застосуванні теореми до системи, що складається з платформи (в подальшому абсолютно тверде тіло (АТТ)) і вантажу (в подальшому матеріальна точка (МТ)), враховуватимемо, що кінетичний момент  $K_z$  системи відносно осі  $z$  визначається як сума кінетичного моменту АТТ і моменту кількості руху МТ. При цьому слід врахувати, що абсолютна швидкість МТ складається з відносної  $\vec{v}_D^r$  і переносної  $\vec{v}_D^e$  швидкостей, тобто  $\vec{v}_D^a = \vec{v}_D^r + \vec{v}_D^e$ . Тому і кількість руху МТ  $m\vec{v}_D^a = m\vec{v}_D^r + m\vec{v}_D^e$ . Тоді можна скористатися теоремою Варіньона (статика), згідно якої

$$K_z^D (m\vec{v}_D^a) = K_z^D (m\vec{v}_D^r) + K_z^D (m\vec{v}_D^e)$$

(моменти кількості руху точки обчислюються так само, як моменти сил).

При розв'язанні задачі необхідно зобразити на допоміжному кресленні вид на пластину зверху (з додатного напрямку осі  $z$ ).

Момент інерції пластини маси  $m$  відносно центральної осі  $z_C$ , що перпендикулярна пластині і проходить через її центр мас  $C$ , дорівнює:

- для прямокутної пластини зі сторонами  $a_1$  і  $a_2$

$$J_{z_C} = m(a_1^2 + a_2^2) / 12;$$

- для круглої пластини радіуса  $R$

$$J_{z_C} = mR^2 / 2.$$

## 5.3. Приклад розв'язання задачі Д5

**Умова задачі.** Однорідна горизонтальна плита (прямокутна із сторонами  $R$  і  $2R$ ) масою  $m_1$  (в подальшому абсолютно твердого тіла (АТТ)) жорстко закріплена на вертикальному валу і обертається разом з ним із кутовою швидкістю  $\omega_0$  навколо вертикальної осі  $z$  (рис. Д5а).

У момент часу  $t_0=0$  на плиту починає діяти обертальний момент  $M$ , направлений протилежно  $\omega_0$ ; одночасно вантаж  $D$  масою  $m_2$  (в подальшому матеріальної точки (МТ)), що знаходиться в жолобі  $KE$  в точці  $A$ , починає рухатися по жолобу плити (під дією внутрішніх сил) за законом  $s=AD=f(t)$ , де  $s$  – виражено в метрах,  $t$  – в секундах.

**Дано:**  $m_1=24$  кг;  $m_2=8$  кг;  $R=1,2$  м;  $\omega_0=10$  с<sup>-1</sup>;  $s=AD=0,5t^2$  м;  $M=kt$  Н·м, де  $k=5$  Н·м/с.

**Знайти:** закон зміни кутової швидкості платформи  $\omega=f(t)$  (масою вала при цьому нехтуємо).

## Розв'язок

## 1. Побудова розрахункової схеми (рис. Д5б).

1.1. Розглянемо механічну систему, що складається з АТТ і МТ. Введемо нерухомі координатні осі  $Oxyz$  (осі  $x$  та  $y$  на рис. Д5б, не показані).

1.2. Прикладаємо зовнішні сили і моменти, що діють на систему: сили тяжіння  $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ , реакції  $\vec{R}_E, \vec{R}_H$ , і момент  $M$  ( $\vec{R}_H, \vec{R}_E \perp Oz$ ,  $P_1, P_2 \parallel Oz$ ).

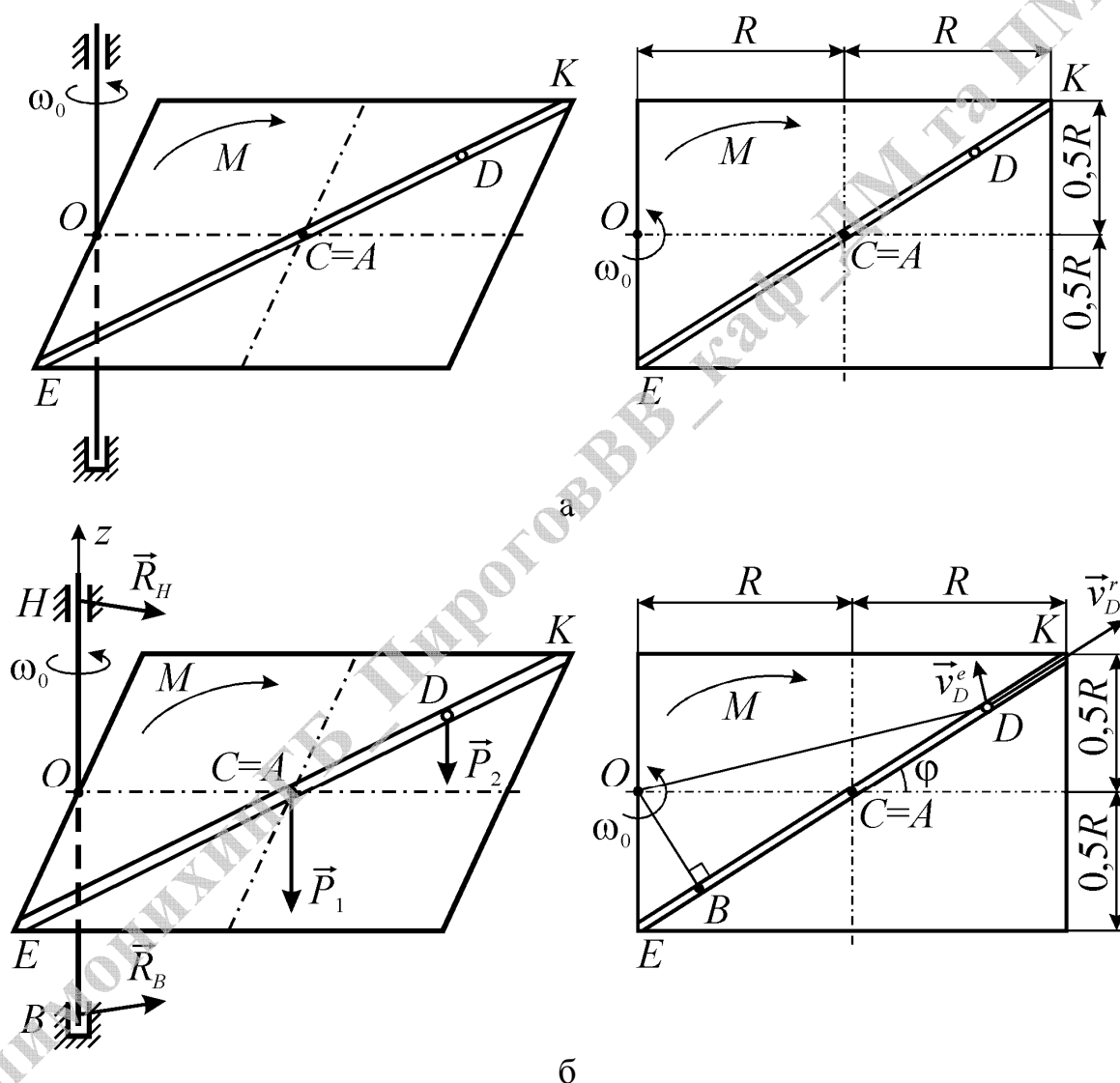


Рис. Д5 Схема механічної системи:  
а – вихідна схема; б – розрахункова схема

## 1.3. Визначимо відносну і переносну швидкість МТ.

Будемо розглядати рух МТ як складний, тоді її рух відносно пластини є відносним, а обертання разом з пластиною, як одного цілого – переносним. Абсолютна швидкість МТ

$$\vec{v}_D^a = \vec{v}_D^r + \vec{v}_D^e, \quad (1)$$

де  $\vec{v}_D^r, \vec{v}_D^e$  – відповідно відносна та переносна швидкість МТ.

Відносна швидкість матеріальної точки

$$v_D^r = \dot{s} = t. \quad (2)$$

Зображаємо вектор  $\vec{v}_D^r$  на рис. Д5б з врахуванням знаку  $\dot{s}$  (при  $\dot{s} < 0$  напрямок  $\vec{v}_D^r$  був би протилежний).

Переносна швидкість матеріальної точки

$$v_D^e = \omega \cdot OD, \quad (3)$$

де  $OD$  – радіус обертання точки при переносному русі. Тут

$$\begin{aligned} OD &= \sqrt{(OA)^2 + (AD)^2 - 2 \cdot OA \cdot AD \cdot \cos(180^\circ - \varphi)} = \\ &= \sqrt{R^2 + s^2 + 2Rs \cdot \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (4)$$

В (4) було враховано, що  $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$ . Зображаємо вектор  $\vec{v}_D^e$  ( $\vec{v}_D^e \perp OD$ ) на рис. Д5б з врахуванням напрямку  $\omega$ .

## 2. Складання диференціального рівняння руху системи.

2.1. Векторна форма диференціального рівняння:

$$d\vec{K}_O / dt = \vec{M}_O^{(e)}, \quad (5)$$

де  $\vec{K}_O, \vec{M}_O^{(e)}$  – відповідно кінетичний момент системи та головний момент зовнішніх сил визначені відносно точки  $O$ .

2.2. Координатна форма.

Так як система обертається навколо осі  $z$ , то теорему про зміну кінетичного моменту системи застосуємо відносно вказаної осі. При знаходженні моменту скористаємося правилом визначення момента сили відносно осі (так як сили  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_2$  паралельні осі  $z$ , а реакції  $\vec{R}_E$  і  $\vec{R}_H$  цю вісь перетинають, то їх моменти відносно осі  $z$  дорівнюють нулю). Тоді, вважаючи для моменту додатнім напрямком  $\omega_0$  (тобто проти ходу годинникової стрілки), одержимо:

$$dK_z / dt = -M = -kt, \quad (6)$$

де  $K_z$  – кінетичний момент системи відносно осі  $z$ .

Розділимо змінні в рівнянні (6) помноживши на  $dt$  праву і ліву частину рівняння (6), отримаємо:

$$dK_z = -ktdt. \quad (7)$$

## 3. Інтегрування диференціального рівняння руху системи.

Проінтегруємо диференціальне рівняння (7), отримаємо:

$$\int dK_z = -k \int t dt, \text{ звідки}$$

$$K_z = -k \frac{t^2}{2} + C_1, \quad (8)$$

де  $C_1$  – стала інтегрування. Зазначимо, що рівняння (8) є першим інтегралом у якому – невідомими є  $K_z$  та  $C_1$ .

**4. Визначення кінетичного моменту системи  $K_z$  та сталої інтегрування  $C_1$ .**

4.1. Кінетичний момент системи має вигляд:

$$K_z = K_z^T + K_z^D, \quad (9)$$

де  $K_z^T$ ,  $K_z^D$  – відповідно кінетичний момент АТТ та момент кількості руху МТ.

4.1.1. Визначимо **кінетичний момент АТТ  $K_z^T$** .

Так як АТТ обертається навколо осі  $z$ , то

$$K_z^T = J_z \omega, \quad (10)$$

де  $J_z$  – осьовий момент інерції пластини відносно осі  $z$ .  $J_z$  знайдемо застосовуючи теорему Гюйгенса-Штейнера, тоді:

$$J_z = J_{z_C} + m_1 (OC)^2 = J_{z_C} + m_1 R^2, \quad (11)$$

де  $J_{z_C}$  – момент інерції пластини відносно центральної осі  $z_C$ , що проходить через центр мас пластини – точку  $C$ . Тут

$$J_{z_C} = \frac{m_1 [(2R)^2 + R^2]}{12} = \frac{5}{12} m_1 R^2. \quad (12)$$

Підставляючи (12) в (11) отримаємо:

$$J_z = \frac{5}{12} m_1 R^2 + m_1 R^2 = \frac{17}{12} m_1 R^2. \quad (13)$$

Остаточно, підставляючи (13) в (10), отримаємо:

$$K_z^T = \frac{17}{12} m_1 R^2 \omega. \quad (14)$$

4.1.2. Визначимо **момент кількості руху МТ  $K_z^D$** . Згідно з теоремою Варіньона та з врахуванням (1-3) отримаємо:

$$\begin{aligned} K_z^D &= K_z^D (m_2 \vec{v}_D^a) = K_z^D (m_2 \vec{v}_D^r) + K_z^D (m_2 \vec{v}_D^e) = \\ &= OB \cdot m_2 v_D^r + OD \cdot m_2 v_D^e = m_2 [OB \cdot t + \omega \cdot (OD)^2]. \end{aligned} \quad (15)$$

Враховуючи (4) та те, що

$$OB = OC \cdot \sin \varphi = R \cdot \sin \varphi,$$

перепишемо (15) у такому вигляді

$$K_z^D = m_2 [Rt \sin \varphi + \omega \cdot (R^2 + s^2 + 2Rs \cdot \cos \varphi)]. \quad (16)$$

Остаточно, підставляючи (14) та (16) в (9), **кінетичний момент системи** матиме вигляд:

$$K_z = \frac{17}{12} m_1 R^2 \omega + m_2 [Rt \sin \varphi + \omega \cdot (R^2 + s^2 + 2Rs \cdot \cos \varphi)]. \quad (17)$$

4.2. Визначення сталої інтегрування.

Підставляючи (17) в перший інтеграл (8) отримаємо:

$$\frac{17}{12} m_1 R^2 \omega + m_2 [Rt \sin \varphi + \omega \cdot (R^2 + s^2 + 2Rs \cdot \cos \varphi)] = -k \frac{t^2}{2} + C_1. \quad (18)$$

Враховуючи початкові умови руху:  $t_0=0$ ,  $\omega(t_0)=\omega_0$ , з першого інтегралу (18) отримаємо:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{17}{12} m_1 R^2 \omega_0 + m_2 \omega_0 (R^2 + s^2 + 2Rs \cdot \cos \varphi) = \\ &= \omega_0 \left[ \frac{17}{12} m_1 R^2 + m_2 (R^2 + s^2 + 2Rs \cdot \cos \varphi) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

**5. Проведення розрахунків.** Підставивши (19) в (18) отримаємо такий вираз для  $\omega$ :

$$\omega = \frac{-m_2 Rt \sin \varphi - k \frac{t^2}{2} + \omega_0 \left[ \frac{17}{12} m_1 R^2 + m_2 (R^2 + s^2 + 2Rs \cdot \cos \varphi) \right]}{\frac{17}{12} m_1 R^2 + m_2 (R^2 + s^2 + 2Rs \cdot \cos \varphi)}. \quad (20)$$

Підставляючи вихідні дані в вираз (20) та врахувавши, що

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (0,5R)^2}} = 0,894, \quad \sin \varphi = \frac{0,5R}{\sqrt{R^2 + (0,5R)^2}} = 0,447,$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{-8 \cdot 1,2 \cdot 0,447 t - 5 \frac{t^2}{2} + 10 \cdot \left\{ \frac{17}{12} 24 \cdot 1,2^2 + 8 \cdot [1,2^2 + (0,5t^2)^2] + 2 \cdot 1,2 \cdot 0,5t^2 \cdot 0,894 \right\}}{\frac{17}{12} 24 \cdot 1,2^2 + 8 \cdot [1,2^2 + (0,5t^2)^2] + 2 \cdot 1,2 \cdot 0,5t^2 \cdot 0,894} = \\ &= \frac{20t^4 + 83,324t^2 - 4,29t + 604,8}{2t^4 + 8,58t^2 + 60,48}, \end{aligned}$$

де  $t$  – в секундах,  $\omega$  – в  $1/c$ .

$$\text{Відповідь: } \omega = \frac{20t^4 + 83,324t^2 - 4,29t + 604,8}{2t^4 + 8,58t^2 + 60,48} [1/c].$$

## Задача Д6 – теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи

### 6.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Механічна система складається з вантажів 1, 2, ступінчастого шківів 3 з радіусами ступеней  $R_3=0,3$  м,  $r_3=0,1$  м і радіусом інерції відносно осі обертання  $\rho_3=0,2$  м, блока 4 радіуса  $R_4=0,2$  м і катка (або рухомого блоку) 5 (рис. Д6.0 – Д6.9, табл. Д6); тіло 5 вважати суцільним однорідним циліндром, а масу блока 4 – рівномірно розподіленою по ободу. Коефіцієнт тертя вантажів об площину  $f_{тр}=0,1$ . Всі катки, враховуючи і катки обмотані нитками, котяться по площинам без ковзання. Тіла системи з'єднані одне з одним нитками, перекинутими через блоки і намотаними на шків 3 (або на шків і каток); ділянки ниток паралельні відповідним площинам. До одного з тіл прикріплена пружина з коефіцієнтом жорсткості  $c$ .

Під дією сили  $F=f(s)$ , що залежить від переміщення  $s$ , система розпочинає рух із стану спокою; деформація пружини в початковий момент часу дорівнює нулю. При русі на шків 3 діє постійний момент  $M$  сил опору (від тертя в підшипниках).

На всіх рисунках не зображати вантаж 2, якщо  $m_2=0$ ; інші тіла повинні бути зображені і тоді, коли їх маса рівна нулю.

**Знайти:** значення шуканої величини в момент часу, коли переміщення  $s$  стане рівним  $s_1=0,2$  м.

Шукана величина вказана в стовпчику “Знайти” таблиці, де позначено:  $v_1, v_2, v_{C5}$  – відповідно швидкості вантажів 1, 2 і центра мас тіла 5;  $\omega_3, \omega_4$  – відповідно кутові швидкості тіл 3 і 4.

Таблиця Д6

| Номер умови | $m_1,$<br>кг | $m_2,$<br>кг | $m_3,$<br>кг | $m_4,$<br>кг | $m_5,$<br>кг | $c,$<br>Н/м | $M,$<br>Н·м | $F=f(s), H$ | Знайти     |
|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-------------|-------------|-------------|------------|
| 0           | 0            | 6            | 4            | 0            | 5            | 200         | 1,2         | $80(4+5s)$  | $\omega_3$ |
| 1           | 8            | 0            | 0            | 4            | 6            | 320         | 0,8         | $50(8+3s)$  | $v_1$      |
| 2           | 0            | 4            | 6            | 0            | 5            | 240         | 1,4         | $60(6+5s)$  | $v_2$      |
| 3           | 0            | 6            | 0            | 5            | 4            | 300         | 1,8         | $80(5+6s)$  | $\omega_4$ |
| 4           | 5            | 0            | 4            | 0            | 6            | 240         | 1,2         | $40(9+4s)$  | $v_1$      |
| 5           | 0            | 5            | 0            | 6            | 4            | 200         | 1,6         | $50(7+8s)$  | $v_{C5}$   |
| 6           | 8            | 0            | 5            | 0            | 6            | 280         | 0,8         | $40(8+9s)$  | $\omega_3$ |
| 7           | 0            | 4            | 0            | 6            | 5            | 300         | 1,5         | $60(8+5s)$  | $v_2$      |
| 8           | 4            | 0            | 0            | 5            | 6            | 320         | 1,4         | $50(9+2s)$  | $\omega_4$ |
| 9           | 0            | 5            | 6            | 0            | 4            | 280         | 1,6         | $80(6+7s)$  | $v_{C5}$   |

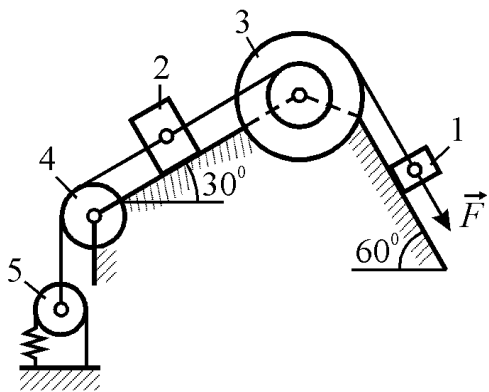


Рис. Д6.0

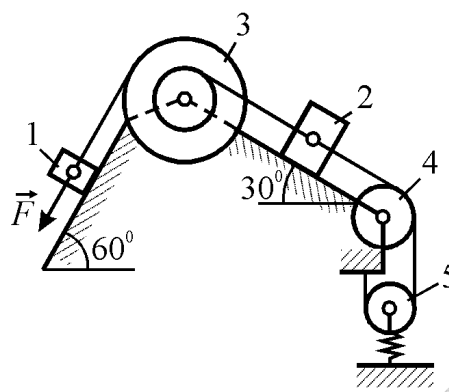


Рис. Д6.1

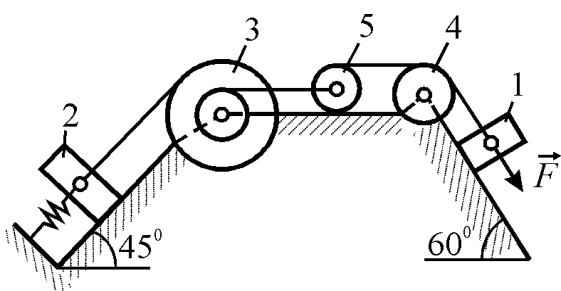


Рис. Д6.2

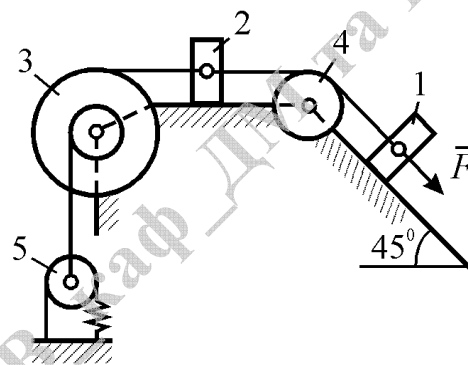


Рис. Д6.3

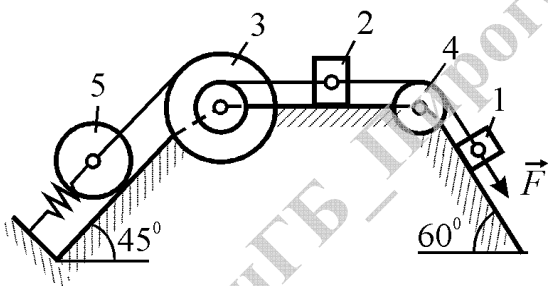


Рис. Д6.4

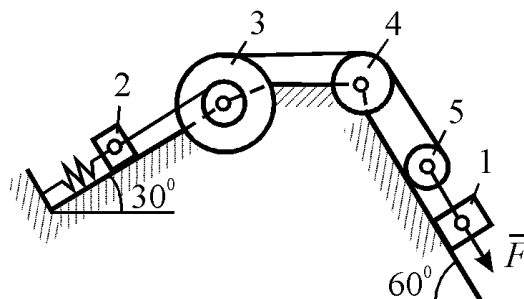


Рис. Д6.5

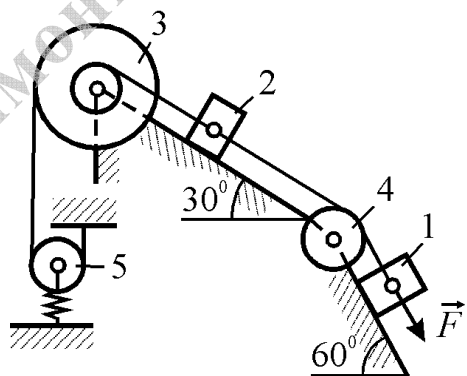


Рис. Д6.6

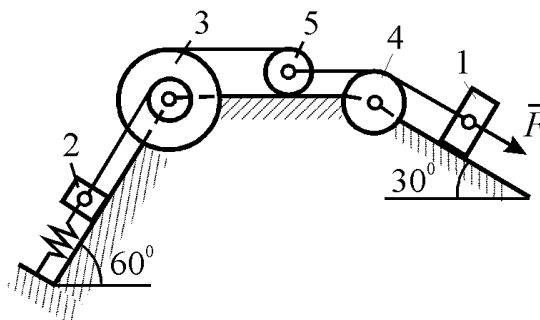


Рис. Д6.7

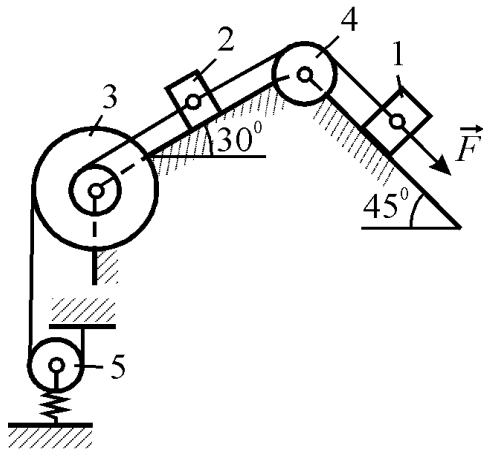


Рис. Д6.8

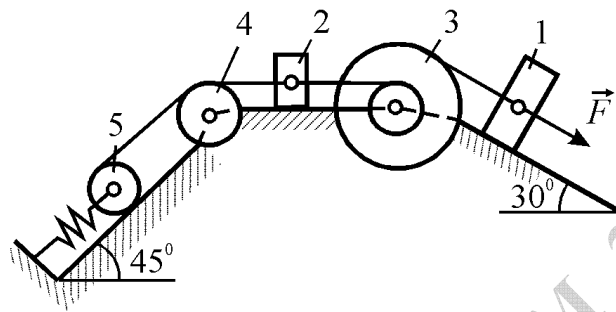


Рис. Д6.9

## 6.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача Д6 – на застосування теореми про зміну кінетичної енергії системи. При розв'язанні задачі необхідно врахувати, що кінетична енергія системи  $T$  дорівнює сумі кінетичних енергій усіх тіл, які входять до системи; цю енергію необхідно виразити через ту швидкість (лінійну чи кутову), яку у задачі необхідно визначити. Для встановлення залежності між швидкостями точок тіла, що рухається плоскопаралельно, або між його кутовою швидкістю і швидкістю центра інерції необхідно скористатися поняттям миттєвого центру швидкостей (кінематики). При обчисленні роботи треба всі переміщення виразити через задане переміщення  $s_1$ , врахувавши, що залежність між переміщеннями буде такою ж, як і між відповідними швидкостями.

## 6.3. Приклад розв'язання задачі Д6

**Умова задачі.** Механічна система складається з вантажів 1, 2, ступінчастого шківів 3 з радіусами ступеней  $R_3$ ,  $r_3$  і радіусом інерції відносно осі обертання  $\rho_3$ , блока 4 радіуса  $R_4$  і катка 5 (рис. Д6а); тіло 5 вважати суцільним однорідним циліндром, а масу блока 4 – рівномірно розподіленою по ободу. Коефіцієнт тертя вантажів об площину  $f_{mp}$ . Всі катки, враховуючи і катки обмотані нитками, котяться по площинам без ковзання. Тіла системи з'єднані одне з одним нитками, перекинутими через блоки і намотаними на шків 3 (або на шків і каток); ділянки ниток паралельні відповідним площинам. До катка 5 прикріплена пружина з коефіцієнтом жорсткості  $c$ .

Під дією сили  $F=f(s)$ , що залежить від переміщення  $s$ , система розпочинає рух із стану спокою; деформація пружини в початковий момент часу дорівнює нулю. При русі на шків 3 діє постійний момент  $M$  сил опору (від тертя в підшипниках).



**Дано:**  $f_{mp}=0,1$ ;  $m_1=4$  кг;  $m_2=8$  кг;  $m_3=5$  кг;  $m_4=6$  кг;  $m_5=3$  кг;  $R_3=0,3$  м;  $r_3=0,1$  м;  $\rho_3=0,2$  м;  $R_4=0,2$  м;  $c=350$  Н/м;  $s_1=0,2$  м;  $M=2$  Н·м;  $F=50(5+10s_1)$  Н.

**Знайти:**  $\omega_3$  в момент часу, коли переміщення  $s=s_1$ .

**Розв'язок**

**1. Побудова розрахункової схеми (рис. Д6б).** Розглянемо рух незмінної механічної системи.

1.1. Запишемо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної системи у скінченній формі

$$T - T_0 = \sum A_i^{(e)},$$

де  $T, T_0$  – відповідно кінетична енергія системи в поточний та початковий момент часу;  $A_i^{(e)}$  – робота зовнішніх сил.

Приймаємо, що у початковий момент часу  $T_0 = 0$ , тоді

$$T = \sum A_i^{(e)}. \tag{1}$$

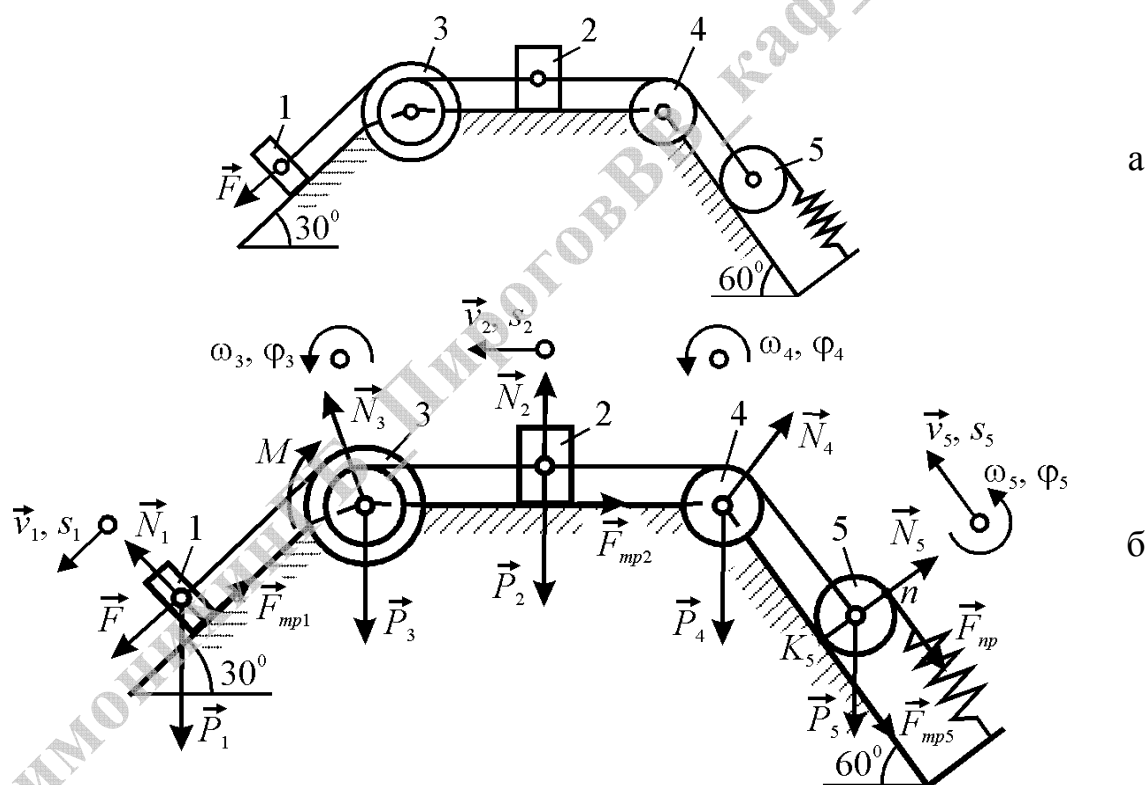


Рис. Д6 Схема механічної системи:  
а – вихідна схема; б – розрахункова схема

1.2. Показуємо напрямки переміщень та швидкостей.

1.3. Прикладаємо зовнішні сили і моменти, що діють на тіла системи: активні  $\vec{F}, \vec{F}_{mp}, \vec{P}_i = m_i \vec{g}, /i = \overline{1,5}/$ ; реакції  $\vec{N}_i, /i = \overline{1,5}/$ ; сили тертя ковзання  $\vec{F}_{mp1}, \vec{F}_{mp2}$ , силу тертя зчеплення  $\vec{F}_{mp5}$  і момент  $M$ .

## 2. Визначення зв'язків між переміщеннями та швидкостями.

2.1. Визначаємо зв'язки між переміщеннями. Виразимо всі переміщення через незалежне лінійне переміщення  $s_1$ :

$$\varphi_3 = \frac{s_1}{R_3}, \quad s_2 = s_5 = \varphi_3 r_3 = \frac{r_3 s_1}{R_3}, \quad \varphi_4 = \frac{s_2}{R_4} = \frac{r_3 s_1}{R_3 R_4},$$

$$\varphi_5 = \frac{s_5}{R_5} = \frac{r_3 s_1}{R_3 R_5}, \quad s_n = \varphi_5 2R_5 = \frac{2r_3 s_1}{R_3}. \quad (2)$$

2.2. Визначаємо зв'язки між швидкостями. Виразимо всі швидкості через незалежну кутову швидкість  $\omega_3$ :

$$v_1 = \omega_3 R_3, \quad v_2 = v_5 = \omega_3 r_3, \quad \omega_4 = \frac{v_2}{R_4} = \frac{\omega_3 r_3}{R_4}, \quad \omega_5 = \frac{v_5}{R_5} = \frac{r_3 \omega_3}{R_5}. \quad (3)$$

3. Визначення кінетичної енергії системи. Кінетична енергія системи має вигляд:

$$T = \sum_{i=1}^5 T_i = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5. \quad (4)$$

Тіло 1 рухається поступально, тому

$$T_1 = m_1 v_1^2 / 2. \quad (5)$$

Тіло 2 рухається поступально, тому

$$T_2 = m_2 v_2^2 / 2. \quad (6)$$

Тіло 3 – ступінчастий шків з радіусом інерції відносно осі обертання  $\rho_3$  – обертається навколо нерухомої осі, тому

$$T_3 = J_3 \omega_3^2 / 2. \quad (7)$$

Тіло 4 – барабан, маса якого розподілена по ободу – обертається навколо нерухомої осі, тому

$$T_4 = J_4 \omega_4^2 / 2. \quad (8)$$

Тіло 5 – рухомий блок, який є суцільним однорідним циліндром – рухається плоскопаралельно, тому

$$T_5 = (m_5 v_5^2 + J_5 \omega_5^2) / 2. \quad (9)$$

В (7), (8) та (9) осьові моменти інерції відповідних тіл мають вигляд:

$$J_3 = m_3 \rho_3^2, \quad J_4 = m_4 R_4^2, \quad J_5 = m_5 R_5^2 / 2. \quad (10)$$

Підставляючи (5) – (9) в (4) та враховуючи вирази для осьових моментів інерції (10), кінетична енергія системи матиме вигляд:

$$T = \frac{1}{2} \left[ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 \rho_3^2 \omega_3^2 + m_4 R_4^2 \omega_4^2 + m_5 \left( v_5^2 + \frac{R_5^2 \omega_5^2}{2} \right) \right],$$

або з врахуванням зв'язків для швидкостей (3), отримаємо

$$T = \frac{1}{2} \left\{ m_1(\omega_3 R_3)^2 + m_2(\omega_3 r_3)^2 + m_3 \rho_3^2 \omega_3^2 + m_4 R_4^2 \left( \frac{\omega_3 r_3}{R_4} \right)^2 + m_5 [(\omega_3 r_3)^2 + \right. \\ \left. + \frac{R_5^2}{2} \left( \frac{r_3 \omega_3}{R_5} \right)^2 \right\} = \frac{\omega_3^2}{2} \left( m_1 R_3^2 + m_2 r_3^2 + m_3 \rho_3^2 + m_4 R_4^2 + \frac{3}{2} m_5 r_3^2 \right) = \frac{1}{2} J_{зв} \omega_3^2, \quad (11)$$

де

$$J_{зв} = m_1 R_3^2 + m_3 \rho_3^2 + r_3^2 \left( m_2 + m_4 + \frac{3}{2} m_5 \right)$$

– зведений до третього тіла осьовий момент інерції системи.

**4. Визначення роботи зовнішніх сил.** Робота зовнішніх сил, які прикладені до тіл системи має вигляд:

$$\sum A_i^{(e)} = A_1^{(e)} + A_2^{(e)} + A_3^{(e)} + A_4^{(e)} + A_5^{(e)}. \quad (12)$$

Робота зовнішніх сил прикладених до 1-го тіла

$$A_1^{(e)} = A(\vec{F}) + A(\vec{P}_1) + A(\vec{N}_1) + A(\vec{F}_{mp1}) = \int_0^{x_1} 50(5 + 10s_1) ds_1 + \\ + m_1 g \sin 30^\circ s_1 - F_{mp1} s_1 = s_1 [250(1 + s_1) + m_1 g \sin 30^\circ - F_{mp}]. \quad (13)$$

Робота зовнішніх сил прикладених до 2-го тіла

$$A_2^{(e)} = A(\vec{F}_{mp2}) + A(\vec{P}_2) + A(\vec{N}_2) = -F_{mp2} s_2. \quad (14)$$

Робота зовнішніх сил прикладених до 3-го тіла

$$A_3^{(e)} = A(M) + A(\vec{P}_3) + A(\vec{N}_3) = -M \varphi_3. \quad (15)$$

Робота зовнішніх сил прикладених до 4-го тіла

$$A_4^{(e)} = A(\vec{P}_4) + A(\vec{N}_4) = 0. \quad (16)$$

Робота зовнішніх сил прикладених до 5-го тіла

$$A_5^{(e)} = A(\vec{P}_5) + A(\vec{N}_5) + A(\vec{F}_{mp5}) + A(\vec{F}_{np}) = -m_5 g \sin 60^\circ s_5 - \frac{c}{2} s_{np}^2, \quad (17)$$

де в (17) було враховано, що

$$A(\vec{F}_{np}) = -\frac{c}{2} (\Delta l^2 - \Delta l_0^2) = \{ \Delta l = s_n, \Delta l_0 = 0 \} = -c s_n^2 / 2.$$

Зазначимо, що в (13) – (17) приймалось, що

$$A(\vec{N}_1) = 0, \quad A(\vec{P}_2) = 0, \quad A(\vec{N}_2) = 0, \quad A(\vec{P}_3) = 0, \quad A(\vec{N}_3) = 0, \\ A(\vec{P}_4) = 0, \quad A(\vec{N}_4) = 0, \quad A(\vec{N}_5) = 0, \quad A(\vec{F}_{mp5}) = 0,$$

так як реакції  $\vec{N}_1$ ,  $\vec{N}_2$  та сила  $\vec{P}_2$  перпендикулярні переміщенням відповідних тіл, реакції  $\vec{N}_3$ ,  $\vec{N}_4$  та сили  $\vec{P}_3$ ,  $\vec{P}_4$  прикладені в нерухомих

точках, а сили  $\vec{N}_5$  і  $\vec{F}_{mp5}$  прикладені в миттєвому центрі швидкостей. Підставляючи (13) – (17) в (12) та враховуючи, що

$$F_{mp1} = f_{mp} N_1 = f_{mp} m_1 g \cos 30^0, \quad F_{mp2} = f_{mp} N_2 = f_{mp} m_2 g,$$

робота зовнішніх сил матиме вигляд

$$\sum A_i^{(e)} = s_1 [250(1 + s_1) + m_1 g (\sin 30^0 - f_{mp} \cos 30^0)] - f_{mp} m_2 g s_2 - \\ - M \varphi_3 - m_5 g \sin 60^0 s_5 - \frac{c}{2} s_{np}^2,$$

або з врахуванням зв'язків для переміщень (2), отримаємо

$$\sum A_i^{(e)} = s_1 [250(1 + s_1) + m_1 g (\sin 30^0 - f_{mp} \cos 30^0) - \\ - f_{mp} m_2 g \frac{r_3}{R_3} - \frac{M}{R_3} - m_5 g \sin 60^0 \frac{r_3}{R_3} - 2c \frac{r_3^2}{R_3^2} s_1] = s_1 F_{3e}, \quad (18)$$

де

$$F_{3e} = 250(1 + s_1) + m_1 g (\sin 30^0 - f_{mp} \cos 30^0) - \\ - f_{mp} m_2 g \frac{r_3}{R_3} - \frac{M}{R_3} - m_5 g \sin 60^0 \frac{r_3}{R_3} - 2c \frac{r_3^2}{R_3^2} s_1$$

– зведена до першого тіла сила.

**5. Проведення розрахунків.** Підставимо знайдені вирази для кінетичної енергії системи (11) та для роботи зовнішніх сил (18) в теорему про зміну кінетичної енергії системи (1), отримаємо:

$$J_{3e} \omega_3^2 = 2s_1 F_{3e},$$

звідки

$$\omega_3 = \sqrt{2s_1 F_{3e} / J_{3e}}.$$

Підставивши вихідні дані в вираз для зведеної сили і зведеного осьового моменту інерції отримаємо:

$$J_{3e} = 4 \cdot 0,3^2 + 5 \cdot 0,2^2 + 0,1^2 \cdot \left( 8 + 6 + \frac{3}{2} \cdot 3 \right) = 0,745 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$F_{3e} = 250(1 + 0,2) + 4 \cdot 9,8 \cdot (0,5 - 0,1 \cdot 0,866) - \\ - 0,1 \cdot 8 \cdot 9,8 \frac{0,1}{0,3} - \frac{2}{0,3} - 3 \cdot 9,8 \cdot 0,866 \frac{0,1}{0,3} - 2 \cdot 350 \frac{0,1^2}{0,3^2} \cdot 0,2 \approx 283 \text{ Н}.$$

Остаточно отримуємо

$$\omega_3 = \sqrt{2 \cdot 0,2 \cdot 283 / 0,745} \approx 12,33 \text{ рад/с}.$$

**Відповідь:**  $\omega_3 = 12,33 \text{ [рад/с]}$ .

## Задача Д7 – диференціальні рівняння плоскопаралельного руху твердого тіла

### 7.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Барабан радіуса  $R$  вагою  $P$  має виточку радіуса  $r=0,6R$  (рис. Д7.0 – Д7.9, табл. Д7). На барабан діють сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , напрямком яких визначається кутом  $\beta$ ; крім сил на барабан діє момент  $M$  (коли  $M<0$  напрямком момента протилежний показаному на рисунку). Барабан розглядаємо як суцільний однорідний циліндр радіуса  $R$ .

При русі, що розпочинається із стану спокою, барабан котиться без ковзання по шорсткій похилій поверхні з кутом нахилу  $\alpha$  так, як показано на рисунках.

**Знайти** (нехтуючи силами тертя кочення): закон руху центра мас  $C$  барабана, тобто  $x_c=f(t)$ , і найменше значення коефіцієнта тертя  $f_{mp}$ , при якому можливе кочення без ковзання.

Таблиця Д7

| Номер умови | $\alpha$ | $\beta$ | $F_1$  | $F_2$  | $M$      |
|-------------|----------|---------|--------|--------|----------|
|             | град     |         |        |        |          |
| 0           | 30       | 60      | 0      | $0,4P$ | 0        |
| 1           | 30       | 30      | $0,2P$ | 0      | 0        |
| 2           | 0        | 30      | 0      | $0,2P$ | $0,1PR$  |
| 3           | 30       | 0       | 0      | 0      | $0,4PR$  |
| 4           | 30       | 90      | $0,1P$ | 0      | $-0,2PR$ |
| 5           | 0        | 60      | $0,3P$ | $0,1P$ | 0        |
| 6           | 30       | 0       | 0      | $0,3P$ | $0,2PR$  |
| 7           | 0        | 60      | $0,2P$ | 0      | $0,3PR$  |
| 8           | 30       | 90      | 0      | $0,2P$ | $-0,4PR$ |
| 9           | 30       | 60      | $0,1P$ | 0      | $-0,3PR$ |

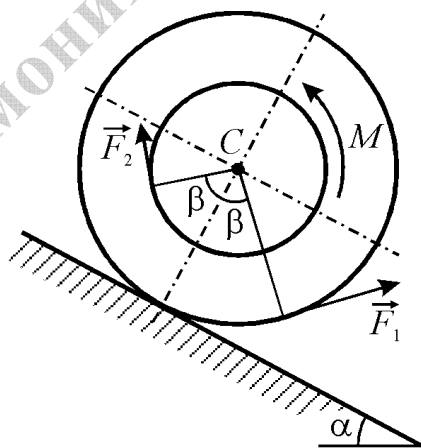


Рис. Д7.0

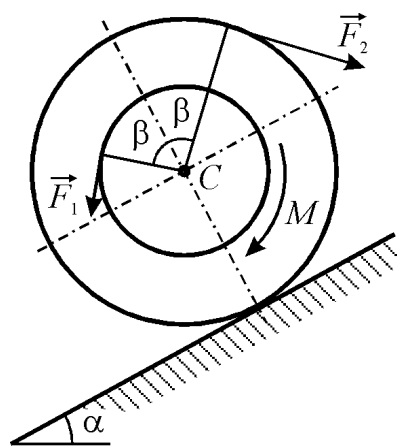


Рис. Д7.1

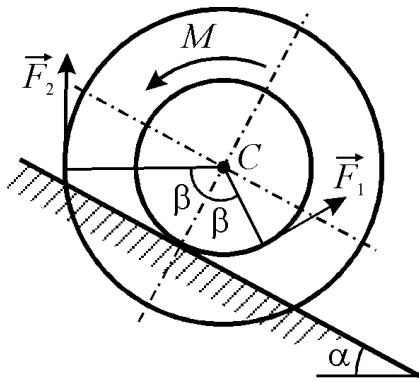


Рис. Д7.2

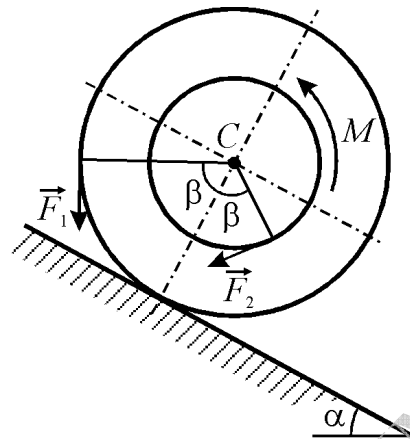


Рис. Д7.3

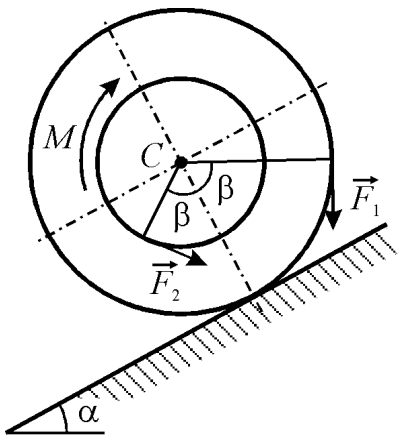


Рис. Д7.4

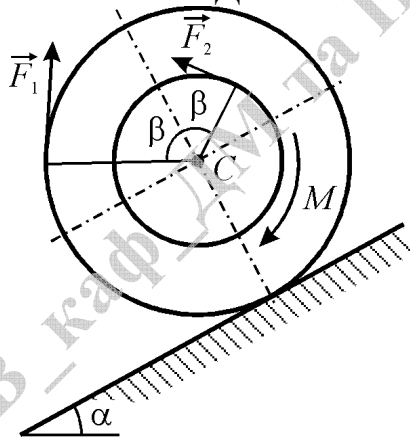


Рис. Д7.5

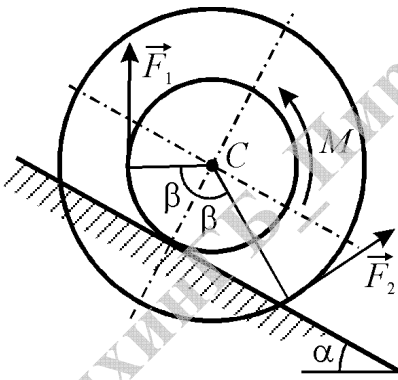


Рис. Д7.6

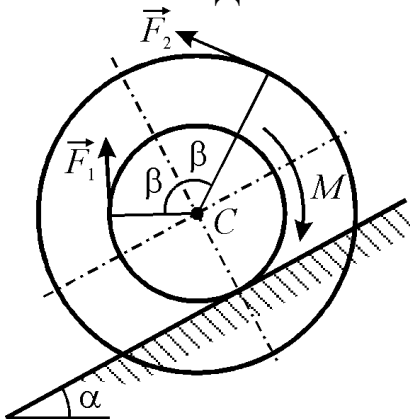


Рис. Д7.7

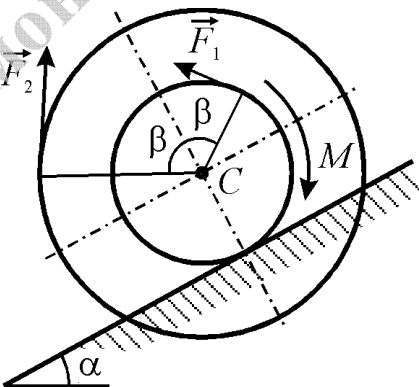


Рис. Д7.8

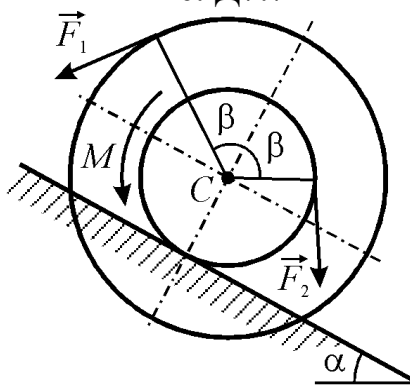


Рис. Д7.9

## 7.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача Д7 – на застосування диференціальних рівнянь плоскопаралельного руху твердого тіла. При складанні рівнянь необхідно, для запобігання помилок в знаках, направити координатну вісь  $x$  в ту сторону, куди приймається напрямлений рух центра  $C$  барабана, і вважати тоді всі моменти додатними, коли вони направлені в сторону обертання барабана. Якщо фактично напрямок руху центра  $C$  інший, то в відповіді отримаємо  $a_C < 0$ , але знайдене значення  $|a_C|$  буде вірним. Силу тертя, коли незрозуміло куди вона направлена, можна направляти в будь-яку сторону (результат від цього не залежить).

При визначенні найменшого значення коефіцієнта тертя, при якому можливе кочення без ковзання, врахувати, що сила тертя не може бути більше граничної, тобто  $|F_{mp}| \leq fN$ , звідки  $f \geq |F_{mp}|/N$ . Тому,  $f_{min} = |F_{mp}|/N$ . Суттєвим є те, що у всі ці вирази входять модулі сил (тут не пишемо  $|N|$ , так як в даній задачі не може бути  $N < 0$ ). Якщо при розрахунках  $F_{mp} < 0$ , то це означає лише те, що фактично сила  $F_{mp}$  направлена в іншу сторону; в іншому весь розрахунок буде вірним.

## 7.3. Приклад розв'язання задачі Д7

**Умова задачі.** Барабан (суцільний однорідний циліндр) радіуса  $R$  вагою  $P$  котиться без ковзання по шорсткій похилій поверхні з кутом нахилу  $\alpha$  (рис. Д7а). На барабан діє сила  $\vec{F}$  і момент  $M$ .

**Дано:**  $P = mg$ ,  $F = 0,2P$ ,  $M = 0,5PR$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ .

**Знайти** (нехтуючи силами тертя кочення): 1) закон руху центра мас  $C$  барабана, тобто  $x_C = f(t)$ ; 2) найменше значення коефіцієнта тертя  $f_{mp}$ , при якому можливе кочення без ковзання.

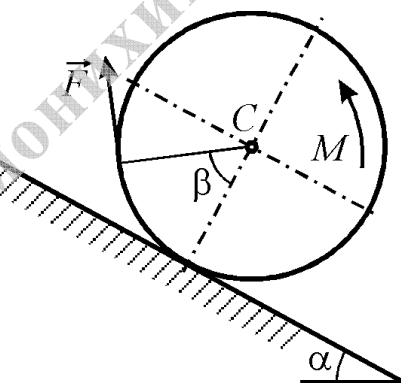


Рис. Д7а

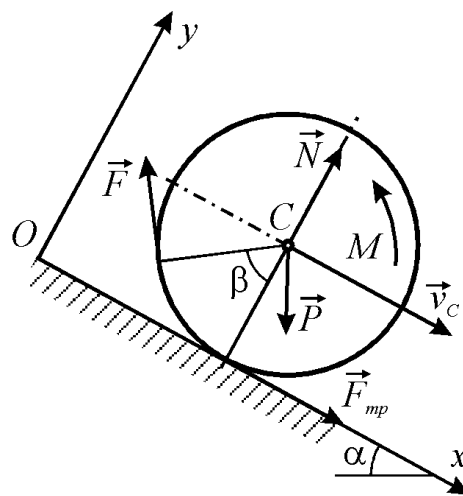


Рис. Д7б

Рис. Д7 Схема плоскопаралельного руху барабана:  
а – вихідна схема; б – розрахункова схема

## Розв'язок

### 1. Побудова розрахункової схеми (рис. Д7б).

1.1. Вводимо координатні осі  $x$  та  $y$ .

1.2. Прикладаємо зовнішні сили і моменти, що діють на барабан: активні  $\vec{F}$ ,  $\vec{P} = m\vec{g}$ ; реакцію  $\vec{N}$ ; силу тертя  $\vec{F}_{mp}$  і момент  $M$ .

### 2. Складання диференціальних рівнянь плоскопаралельного руху барабана.

2.1. Векторна форма диференціальних рівнянь:

$$m\vec{a}_C = \vec{N} + \vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_{mp}, \quad \frac{d\vec{K}_C}{dt} = \sum \vec{M}_C(\vec{F}_i), \quad (1)$$

де  $\vec{a}_C$  – пришвидшення центра мас барабана;  $\vec{K}_C$  – кінетичний момент барабана відносно точки  $C$ ;  $\vec{M}_C(\vec{F}_i)$  – момент  $i$ -ої сили відносно точки  $C$ .

2.2. Координатна форма.

$$m\ddot{x}_C = P \sin \alpha + F_{mp} - F \cos \beta, \quad (a)$$

$$0 = N - P \cos \alpha + F \sin \beta, \quad (б)$$

$$J_C \ddot{\phi} = FR - F_{mp} R - M, \quad (в)$$

де  $\ddot{x}_C, \ddot{y}_C$  – відповідно проекції пришвидшення центра мас барабана на вісь  $Ox$  та  $Oy$  (тут  $\ddot{y}_C = 0$ , так як  $y_C = \text{const}$ );  $J_C = mR^2/2$  – осьовий момент інерції барабана відносно центральної осі, що проходить через центр мас барабана – точку  $C$  та перпендикулярна площині малюнка.

### 3. Визначення закону руху центра мас барабана.

3.1. Визначення пришвидшення центра мас барабана. Враховуючи зв'язок для прискорень  $\ddot{\phi} = \ddot{x}_C / R$ , перепишемо третє рівняння системи (2в)

$$\frac{mR^2}{2} \frac{\ddot{x}_C}{R} = FR - F_{mp} R - M,$$

або після перетворень отримаємо

$$\frac{1}{2} m\ddot{x}_C = F - F_{mp} - \frac{M}{R}. \quad (3)$$

Додамо перше рівняння системи (2а) і рівняння (3) отримаємо:

$$\left(\frac{m}{2} + m\right)\ddot{x}_C = P \sin \alpha - \frac{M}{R} + F(1 - \cos \beta), \quad \text{звідки}$$

$$\ddot{x}_C = \frac{dv_C}{dt} = b, \quad (4)$$



де

$$b = \frac{2}{3m} \left[ P \sin \alpha - \frac{M}{R} + F(1 - \cos \beta) \right]. \quad (5)$$

3.2. Інтегрування диференціального рівняння (4).

Розділимо змінні  $v_C$  та  $t$  у рівнянні (4) домноживши праву і ліву частину рівняння на  $dt$ , матимемо

$$dv_C = b dt; \quad \int dv_C = b \int dt.$$

Після інтегрування отримаємо

$$v_C = \frac{dx_C}{dt} = bt + C_1. \quad (6)$$

Отримане рівняння (6) є першим інтегралом.

Розділимо змінні  $x_C$  та  $t$  у рівнянні (6) помноживши праву і ліву частину рівняння на  $dt$ , отримаємо:

$$dx_C = (bt + C_1) dt. \quad (7)$$

Проінтегруємо рівняння (7):

$$\int dx_C = \int (bt + C_1) dt, \quad \text{звідки}$$

$$x_C = b \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \quad (8)$$

Отримане рівняння (8) є другим інтегралом.

3.3. Знаходження сталих інтегрування. Враховуючи початкові умови руху

$$t_0=0, \quad x_{C0}=0, \quad v_{C0}=0,$$

отримаємо з першого та другого інтегралу

$$0 = 0 + C_1, \quad 0 = 0 + 0 + C_2 \quad \text{або} \quad C_1=0, \quad C_2=0.$$

Отже, закон руху центра мас барабана має вигляд

$$x_C = bt^2 / 2. \quad (9)$$

**4. Визначення найменшого коефіцієнта тертя  $f_{min}$  при якому можливе кочення без ковзання.**

Для визначення  $f$  скористаємося тим, що при коченні без ковзання сила тертя повинна задовольняти нерівність:

$$|F_{mp}| \leq fN. \quad (10)$$

Нормальну реакцію поверхні знайдемо скориставшись другим рівнянням системи (2б), отримаємо:

$$N = P \cos \alpha - F \sin \beta. \quad (11)$$

Значення  $F_{mp}$  знайдемо з рівняння (3), замінивши у ньому  $\ddot{x}_C$  його значенням (4). Одержимо

$$\frac{mb}{2} = F - F_{mp} - \frac{M}{R}, \quad \text{звідки}$$

$$F_{mp} = F - \frac{mb}{2} - \frac{M}{R}. \quad (12)$$

Підставляючи знайдені  $F_{mp}$  та  $N$  з (11) та (12) в (10) отримаємо:

$$f_{\min} \geq \left| F - \frac{mb}{2} - \frac{M}{R} \right| / (P \cos \alpha - F \sin \beta). \quad (13)$$

**5. Проведення розрахунків.** Підставимо вираз (5) та вихідні дані в вираз (9) для закону руху центра мас барабана, отримаємо:

$$x_C = \frac{2}{3m} \left[ 0,5mg - \frac{0,5mgR}{R} + 0,2mg(1-0,5) \right] \frac{t^2}{2},$$

або остаточно

$$x_C = 0,033gt^2.$$

Підставимо вихідні дані в вираз (13) для коефіцієнта тертя, отримаємо:

$$\begin{aligned} f_{\min} &\geq \frac{\left| 0,2mg - \frac{1}{3} \left[ 0,5mg - \frac{0,5mgR}{R} + 0,2mg(1-0,5) \right] - \frac{0,5mgR}{R} \right|}{0,866mg - 0,2 \cdot 0,866mg} = \\ &= \frac{\left| 0,2mg - 0,033mg - 0,5mg \right|}{0,693mg} = \frac{\left| -0,333 \right|}{0,693} = 0,481. \end{aligned}$$

Отже

$$f_{\min} \geq 0,481.$$

Найменший коефіцієнт тертя при якому можливе кочення барабана по поверхні без ковзання становить  $f_{\min}=0,481$ .

**Відповідь:**  $x_C=0,033gt^2$  [м],  $f_{\min}=0,481$ .

## Задача Д8 – принцип Даламбера

### 8.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Вертикальний вал  $AK$  (рис. Д8.0 – Д8.9, табл. Д8), що обертається із сталою кутовою швидкістю  $\omega=10 \text{ c}^{-1}$ , закріплений підп'ятником у точці  $A$  і циліндричним підшипником у точці вказаній в таблиці в стовпці 2, ( $AB=BD=DE=EK=a=0,6 \text{ м}$ ). До вала жорстко закріплений тонкий однорідний ламаний стрижень масою  $m=10 \text{ кг}$ , що складається з двох частин 1 та 2 (розміри частин стрижня показані на рисунках, де  $b=0,1 \text{ м}$ , а їх маси  $m_1$  і  $m_2$  пропорційні їх довжинам), і невагомий стрижень довжиною  $l=4b$  із точковою масою  $m_3=3 \text{ кг}$  на кінці; обидва стрижні лежать в одній площині. Точки кріплення стрижнів вказані в таблиці в стовпцях 3 і 4, а кути  $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$  – в стовпцях 5-8.

**Знайти** (нехтуючи вагою вала): реакції підп'ятника і підшипника.

Таблиця Д8

| Номер умови | Підшипник в точці | Кріплення в точці |                   | $\alpha$ , град | $\beta$ , град | $\gamma$ , град | $\varphi$ , град |
|-------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------|----------------|-----------------|------------------|
|             |                   | ломаного стрижня  | невагомий стрижня |                 | рис. 0-4       | рис. 5-9        |                  |
| <b>1</b>    | <b>2</b>          | <b>3</b>          | <b>4</b>          | <b>5</b>        | <b>6</b>       | <b>7</b>        | <b>8</b>         |
| 0           | $B$               | $D$               | $K$               | 45              | 135            | 225             | 60               |
| 1           | $K$               | $B$               | $D$               | 60              | 240            | 150             | 45               |
| 2           | $K$               | $E$               | $B$               | 30              | 210            | 120             | 60               |
| 3           | $D$               | $K$               | $B$               | 60              | 150            | 240             | 30               |
| 4           | $K$               | $D$               | $E$               | 30              | 120            | 210             | 60               |
| 5           | $E$               | $B$               | $K$               | 45              | 225            | 135             | 60               |
| 6           | $E$               | $D$               | $K$               | 60              | 60             | 150             | 30               |
| 7           | $K$               | $B$               | $E$               | 30              | 30             | 120             | 60               |
| 8           | $D$               | $E$               | $K$               | 60              | 150            | 60              | 30               |
| 9           | $K$               | $K$               | $D$               | 30              | 120            | 210             | 60               |

### 8.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача Д8 – на застосування до вивчення руху системи принципа Даламбера. При розв'язанні задачі врахувати, що коли сили інерції часток тіла (стрижня) мають рівнодійну  $\vec{R}^{in}$ , то чисельно  $R^{in} = ma_C$ , де  $m$  – маса тіла,  $a_C$  – пришвидшення центра мас  $C$  тіла. В загальному випадку лінія дії сили  $\vec{R}^{in}$  не проходить через точку  $C$ .

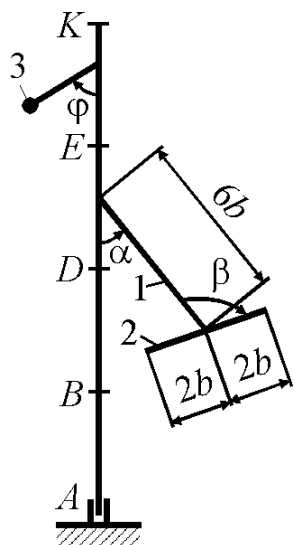


Рис. Д8.0

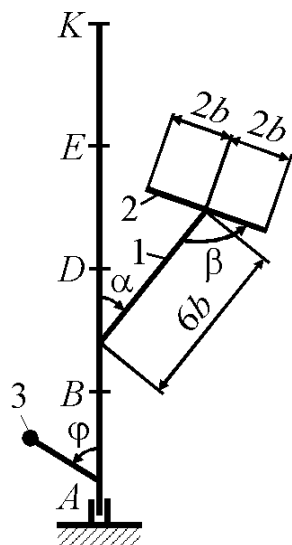


Рис. Д8.1

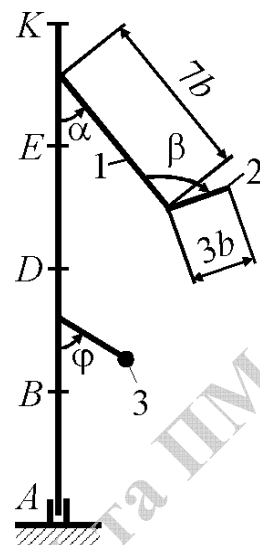


Рис. Д8.2

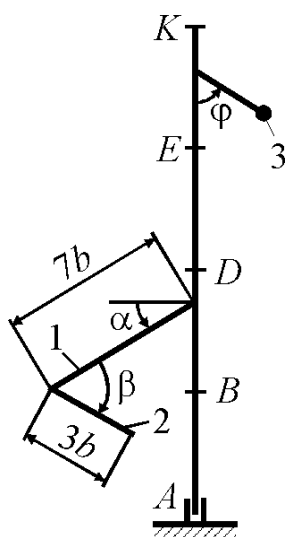


Рис. Д8.3

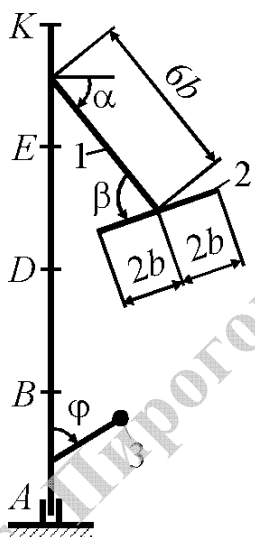


Рис. Д8.4

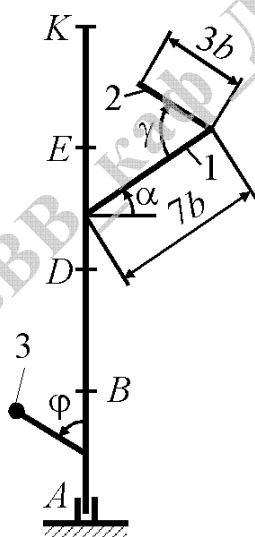


Рис. Д8.5

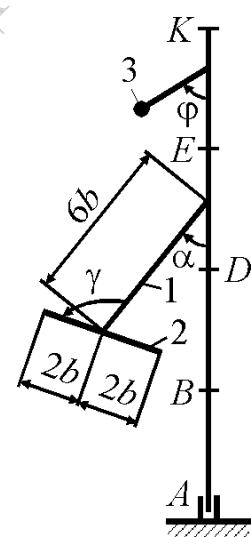


Рис. Д8.6

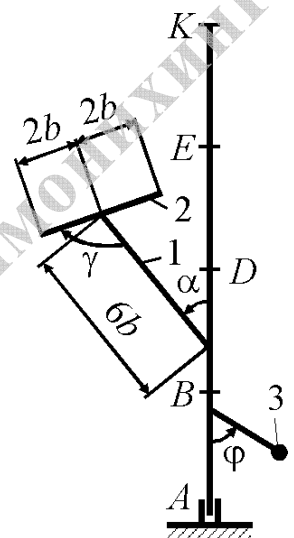


Рис. Д8.7

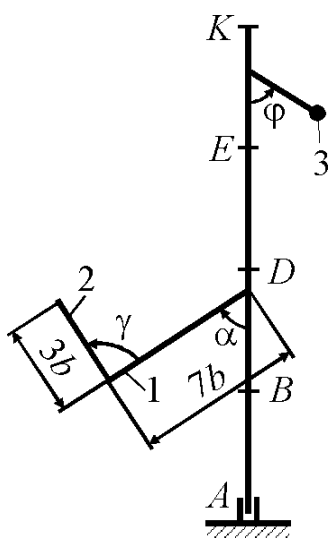


Рис. Д8.8

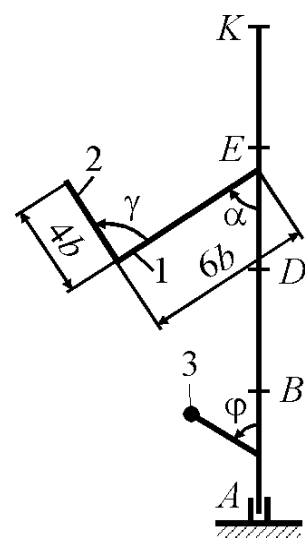


Рис. Д8.9

### 8.3. Приклад розв'язання задачі Д8

**Умова задачі.** Вертикальний вал  $AK$  (рис. Д8а), що обертається із сталою кутовою швидкістю  $\omega$ , закріплений підп'ятником у точці  $A$  і циліндричним підшипником у точці  $E$  ( $AB=BD=DE=EK=a$ ). На валу в точці  $B$  жорстко закріплений тонкий однорідний ламаний стрижень масою  $m$ , що складається з двох частин 1 та 2 (маси частин стрижня  $m_1$  і  $m_2$  пропорційні їх довжинам), а в точці  $K$  закріплений невагомий стрижень довжиною  $l=4b$  із точковою масою  $m_3$  на кінці. Обидва стрижні лежать в одній площині.

**Дано:**  $m=10$  кг;  $m_3=5$  кг;  $\omega=10$  рад/с;  $a=0,6$  м;  $b=0,1$  м;  $l=4b$ ;  $\alpha=60^\circ$ ;  $\beta=120^\circ$ ;  $\gamma=45^\circ$ .

**Знайти** (нехтуючи вагою вала): реакції підп'ятника і підшипника.

#### Розв'язок

##### 1. Побудова розрахункової схеми (рис. Д8б).

1.1. Побудову розрахункової схеми виконуватимемо відповідно до принципу Даламбера, який має вигляд

$$\vec{F} + \vec{F}^{in} = 0, \quad (1)$$

де  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}^{in}$  – відповідно активні сили і сили інерції.

1.2. Введемо координатні осі  $x$  та  $y$ , які жорстко зв'язані з валом, так, щоб стрижні лежали в площині  $Axy$ .

1.3. Прикладаємо до розглядуваної системи сили: активні сили – сили ваги  $\vec{P}_i = m_i \vec{g}$ ,  $i = \overline{1,3}$ ; реакції в'язей (опор) –  $\vec{X}_A$ ,  $\vec{Y}_A$ ,  $\vec{R}_E$ ; сили інерції, що прикладені до  $j$ -го елемента стрижня –  $\vec{F}_j^{in}$  (рис. Д8б).

При побудові розрахункової схеми матимемо на увазі наступне. Так як вал обертається рівномірно, то елементи стрижня мають тільки нормальні прискорення  $\vec{a}_j^n$ , спрямовані до осі обертання, причому

$$a_j^n = \omega^2 r_j, \quad (2)$$

де  $r_j$  – радіус обертання  $j$ -го елемента стрижня. Тоді сила інерції  $\vec{F}_j^{in}$  буде спрямована в протилежний бік прискоренню  $\vec{a}_j^n$  і матиме вигляд:

$$F_j^{in} = m_j a_j^n = m_j \omega^2 r_j, \quad (3)$$

де  $m_j$  – маса  $j$ -го елемента стрижня.

Так як всі  $\vec{F}_j^{in}$  пропорційні  $r_j$ , тому епюри паралельних сил інерції ламаного стрижня утворюють для частини 1 трикутник, а для частини 2 – прямокутник (рис. Д8б).

Кожну з отриманих систем паралельних сил інерції замінюємо на її рівнодійну, тобто відповідно на  $\vec{R}_1^{in}$  і  $\vec{R}_2^{in}$ , які прикладені до відповідних частин ламаного стрижня. Лінії дії рівнодійних  $\vec{R}_1^{in}$  і  $\vec{R}_2^{in}$  пройдуть через центри ваги відповідних епюр сил інерції.

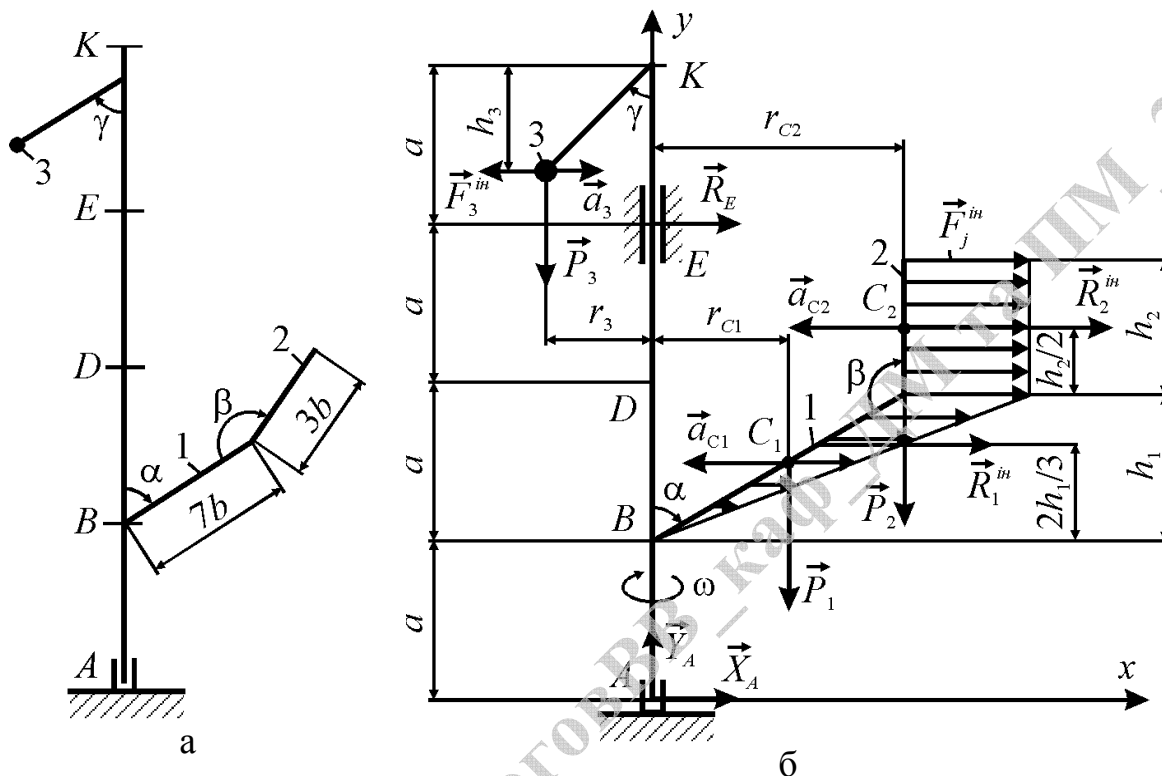


Рис. Д8 Схема вертикального вала з ламаними стрижнями:  
а – вихідна схема; б – розрахункова схема

## 2. Складання рівнянь рівноваги.

Відповідно до принципу Даламбера (1) зовнішні сили (активні і реакції в'язей) та сили інерції утворюють зрівноважену систему сил. Складемо для розглядуваної довільної плоскої системи сил три рівняння рівноваги. Отримаємо:

$$\sum F_{ix} = 0: R_E + X_A + R_1^{in} + R_2^{in} - F_3^{in} = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0: Y_A - P_1 - P_2 - P_3 = 0;$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0: -R_E 3a - 7b \sin \alpha (0,5P_1 + P_2) + P_3 l \sin \gamma -$$

$$-R_1^{in} \left( a + \frac{2}{3} h_1 \right) - R_2^{in} \left( a + h_1 + \frac{h_2}{2} \right) + F_3^{in} (4a - h_3) = 0, \quad (4)$$

де в (4)

$$R_1^{in} = m_1 a_{C1}, \quad R_2^{in} = m_2 a_{C2}, \quad F_3^{in} = m_3 a_3; \quad (5)$$

$$P_1 = m_1 g, \quad P_2 = m_2 g, \quad P_3 = m_3 g; \quad (6)$$

$$h_1 = 7b \cos \alpha; \quad h_2 = 3b; \quad h_3 = l \cos \gamma. \quad (7)$$

Тут в (5) та (6) було враховано, що маси частин 1 і 2 ламаного стрижня пропорційні їх довжинам і відповідно рівні  $m_1=0,7m$  та  $m_2=0,3m$ .

В (5) пришвидшення центрів мас частин ламаного стрижня і точки мають вигляд:

$$a_{C1} = \omega^2 r_{C1}, \quad a_{C2} = \omega^2 r_{C2}, \quad a_3 = \omega^2 r_3. \quad (8)$$

де  $r_{C1}$ ,  $r_{C2}$ ,  $r_3$  – радіуси обертань відповідно центрів мас частин ламаного стрижня і точки. Тут в (8)

$$r_{C1} = 7b \sin \alpha / 2, \quad r_{C2} = 7b \sin \alpha, \quad r_3 = l \sin \gamma. \quad (9)$$

**3. Знаходження реакцій опор.** З рівнянь (4) знайдемо:

$$Y_A = P_1 + P_2 + P_3, \quad X_A = F_3^{ih} - R_E - R_1^{ih} - R_2^{ih},$$

$$R_E = \frac{1}{3a} [P_3 l \sin \gamma - 7b \sin \alpha (0,5P_1 + P_2) - R_1^{ih} \left( a + \frac{2}{3} h_1 \right) - R_2^{ih} \left( a + h_1 + \frac{h_2}{2} \right) + F_3^{ih} (4a - h_3)]. \quad (10)$$

**4. Проведення розрахунків.** Підставимо вихідні дані в вирази (5) – (9), отримаємо:

$$P_1 = 0,7 \cdot 10 \cdot 9,8 = 68,6 \text{ Н}; \quad P_2 = 0,3 \cdot 10 \cdot 9,8 = 29,4 \text{ Н};$$

$$P_3 = 5 \cdot 9,8 = 49 \text{ Н}. \quad (11)$$

$$h_1 = 7 \cdot 0,1 \cdot 0,5 = 0,35 \text{ м}; \quad h_2 = 3 \cdot 0,1 = 0,3 \text{ м};$$

$$h_3 = 0,4 \cdot 0,707 \approx 0,283 \text{ м}. \quad (12)$$

$$r_{C1} = 7 \cdot 0,1 \cdot 0,866 / 2 \approx 0,305 \text{ м}, \quad r_{C2} = 7 \cdot 0,1 \cdot 0,866 \approx 0,61 \text{ м},$$

$$r_3 = 4 \cdot 0,1 \cdot 0,707 \approx 0,283 \text{ м}. \quad (13)$$

Підставимо (13) і (8) в (5) отримаємо:

$$R_1^{ih} = m_1 \omega^2 r_{C1} = 0,7 \cdot 10 \cdot 10^2 \cdot 0,305 = 213,5 \text{ Н},$$

$$R_2^{ih} = m_2 \omega^2 r_{C2} = 0,3 \cdot 10 \cdot 10^2 \cdot 0,61 = 183 \text{ Н},$$

$$F_3^{ih} = m_3 \omega^2 r_3 = 5 \cdot 10^2 \cdot 0,283 = 141,5 \text{ Н}. \quad (14)$$

Підставимо (11), (12) і (14) в рівняння (10) знайдемо:

$$Y_A = 68,6 + 29,4 + 49 = 147 \text{ Н},$$

$$R_E = \frac{1}{3 \cdot 0,6} [49 \cdot 0,4 \cdot 0,707 - 7 \cdot 0,1 \cdot 0,866 \cdot (0,5 \cdot 68,6 + 29,4) - 213,5 \cdot \left( 0,6 + \frac{2}{3} \cdot 0,35 \right) - 183 \cdot \left( 0,6 + 0,35 + \frac{0,3}{2} \right) + 141,5 \cdot (4 \cdot 0,6 - 0,283)] \approx -58,01 \text{ Н},$$

$$X_A = 141,5 - (-58,01) - 213,5 - 183 \approx -197 \text{ Н}.$$

**5. Перевірка.** Складемо рівняння для перевірки (наприклад, рівняння моментів) так, щоб в нього входили всі невідомі:

$$\sum M_{C_2}(\vec{F}_i) = 0 : X_A \left( a + h_1 + \frac{h_2}{2} \right) - Y_A r_{C_2} - R_E \left( 2a - h_1 - \frac{h_2}{2} \right) + P_1 \frac{r_{C_2}}{2} + P_3 (r_{C_2} + r_3) + R_1^{in} \left( \frac{h_1}{3} + \frac{h_2}{2} \right) + F_3^{in} \left( 3a - h_1 - \frac{h_2}{2} - h_3 \right) = 0.$$

Підставивши у отримане рівняння для перевірки знайдені раніше невідомі отримаємо:

$$\begin{aligned} & -197 \cdot \left( 0,6 + 0,35 + \frac{0,3}{2} \right) - 147 \cdot 0,61 - (-58,01) \cdot \left( 2 \cdot 0,6 - 0,35 - \frac{0,3}{2} \right) + \\ & + 68,6 \cdot \frac{0,61}{2} + 49 \cdot (0,61 + 0,283) + \\ & + 213,5 \cdot \left( \frac{0,35}{3} + \frac{0,3}{2} \right) + 141,5 \cdot \left( 3 \cdot 0,6 - 0,35 - \frac{0,3}{2} - 0,283 \right) = \\ & = -306,37 + 305,98 = -0,39 \approx 0. \end{aligned}$$

Перевірка виконується. Відносна похибка становить:

$$\eta = \frac{305,98 - 306,37}{305,98} \cdot 100 \% \approx -0,127 \% < [\eta] = 5 \%.$$

**Відповідь:**  $Y_A = 147 \text{ Н}$ ,  $R_E = -58,01 \text{ Н}$ ,  $X_A = -197 \text{ Н}$ .

Знак “-” вказує на те, що сили  $R_E$  та  $X_A$  в дійсності спрямовані у протилежну сторону на відміну від напрямку показаного на рис Д86.



## Задача Д9 – принцип можливих переміщень

### 9.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Механізм, розташований у горизонтальній площині, знаходиться під дією прикладених сил у рівновазі; положення рівноваги визначається кутами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  (рис. Д9.0 – Д9.9, табл. Д9а та табл. Д9б). Довжини стрижнів механізму  $l_1=0,4$  м,  $l_4=0,6$  м, а  $l_2$ ,  $l_3$  – довільні; точка  $E$  знаходиться посередині відповідного стрижня.

На повзун  $B$  механізма діє сила пружності пружини  $\vec{F}_{np}$ ; чисельно  $F_{np}=c\lambda$ , де  $c$  – коефіцієнт жорсткості пружини,  $\lambda$  – її деформація. Крім того, на рисунках Д9.0 і Д9.1 на повзун  $D$  діє сила  $\vec{Q}$ , а на кривошип  $O_1A$  – пара сил з моментом  $M$ ; на рисунках Д9.2 – Д9.9 на кривошипи  $O_1A$  і  $O_2D$  діють пари сил з моментами  $M_1$  і  $M_2$ .

Значення всіх заданих величин приведені в табл. Д9а для рисунків Д9.0 – Д9.4 і в табл. Д9б для рисунків Д9.5 – Д9.9, де  $Q$  – виражено в ньютонках, а  $M$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  – в ньютонметрах.

Побудову креслення необхідно розпочинати з стрижня, напрямком якого визначається кутом  $\alpha$ . Якщо на кресленні прикріплений до повзуна стрижень буде суміщений з пружиною (рис. Д9.10а), то пружину слід вважати прикріпленою до повзуна з іншої сторони (рис. Д9.10б).

**Знайти:** чому рівна при рівновазі деформація  $\lambda$  пружини, і вказати, розтягнута вона чи стиснута.

### 9.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача Д9 – на визначення умов рівноваги механічної системи за допомогою принципу можливих переміщень. Механізм у розглянутій задачі має один ступінь вільності, тобто одне незалежне можливе переміщення. Для розв'язання задачі необхідно надати механізму можливе переміщення, обчислити суму елементарних робіт всіх діючих активних сил і пар на цьому переміщенні і прирівняти її до нуля. Всі можливі переміщення, які ввійшли в отримане рівняння, необхідно виразити через незалежне (в якості незалежного можна обрати будь-яке можливе переміщення).

Щоб знайти  $\lambda$ , треба з отриманої умови рівноваги визначити силу пружності  $F$ . На кресленні цю силу можна направити в будь-яку сторону (тобто вважати пружину розтягнутою, чи стиснутою); чи вірно обраний напрямок сили, вкаже знак.

Таблиця Д9а (до рис. Д9.0 – Д9.4)

| Номер умови | Кути, град |         |          |           |          | $c, H/cm$ | рис. 0-1 |     | рис. 2-4 |       |
|-------------|------------|---------|----------|-----------|----------|-----------|----------|-----|----------|-------|
|             | $\alpha$   | $\beta$ | $\gamma$ | $\varphi$ | $\theta$ |           | $M$      | $Q$ | $M_1$    | $M_2$ |
| 0           | 90         | 120     | 90       | 60        | 60       | 180       | 100      | 400 | 120      | 460   |
| 1           | 60         | 150     | 30       | 0         | 120      | 160       | 120      | 380 | 140      | 440   |
| 2           | 30         | 120     | 120      | 30        | 60       | 150       | 140      | 360 | 160      | 420   |
| 3           | 0          | 60      | 90       | 30        | 120      | 140       | 160      | 340 | 180      | 400   |
| 4           | 30         | 120     | 30       | 0         | 60       | 130       | 180      | 320 | 200      | 380   |
| 5           | 0          | 150     | 30       | 0         | 60       | 120       | 200      | 300 | 220      | 360   |
| 6           | 0          | 150     | 60       | 90        | 120      | 110       | 220      | 280 | 240      | 340   |
| 7           | 90         | 120     | 120      | 60        | 150      | 100       | 240      | 260 | 260      | 320   |
| 8           | 60         | 60      | 60       | 90        | 30       | 90        | 260      | 240 | 280      | 300   |
| 9           | 120        | 30      | 30       | 90        | 150      | 80        | 280      | 220 | 300      | 280   |

Таблиця Д9б (до рис. Д9.5 – Д9.9)

| Номер умови | Кути, град |         |          |           |          | $c, H/cm$ | $M_1$ | $M_2$ |
|-------------|------------|---------|----------|-----------|----------|-----------|-------|-------|
|             | $\alpha$   | $\beta$ | $\gamma$ | $\varphi$ | $\theta$ |           |       |       |
| 0           | 30         | 30      | 60       | 0         | 150      | 80        | 200   | 340   |
| 1           | 0          | 60      | 60       | 0         | 120      | 90        | 220   | 320   |
| 2           | 60         | 150     | 120      | 90        | 30       | 100       | 240   | 300   |
| 3           | 30         | 60      | 30       | 90        | 120      | 110       | 260   | 280   |
| 4           | 90         | 120     | 150      | 90        | 30       | 120       | 280   | 260   |
| 5           | 30         | 120     | 150      | 0         | 60       | 130       | 300   | 240   |
| 6           | 60         | 150     | 150      | 90        | 30       | 140       | 320   | 220   |
| 7           | 0          | 60      | 30       | 0         | 120      | 150       | 340   | 200   |
| 8           | 90         | 120     | 120      | 90        | 60       | 160       | 360   | 180   |
| 9           | 90         | 150     | 120      | 90        | 30       | 180       | 380   | 160   |

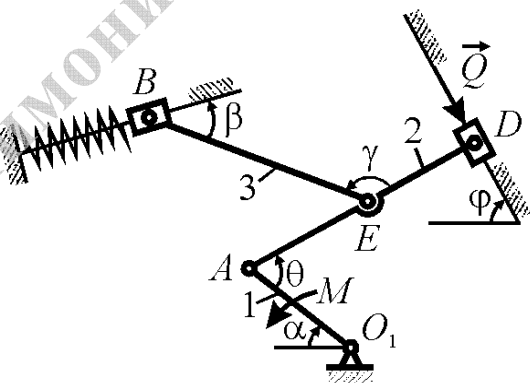


Рис. Д9.0

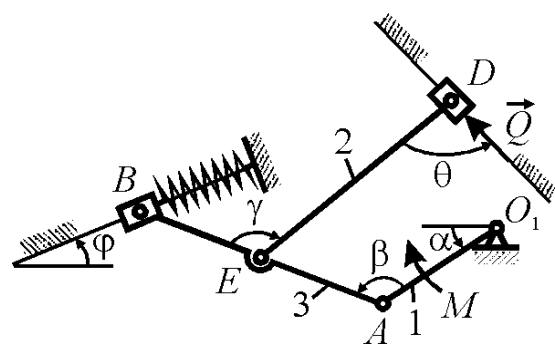


Рис. Д9.1

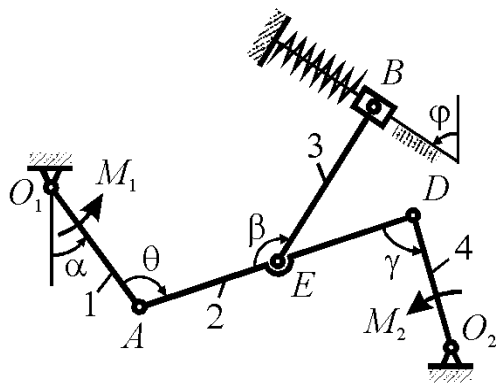


Рис. Д9.2

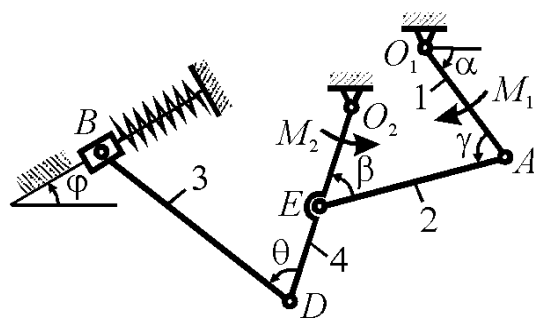


Рис. Д9.3

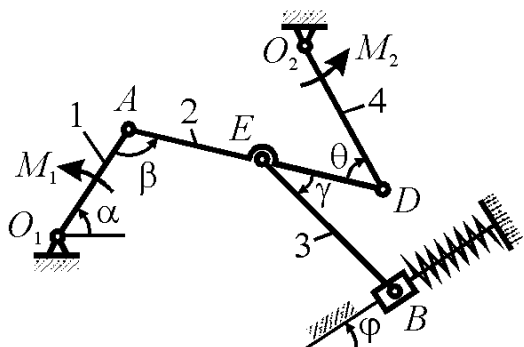


Рис. Д9.4

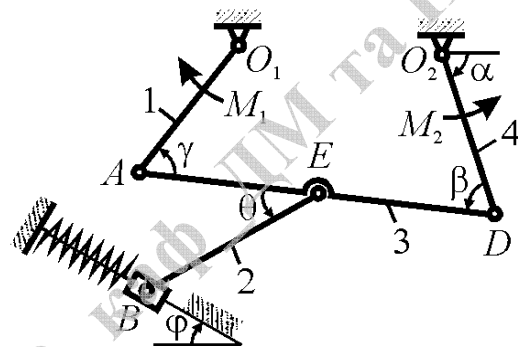


Рис. Д9.5

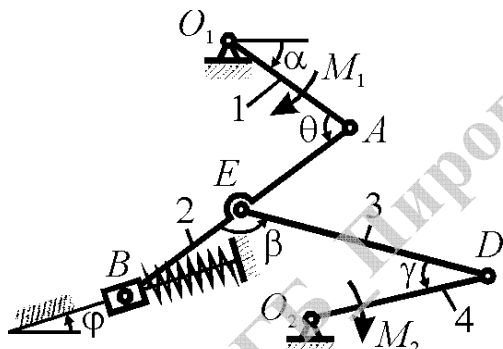


Рис. Д9.6

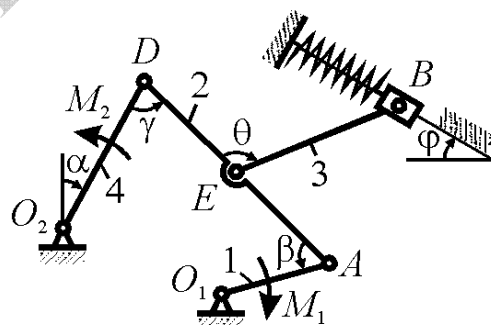


Рис. Д9.7

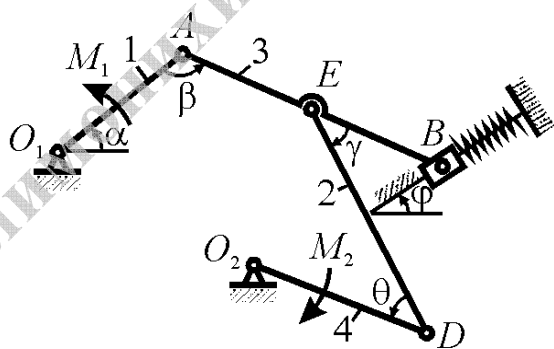


Рис. Д9.8

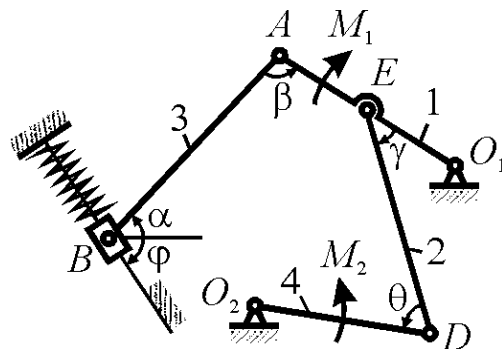


Рис. Д9.9



Рис. Д9.10а

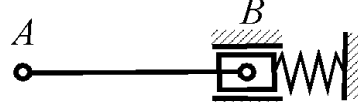


Рис. Д9.10б

### 9.3. Приклад розв'язання задачі Д9

**Умова задачі.** Механізм, розташований у горизонтальній площині, складається з стрижнів 1, 2, 3, 4 і повзуна  $D$ , з'єднаних між собою і з нерухомими опорами  $O_1$  та  $O_2$  шарнірами. До повзуна  $D$  прикріплена пружина з коефіцієнтом жорсткості  $c$  і прикладена сила  $\vec{Q}$ , а до стрижнів 1 та 4 відповідно прикладені моменти  $M_1$  та  $M_2$ . Точка  $C$  знаходиться посередині стрижня 2.

**Дано:**  $\alpha=60^\circ$ ;  $\beta=120^\circ$ ;  $\gamma=120^\circ$ ;  $\varphi=45^\circ$ ;  $\theta=45^\circ$ ;  $l_1=0,4$  м;  $l_4=0,6$  м;  $M_1=150$  Н·м;  $M_2=200$  Н·м;  $Q=450$  Н;  $c=150$  Н·см.

**Знайти:** чому рівна при рівновазі деформація  $\lambda$  пружини, і вказати, розтягнута вона чи стиснута.

#### Розв'язок

##### 1. Побудова розрахункової схеми (рис. Д9б).

1.1. Запишемо принцип можливих переміщень

$$\sum \delta A_i = 0, \quad (1)$$

де  $\delta A_i$  – елементарна робота активних сил на відповідних можливих переміщеннях

1.2. Показуємо положення механізму у відповідності з заданими кутами та будуємо схему можливих переміщень (рис. Д9б).

1.3. Зображаємо діючі на механізм активні сили: силу  $\vec{Q}$ , силу пружності  $\vec{F}_{пр}$  пружини (припускаючи, що пружина розтягнута) і моменти  $M_1$  та  $M_2$ , що прикладені до відповідних стрижнів.

##### 2. Визначення зв'язків між можливими переміщеннями.

Знаходимо зв'язки між можливими переміщеннями, обравши за незалежне, наприклад, можливе переміщення 1-го тіла –  $\delta\varphi_1$ . Тоді матимемо

$$\delta x_A = \delta\varphi_1 l_1. \quad (2)$$

При подальших розрахунках будемо враховувати, що залежність між можливими переміщеннями буде така, як і між швидкостями. Тому для знаходження можливих переміщень точок стрижнів, що здійснюють плоскопаралельний рух можна скористатись положенням про рівність проєкцій можливих переміщень двох точок тіла на пряму, що з'єднує ці точки.

Тоді використовуючи рис. Д9б отримаємо:

$$\delta x_C = \delta x_A \cos 30^\circ = \delta\varphi_1 l_1 \cos 30^\circ;$$

$$\delta x_A \cos 30^\circ = \delta x_B \cos 30^\circ \Rightarrow \delta x_A = \delta x_B = \delta \varphi_1 l_1;$$

$$\delta x_C \cos 45^\circ = \delta x_D \cos 45^\circ \Rightarrow \delta x_D = \delta x_C = \delta \varphi_1 l_1 \cos 30^\circ. \quad (3)$$

Для можливого переміщення стрижня 4 отримаємо:

$$\delta \varphi_4 = \delta x_B / l_4 = \delta \varphi_1 l_1 / l_4. \quad (4)$$

Той самий результат можна отримати для можливих переміщень, якщо їх шукати за допомогою миттєвих центрів обертань  $K_2, K_4, O_3$ .

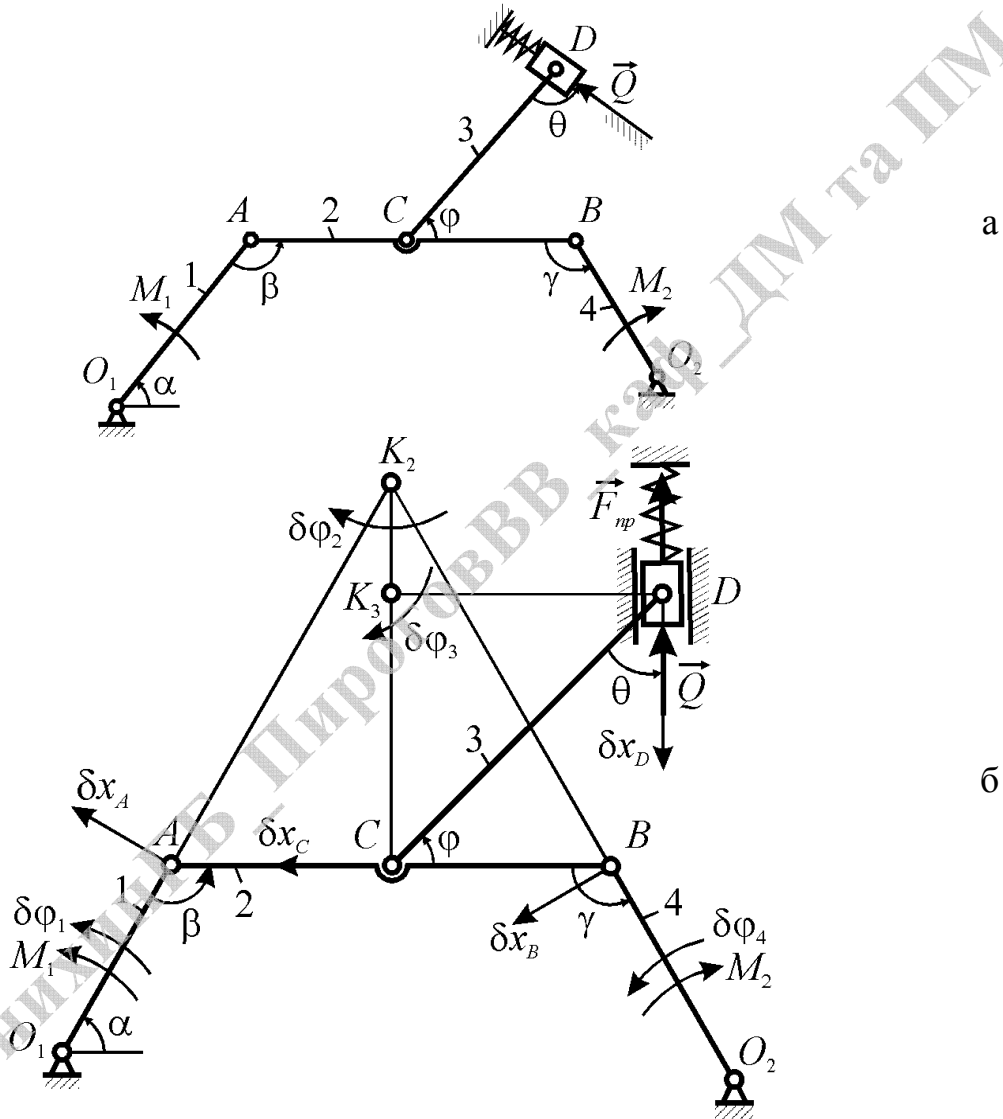


Рис. Д9 Схема плоского механизма:  
 а – вихідна схема; б – розрахункова схема

**3. Складання рівняння елементарних робіт.** Рівняння (1) матиме вигляд (будемо враховувати, що знак “+” для роботи буде в тому випадку, коли напрямок сили або моменту співпадає з напрямком можливого переміщення, і знак “-” – якщо не співпадає):

$$M_1 \delta \varphi_1 - M_2 \delta \varphi_4 - (F_{np} + Q) \delta x_D = 0. \quad (5)$$

**4. Визначення деформації пружини.** Підставляючи зв'язки для можливих переміщень (2) – (4) у рівняння (5), та враховуючи, що  $F_{np} = c\lambda$ , отримаємо:

$$M_1 \delta\varphi_1 - M_2 \frac{\delta\varphi_1 l_1}{l_4} - (c\lambda + Q) \delta\varphi_1 l_1 \cos 30^\circ = 0 \text{ або}$$

$$\delta\varphi_1 \left[ M_1 - M_2 \frac{l_1}{l_4} - (c\lambda + Q) l_1 \cos 30^\circ \right] = 0. \quad (6)$$

Так як  $\delta\varphi_1 \neq 0$ , то з рівняння (6) випливає, що

$$M_1 - M_2 \frac{l_1}{l_4} - (c\lambda + Q) l_1 \cos 30^\circ = 0,$$

звідки отримуємо

$$\lambda = \frac{M_1 - M_2 \frac{l_1}{l_4} - Q l_1 \cos 30^\circ}{c l_1 \cos 30^\circ} \quad (7)$$

**5. Проведення розрахунків.** Підставимо вихідні дані в вираз (7), отримаємо:

$$\lambda = \frac{150 - 200 \frac{0,4}{0,6} - 450 \cdot 0,4 \cdot 0,866}{150 \cdot 0,4 \cdot 0,866} = \frac{-139,28}{51,96} \approx -2,68 \text{ см (стиск)}.$$

**Відповідь:**  $\lambda = -2,68$  [см].

Знак “-” вказує на те, що в дійсності пружина буде стиснута.

## Задача Д10 – принцип Даламбера-Лагранжа (загальне рівняння динаміки)

### 10.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Механічна система складається з однорідних ступінчатих шківів 1 і 2, обмотаних нитками, вантажів 3–6, прикріплених до ниток, і невагомому блоку (рис. Д10.0 – Д10.9, табл. Д10). Система рухається у вертикальній площині під дією сил тяжіння і пари сил з моментом  $M$ , що діє на один з шківів. Радіуси ступеней шківа 1 рівні:  $R_1=0,2$  м,  $r_1=0,1$  м, а шківа 2 –  $R_2=0,3$  м,  $r_2=0,15$  м. Радіуси шерці шківів відносно осей обертання відповідно рівні  $\rho_1=0,1$  м та  $\rho_2=0,2$  м.

Вага  $P_1, \dots, P_6$  шківів і вантажів задані в таблиці в ньютонках. Вантажі, вага яких рівна нулю, на кресленні не зображати (шківів 1, 2 зображати завжди як частини системи).

**Знайти** (нехтуючи тертям): пришвидження вантажу, що має найбільшу вагу.

Таблиця Д10

| Номер умови | $P_1, \text{ Н}$ | $P_2, \text{ Н}$ | $P_3, \text{ Н}$ | $P_4, \text{ Н}$ | $P_5, \text{ Н}$ | $P_6, \text{ Н}$ | $M, \text{ Н}\cdot\text{м}$ |
|-------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-----------------------------|
| 0           | 10               | 0                | 20               | 30               | 40               | 0                | 10                          |
| 1           | 0                | 40               | 0                | 10               | 20               | 30               | 12                          |
| 2           | 20               | 30               | 40               | 0                | 10               | 0                | 16                          |
| 3           | 0                | 20               | 10               | 30               | 0                | 40               | 18                          |
| 4           | 30               | 0                | 20               | 0                | 40               | 10               | 12                          |
| 5           | 0                | 10               | 30               | 40               | 20               | 0                | 16                          |
| 6           | 40               | 0                | 0                | 20               | 30               | 10               | 10                          |
| 7           | 10               | 20               | 0                | 40               | 0                | 30               | 18                          |
| 8           | 0                | 40               | 10               | 0                | 30               | 20               | 12                          |
| 9           | 30               | 0                | 40               | 20               | 10               | 0                | 16                          |

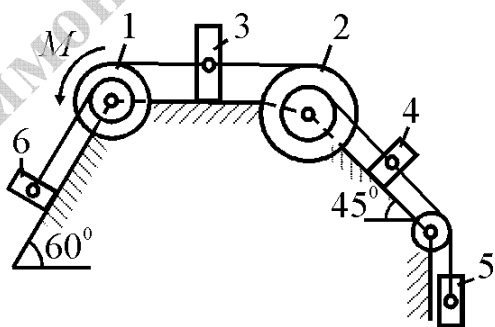


Рис. Д10.0

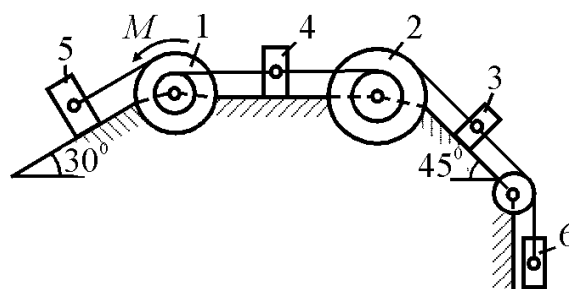


Рис. Д10.1

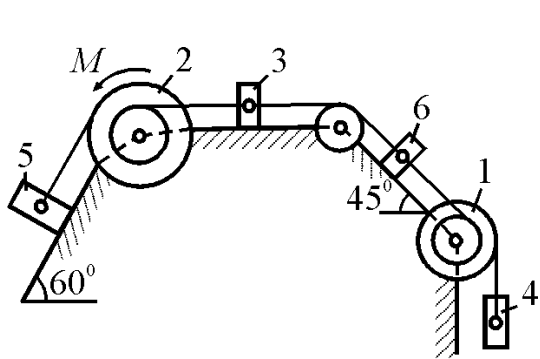


Рис. Д10.2

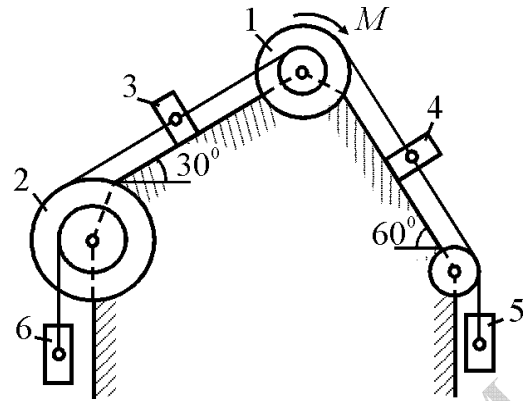


Рис. Д10.3

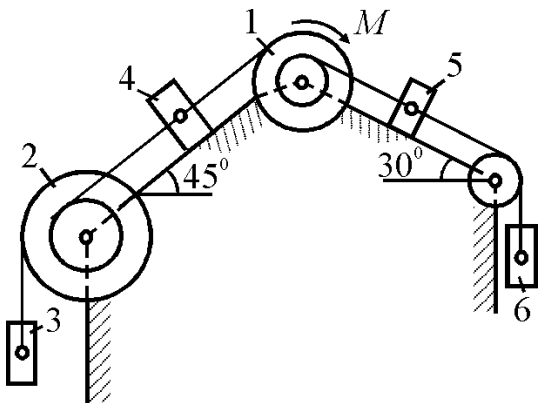


Рис. Д10.4

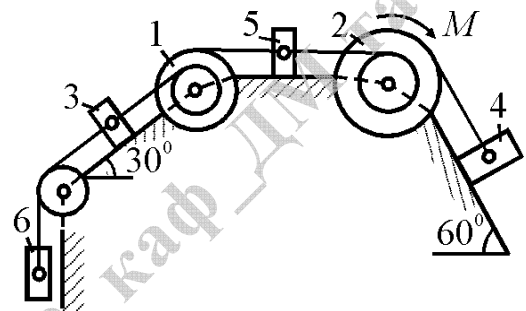


Рис. Д10.5

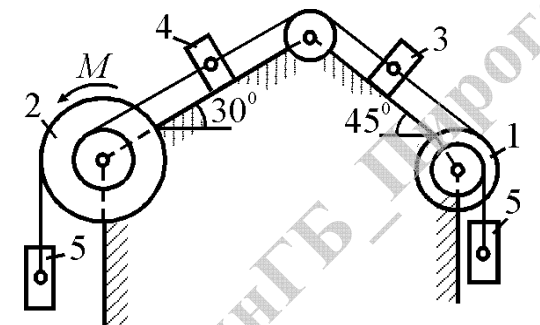


Рис. Д10.6

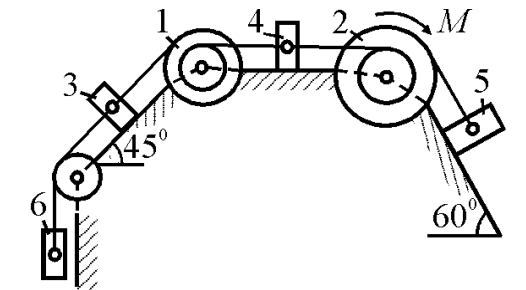


Рис. Д10.7

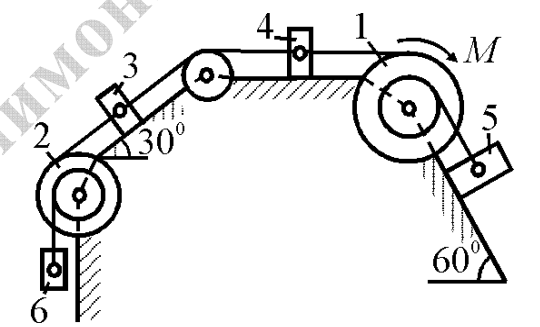


Рис. Д10.8

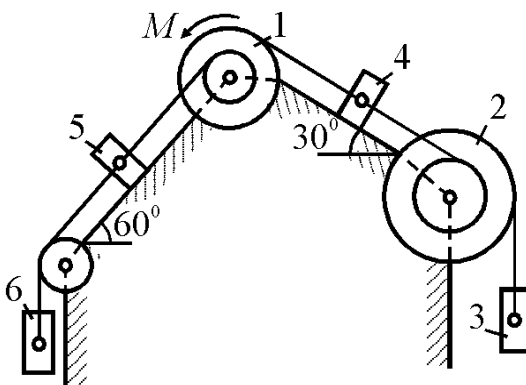


Рис. Д10.9



## 10.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача Д10 – на застосування до вивчення руху системи загального рівняння динаміки (принципу Даламбера-Лагранжа). Хід розв'язання такий, як і в задачі Д9, тільки попередньо необхідно приєднати до діючих на систему сил відповідні сили інерції. Врахувати при цьому, що для однорідного тіла, яке обертається навколо власної осі симетрії, система сил інерції приводиться до пари сил з моментом  $M^{in}=J_z\varepsilon$ , де  $J_z$  – момент інерції тіла відносно осі обертання,  $\varepsilon$  – кутове пришвидшення тіла. Прийняти до уваги, що напрямки сил та моментів інерції протилежні напрямкам пришвидшень.

## 10.3. Приклад розв'язання задачі Д10

**Умова задачі.** Механічна система (Д10а) складається з обмотаних нитками блока 4 радіуса  $R_4$ , маса якого розподілена по ободу, ступінчатого шків 3 (радіуси зовнішнього і внутрішнього ободу  $R_3$  і  $r_3$ , радіус інерції відносно осі обертання  $\rho_3$ ), однорідного барабана 5, який котиться по похилій поверхні, а також вантажів 1 і 2, прикріплених до ниток. Система рухається у вертикальній площині під дією сил ваги і пари сил з моментом  $M$ , прикладеної до шків 3.

**Дано:**  $P_1=40$  Н;  $P_2=80$  Н;  $P_3=50$  Н;  $P_4=60$  Н;  $P_5=30$  Н;  $M=20$  Н·м;  $R_3=0,3$  м;  $r_3=0,1$  м;  $\rho_3=0,2$  м;  $R_4=0,2$  м.

**Знайти** (нехтуючи тертям): пришвидшення вантажу, що має найбільшу вагу.

### Розв'язок

**1. Побудова розрахункової схеми** (рис. Д10б). Система має одну ступінь вільності. В'язі, які накладені на систему – ідеальні.

1.1. Запишемо принцип Даламбера-Лагранжа

$$\sum_{i=1}^n (\delta A_i^{(ак)} + \delta A_i^{(ин)}) = 0, \quad (1)$$

де  $\delta A_i^{(ак)}$  – сума елементарних робіт активних сил;  $\delta A_i^{(ин)}$  – сума елементарних робіт сил інерції.

1.2. Показуємо на схемі напрямки можливих переміщень та прискорень тіл системи (рис. Д10б).

1.3. Прикладаємо до тіл активні сили  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4, \vec{P}_5$  та пару сил з моментом  $M$ , сили інерції  $\vec{F}_1^{in}, \vec{F}_2^{in}, \vec{F}_5^{in}$  і моменти інерції  $M_3^{in}, M_4^{in}, M_5^{in}$ .

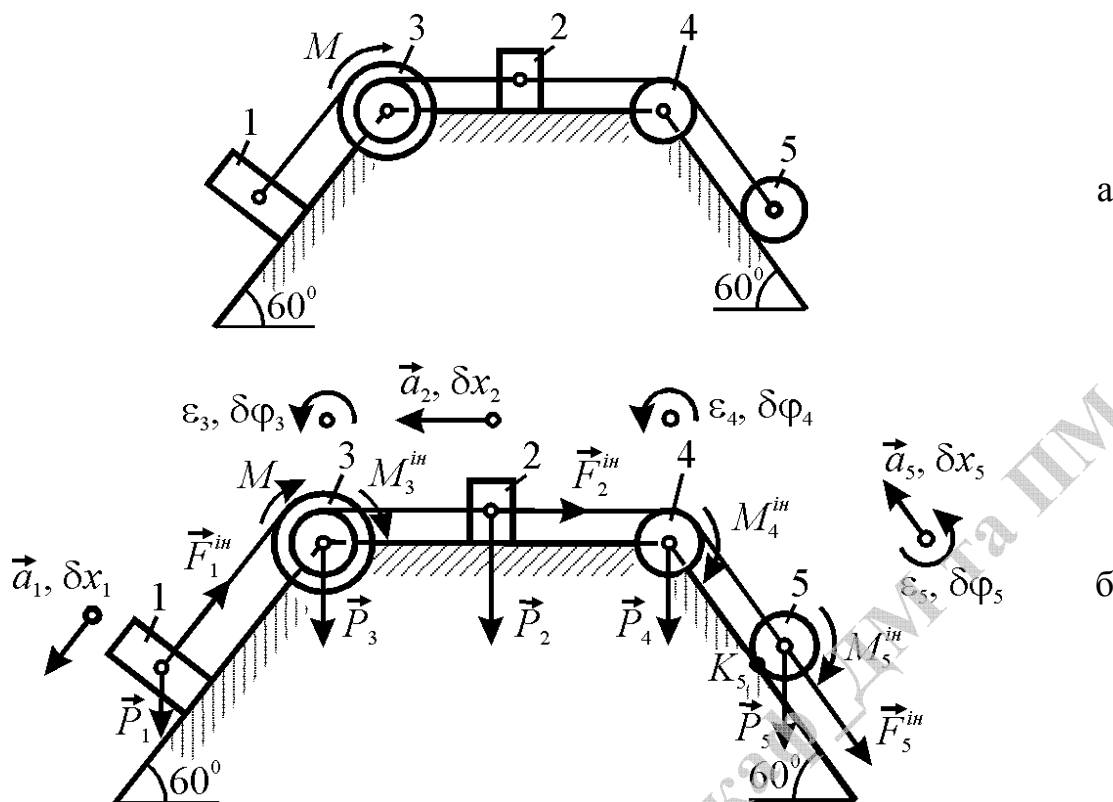


Рис. Д10 Схема механічної системи:  
а – вихідна схема; б – розрахункова схема

**2. Визначення зв'язків між можливими переміщеннями і пришвидженнями.**

2.1. Визначаємо зв'язки між можливими переміщеннями. Виразимо всі можливі переміщення через незалежне  $\delta x_2$ , отримаємо:

$$\delta\varphi_3 = \frac{\delta x_2}{r_3}, \quad \delta x_1 = \delta\varphi_3 R_3 = \frac{R_3 \delta x_2}{r_3}, \quad \delta\varphi_4 = \frac{\delta x_2}{R_4},$$

$$\delta x_5 = \delta x_2, \quad \delta\varphi_5 = \frac{\delta x_5}{R_5} = \frac{\delta x_2}{R_5}. \quad (2)$$

2.2. Визначаємо зв'язки між пришвидженнями. Виразимо всі пришвидження через незалежне  $a_2$ , отримаємо:

$$\varepsilon_3 = \frac{a_2}{r_3}, \quad a_1 = \varepsilon_3 R_3 = \frac{R_3 a_2}{r_3}, \quad \varepsilon_4 = \frac{a_2}{R_4}, \quad a_5 = a_2, \quad \varepsilon_5 = \frac{a_2}{R_5}. \quad (3)$$

**3. Складання загального рівняння динаміки.** Загальне рівняння динаміки (1) має вигляд (будемо враховувати, що знак “+” для елементарної роботи будемо брати в тому випадку, коли напрямок сили або моменту співпадає з напрямком можливого переміщення, і знак “-” – якщо не співпадає):

$$(P_1 \sin 60^\circ - F_1^{in})\delta x_1 - (M + M_3^{in})\delta\varphi_3 - F_2^{in}\delta x_2 - M_4^{in}\delta\varphi_4 - (P_5 \sin 60^\circ + F_5^{in})\delta x_5 - M_5^{in}\delta\varphi_5 = 0. \quad (4)$$

#### 4. Перетворення загального рівняння динаміки.

4.1. Підставимо зв'язки між можливими переміщеннями (2) у загальне рівняння динаміки (4) та винесемо за дужки спільний множник, отримаємо:

$$\left[ (P_1 \sin 60^\circ - F_1^{in}) \frac{R_3}{r_3} - \frac{(M + M_3^{in})}{r_3} - F_2^{in} - \frac{M_4^{in}}{R_4} - P_5 \sin 60^\circ - F_5^{in} - \frac{M_5^{in}}{R_5} \right] \delta x_2 = 0 .$$

Оскільки  $\delta x_2 \neq 0$ , то

$$(P_1 \sin 60^\circ - F_1^{in}) \frac{R_3}{r_3} - \frac{(M + M_3^{in})}{r_3} - F_2^{in} - \frac{M_4^{in}}{R_4} - P_5 \sin 60^\circ - F_5^{in} - \frac{M_5^{in}}{R_5} = 0 .$$

Перенесемо сили та моменти інерції у лівий бік, а решту сил та моментів – у правий, одержимо

$$F_1^{in} \frac{R_3}{r_3} + \frac{M_3^{in}}{r_3} + F_2^{in} + \frac{M_4^{in}}{R_4} + F_5^{in} + \frac{M_5^{in}}{R_5} = \frac{R_3}{r_3} P_1 \sin 60^\circ - \frac{M}{r_3} - P_5 \sin 60^\circ . \quad (5)$$

**Перевірка:** в лівій частині отриманого диференціального рівнянні руху (5) системи всі сили та моменти інерції повинні входити зі знаком “+”.

4.2. Визначаємо сили та моменти інерції враховуючи зв'язки для пришвидшень (3), отримаємо:

- для сил інерції

$$F_1^{in} = \frac{P_1}{g} a_1 = \frac{P_1}{g} \frac{R_3}{r_3} a_2, \quad F_2^{in} = \frac{P_2}{g} a_2, \quad F_5^{in} = \frac{P_5}{g} a_5 = \frac{P_5}{g} a_2 ;$$

- для моментів інерції

$$M_3^{in} = J_3 \varepsilon_3 = \frac{P_3}{g} \rho_3^2 \frac{a_2}{r_3}, \quad M_4^{in} = J_4 \varepsilon_4 = \frac{P_4}{g} R_4^2 \frac{a_2}{R_4} = \frac{P_4}{g} R_4 a_2 ,$$

$$M_5^{in} = J_5 \varepsilon_5 = \frac{P_5}{g} \frac{R_5^2}{2} \frac{a_2}{R_5} = \frac{P_5}{g} \frac{R_5}{2} a_2 . \quad (6)$$

В (6) було враховано, що осьові моменти інерції тіл мають вигляд

$$J_3 = \frac{P_3}{g} \rho_3^2, \quad J_4 = \frac{P_4}{g} R_4^2, \quad J_5 = \frac{P_5}{g} \frac{R_5^2}{2} .$$

4.3. Підставляємо сили та моменти інерції (6) у рівняння динаміки системи (5), отримаємо:

$$\frac{R_3^2}{r_3^2} \frac{P_1}{g} a_2 + \frac{\rho_3^2}{r_3^2} \frac{P_3}{g} a_2 + \frac{P_2}{g} a_2 + \frac{P_4}{g} a_2 + \frac{3}{2} \frac{P_5}{g} a_2 = \frac{R_3}{r_3} P_1 \sin 60^\circ - \frac{M}{r_3} - P_5 \sin 60^\circ ,$$

або

$$\left( \frac{R_3^2}{r_3^2} P_1 + \frac{\rho_3^2}{r_3^2} P_3 + P_2 + P_4 + \frac{3}{2} P_5 \right) \frac{a_2}{g} = \frac{R_3}{r_3} P_1 \sin 60^\circ - \frac{M}{r_3} - P_5 \sin 60^\circ .$$

Остаточно отримаємо

$$a_2 = \frac{\left( \frac{R_3}{r_3} P_1 \sin 60^\circ - \frac{M}{r_3} - P_5 \sin 60^\circ \right) g}{\frac{R_3^2}{r_3^2} P_1 + \frac{\rho_3^2}{r_3^2} P_3 + P_2 + P_4 + \frac{3}{2} P_5} . \quad (7)$$

**5. Проведення розрахунків.** Підставимо вихідні дані в вираз (7), отримаємо:

$$a_2 = \frac{\left( \frac{0,3}{0,1} 40 \cdot 0,866 - \frac{20}{0,1} - 30 \cdot 0,866 \right) \cdot 9,81}{\frac{0,3^2}{0,1^2} 40 + \frac{0,2^2}{0,1^2} 50 + 80 + 60 + \frac{3}{2} 30} = \frac{-1197,41}{745} = -1,607 \text{ м/с}^2 .$$

**Відповідь:**  $a_2 = -1,607 \text{ [м/с}^2\text{]}$ .

Знак “-” вказує, що пришвидшення вантажа 2 і пришвидшення інших тіл направлені протилежно показаним на рис. Д10б.

## Задача Д11 – рівняння Лагранжа II роду для системи з двома ступенями вільності

### 11.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Механічна система складається з тіл 1, 2, ..., 5 вагою  $P_1, P_2, \dots, P_5$  відповідно, зв'язаних між собою нитками, намотаними на ступінчаті блоки 1 і 2 (рис. Д11.0 – Д11.9, табл. Д11). Радіуси ступінчатих блоків 1 і 2 відповідно рівні  $R_1=R, r_1=0,4R, R_2=R, r_2=0,8R$ . При обчисленні моментів інерції всі блоки, котки і колеса вважати однорідними суцільними циліндрами радіусом  $R$ .

На систему крім сил ваги діє сила  $\vec{F}$ , прикладена до тіла 3 або 4 (якщо тіло 3 в систему не входить, то сила прикладена в точці В візка), і пари сил з моментами  $M_1, M_2$ , прикладені до блоків 1 та 2; коли  $M < 0$ , напрямок момента протилежний показаному на малюнку.

На ділянці нитки, вказаній в таблиці в стовпці “Пружина”, входить пружина з коефіцієнтом жорсткості  $c$  (наприклад, якщо в стовпці вказано  $AB$ , то ділянка  $AB$  є пружиною, якщо  $AD$ , то  $AD$  – пружина і т.д.); в початковий момент часу пружина недеформована.

Прочерк в стовпцях таблиці, де задана вага, означає, що відповідне тіло в систему не входить (на рисунку не зображати), а нуль – що відповідне тіло вважається невагомим, але в систему входить; для коліс, позначених номером 4,  $P_4$  – їх загальна вага (вага платформи такого візка не враховується).

**Знайти:** закон зміни узагальненої координати  $x=f(t)$ , вважаючи, що рух розпочинається із стану спокою; визначити також частоту і період коливань, що здійснюють тіла системи при її русі.

Таблиця Д11

| Номер умови | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $F$  | $M_1$ | $M_2$  | Пружина |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|--------|---------|
|             | Н     |       |       |       |       | Н·м  |       |        |         |
| 0           | $4P$  | 0     | —     | $3P$  | —     | $4P$ | 0     | 0      | $AB$    |
| 1           | 0     | $2P$  | —     | —     | $3P$  | 0    | 0     | $-2PR$ | $KE$    |
| 2           | 0     | $2P$  | —     | $P$   | —     | 0    | $2PR$ | 0      | $AB$    |
| 3           | —     | 0     | $2P$  | $5P$  | —     | 0    | 0     | $2PR$  | $BD$    |
| 4           | $P$   | —     | —     | —     | $4P$  | 0    | $-PR$ | 0      | $KE$    |
| 5           | —     | —     | $4P$  | $3P$  | —     | $P$  | 0     | 0      | $BD$    |
| 6           | $2P$  | 0     | —     | —     | $P$   | 0    | 0     | $-PR$  | $KE$    |
| 7           | —     | $4P$  | —     | $2P$  | —     | $3P$ | 0     | $2PR$  | $AB$    |
| 8           | —     | $4P$  | $2P$  | 0     | —     | 0    | 0     | $3PR$  | $BD$    |
| 9           | $2P$  | 0     | —     | $P$   | —     | 0    | $2PR$ | 0      | $AB$    |

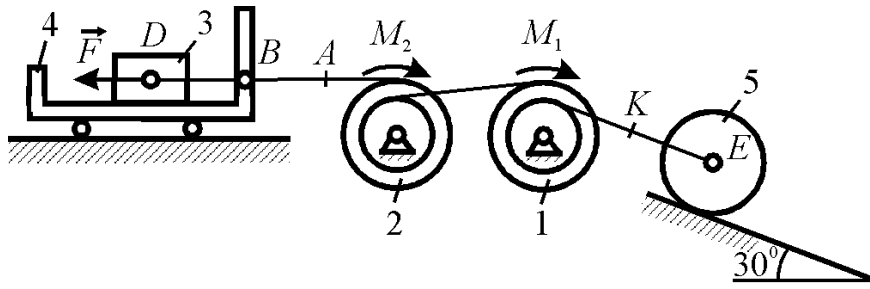


Рис. Д11.0

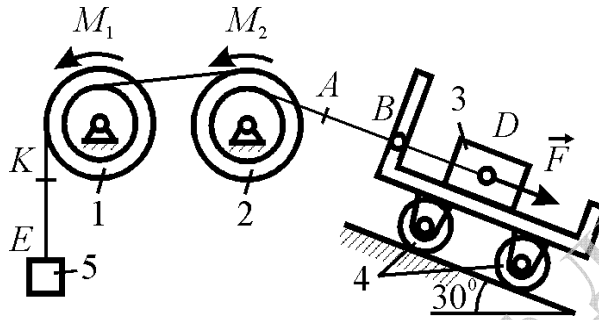


Рис. Д11.1

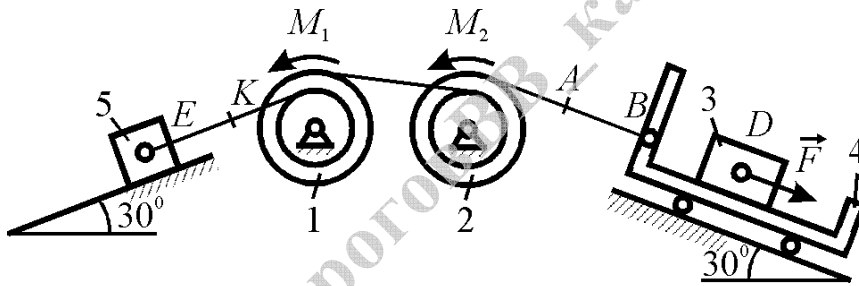


Рис. Д11.2

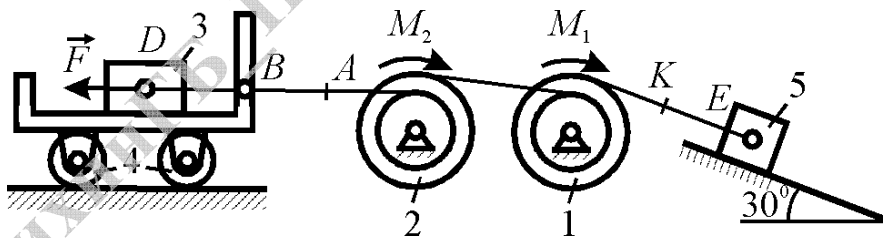


Рис. Д11.3

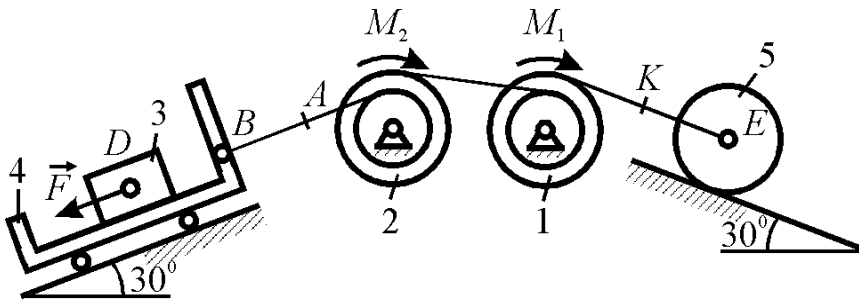


Рис. Д11.4

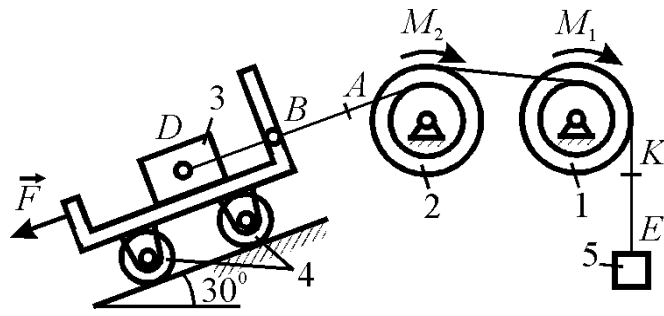


Рис. Д11.5

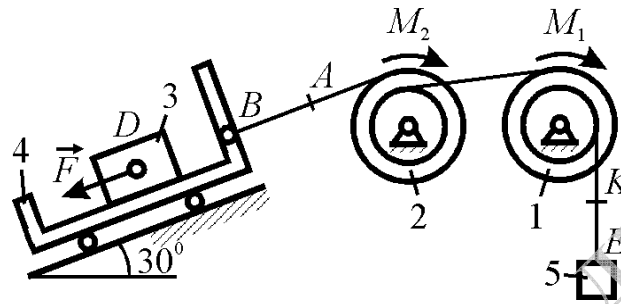


Рис. Д11.6

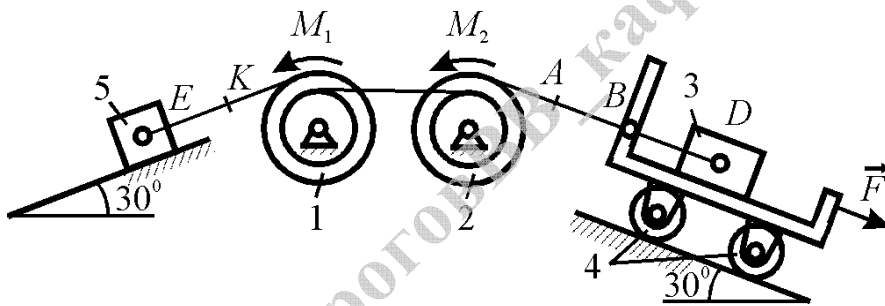


Рис. Д11.7

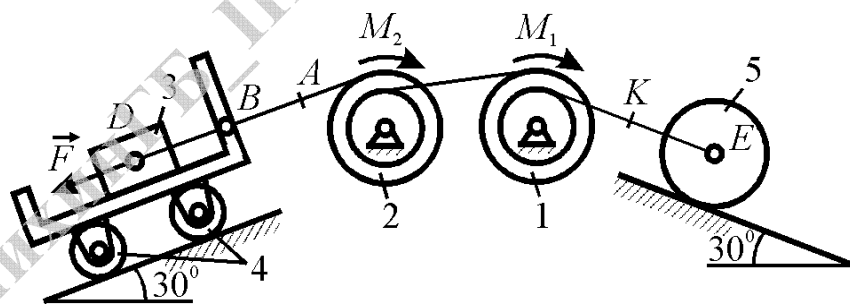


Рис. Д11.8

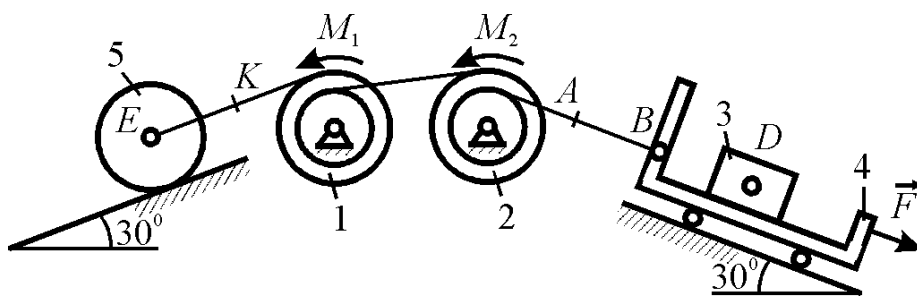


Рис. Д11.9

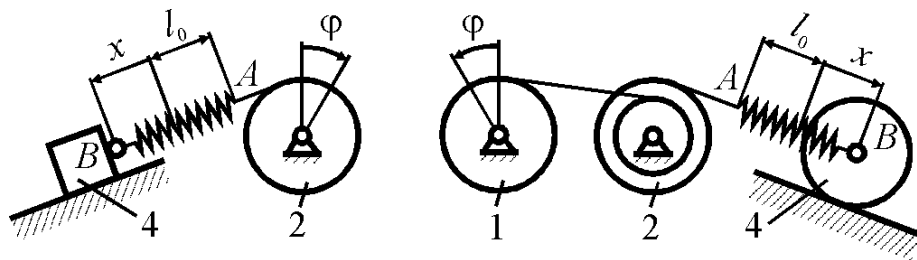


Рис. Д11.10

## 11.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача Д11 – на застосування до вивчення руху системи рівнянь Лагранжа. В прикладі система має два ступеня вільності, тобто її положення визначається двома узагальненими координатами  $q_1$  та  $q_2$ , і для неї повинні бути складені два рівняння.

Розв'язок розпочати з вибору узагальнених координат, позначивши їх  $q_1=x$  і  $q_2=\varphi$  або  $q_1=x$  і  $q_2=y$ . За координату  $x$  прийняти видовження пружини, яке відраховується в сторону того з тіл 3, 4 або 5 системи, до якого прикріплена пружина; наприклад, якщо пружина прикріплена до тіла в точці  $B$  і її довжина в довільний момент часу рівна  $AB$ , то  $x=AB-l_0$ , де  $l_0$  – довжина недеформованої пружини. За координату  $\varphi$  прийняти кут повороту крайнього блоку (цей блок може бути і невагомим), відраховуючи  $\varphi$  від початкового положення. Якщо в систему ні один блок не входить, а входять лише тіла 3 і 4, за координату  $y$  необхідно прийняти відстань тіла 4 від початкового положення. Відповідні приклади приведені на рис. Д11.10.

## 11.3. Приклад розв'язання задачі Д11

**Умова задачі.** Механічна система (рис. Д11а) складається з вантажа 1, ступінчатого шківів 2 відповідно з радіусами ступеней  $R_2, r_2$ , блока 3 радіусом  $R_3$ , та барабана 4, які зв'язані між собою нитками. До шківів 2 прикладена пара сил з моментом  $M_1$ , а до блока 3 - пара сил з моментом  $M_2$ . При обчисленні моментів інерції шківів 2 та барабана 4 вважати їх однорідними суцільними циліндрами, а масу блока 3 – розподіленою по ободу. Вага всіх тіл відповідно рівна  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . На ділянці  $AB$  розташована пружина жорсткістю  $c$ . В початковий момент часу пружина недеформована.

**Дано:**  $P_1=2P$  Н;  $P_2=3P$  Н;  $P_3=P$  Н;  $P_4=2P$  Н;  $F=4P$  Н;  $M_1=2PR$  Н·м;  $M_2=3PR$  Н·м;  $R_2=R$  м;  $r_2=0,4R$  м;  $\rho_2=0,7R$  м;  $R_3=0,7R$  м.

**Знайти:** закон зміни узагальненої координати  $x=f(t)$ , вважаючи, що рух розпочинається із стану спокою; визначити також частоту і період коливань, що здійснюють тіла системи при її русі.



### Розв'язок

**1. Побудова розрахункової схеми (рис. Д11б).** Розглядувана система має два ступеня вільності, тому рух системи описуватиме два рівняння динаміки, які складемо за допомогою рівнянь Лагранжа II роду.

1.1. Запишемо рівняння Лагранжа II роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad / j = 1, 2 / . \quad (1)$$

В (1) враховано, що  $q_1 = \varphi_2 = \varphi$  і  $q_2 = x_4 = x$ .

1.2. Показуємо на схемі можливі переміщення та швидкості.

1.3. Прикладаємо до тіл системи сили: активні  $\vec{P}_i = m_i \vec{g}$ ,  $/ i = \overline{1, 4} /$ , сили пружності  $\vec{F}_{np}$  і  $\vec{F}'_{np}$  ( $F_{np} = F'_{np} = cx$ ), та моменти  $M_1$  і  $M_2$ .

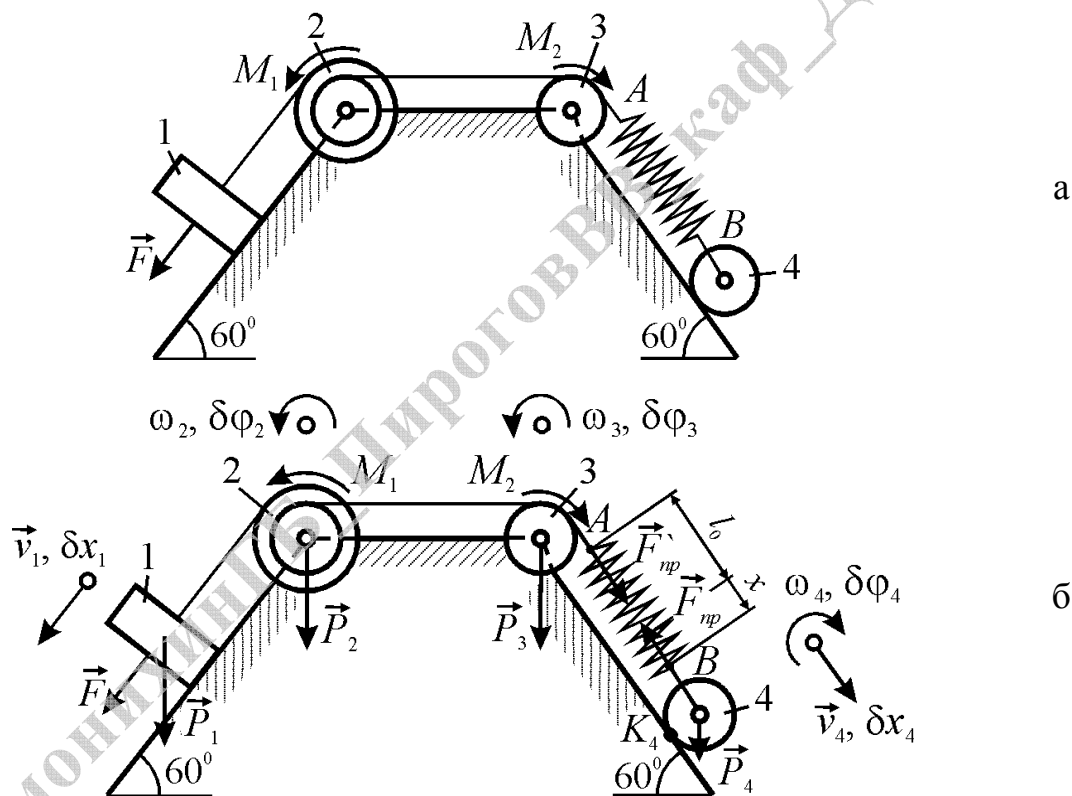


Рис. Д11 Схема механічної системи:

а – вихідна схема; б – розрахункова схема

**2. Визначення зв'язків між можливими переміщеннями і швидкостями.**

2.1. Визначаємо зв'язки між можливими переміщеннями. В якості незалежних можливих переміщень будемо розглядати  $\delta\varphi_2 = \delta\varphi$  і  $\delta x_4 = \delta x$ :

$$\delta x_1 = \delta\varphi_2 R_2, \quad \delta\varphi_3 = r_2 \delta\varphi_2 / R_3, \quad \delta x_B = \delta x_4 - r_2 \delta\varphi_2,$$

$$\delta\varphi_4 = \frac{\delta x_B}{R_4} = \frac{\delta x_4 - r_2 \delta\varphi_2}{R_4}. \quad (2)$$

2.2. Визначаємо зв'язки між швидкостями. В якості незалежних швидкостей оберемо  $v_4=v$  і  $\omega_2=\omega$ :

$$v_1 = \omega_2 R_2, \quad \omega_3 = \frac{r_2 \omega_2}{R_3}, \quad v_B = v_4 - r_2 \omega_2, \quad \omega_4 = \frac{v_B}{R_4} = \frac{v_4 - r_2 \omega_2}{R_4}. \quad (3)$$

**3. Визначення кінетичної енергії системи.** Кінетична енергія системи має вигляд:

$$T = \sum_{i=1}^4 T_i = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \quad (4)$$

Тіло 1 рухається поступально, тому

$$T_1 = P_1 v_1^2 / (2g). \quad (5)$$

Тіло 2 – ступінчастий шків з радіусом інерції відносно осі обертання  $\rho_2$  – обертається навколо нерухомої осі, тому

$$T_2 = J_2 \omega_2^2 / 2. \quad (6)$$

Тіло 3 – барабан, маса якого розподілена по ободу – обертається навколо нерухомої осі, тому

$$T_3 = J_3 \omega_3^2 / 2. \quad (7)$$

Тіло 4 – рухомий блок, який є суцільним однорідним циліндром – рухається плоскопаралельно, тому

$$T_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{P_4}{g} v_B^2 + J_4 \omega_4^2 \right). \quad (8)$$

В (6), (7) та (8) осьові моменти інерції відповідних тіл мають вигляд:

$$J_2 = \frac{P_2}{g} \rho_2^2, \quad J_3 = \frac{P_3}{g} R_3^2, \quad J_4 = \frac{P_4}{2g} R_4^2. \quad (9)$$

Підставляючи (5) – (9) в (4) кінетична енергія системи матиме вигляд:

$$T = \frac{1}{2g} \left[ P_1 v_1^2 + P_2 \rho_2^2 \omega_2^2 + P_3 R_3^2 \omega_3^2 + P_4 \left( v_B^2 + \frac{R_4^2 \omega_4^2}{2} \right) \right]$$

або враховуючи зв'язки для швидкостей (3), отримаємо

$$T = \frac{1}{2g} \left\{ P_1 (R_2 \omega_2)^2 + P_2 \rho_2^2 \omega_2^2 + P_3 R_3^2 \left( \frac{r_2 \omega_2}{R_3} \right)^2 + \right. \\ \left. + P_4 \left[ (v_4 - r_2 \omega_2)^2 + \frac{R_4^2}{2} \left( \frac{v_4 - r_2 \omega_2}{R_4} \right)^2 \right] \right\}.$$

Перетворимо кінетичну енергію системи, для цього розкриємо дужки та згрупуємо відповідні складові біля  $v_4$  і  $\omega_2$ , отримаємо:

$$T = \frac{1}{2g} \left[ \frac{3}{2} P_4 v_4^2 - 3P_4 r_2 v_4 \omega_2 + \omega_2^2 \left( P_1 R_2^2 + P_2 \rho_2^2 + P_3 r_2^2 + \frac{3}{2} P_4 r_2^2 \right) \right].$$

Введемо коефіцієнти інерції:

$$a_{11} = \frac{3}{2} \frac{P_4}{g}, \quad a_{12} = \frac{3}{2} \frac{P_4}{g} r_2, \quad a_{22} = \frac{1}{g} \left( P_1 R_2^2 + P_2 \rho_2^2 + P_3 r_2^2 + \frac{3}{2} P_4 r_2^2 \right). \quad (10)$$

Тоді з урахуванням коефіцієнтів (10), та враховуючи, що  $v_4 = \dot{x}_4 = \dot{x}$ ,  $\omega_2 = \dot{\phi}_2 = \dot{\phi}$ , кінетична енергія системи матиме вигляд:

$$T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{x}^2 - 2a_{12} \dot{x} \dot{\phi} + a_{22} \dot{\phi}^2). \quad (11)$$

**4. Визначення узагальнених сил.** Узагальнені сили  $Q_1$  і  $Q_2$  знайдемо через елементарну роботу системи  $\delta A$  на відповідних незалежних можливих переміщеннях. Враховуватимемо, що знак “+” для елементарної роботи буде в тому випадку, коли напрямок сили або моменту співпадає з напрямком можливого переміщення, і знак “-” – якщо не співпадає.

3.1. Визначення узагальненої сили  $Q_1$ . Надамо системі можливого переміщення, при якому координата  $\phi$  отримує приріст  $\delta\phi_2 > 0$ , а координата  $x$  не змінюється, тобто  $\delta x_4 = 0$  (пружина при такому переміщенні системи не змінює свою довжину). Тоді враховуючи, що  $\delta x_B = r_2 \delta\phi_2$ , елементарна робота матиме вигляд:

$$\delta A_1 = (F + P_1 \sin 60^\circ) \delta x_1 + M_1 \delta\phi_2 - M_2 \delta\phi_3 + (F_{np} - F'_{np} - P_4 \sin 60^\circ) \delta x_B$$

або після підстановки зв'язків для можливих переміщень (2)

$$\begin{aligned} \delta A_1 &= (F + P_1 \sin 60^\circ) \delta\phi_2 R_2 + M_1 \delta\phi_2 - M_2 \frac{r_2 \delta\phi_2}{R_3} + \\ &+ (F_{np} - F'_{np} - P_4 \sin 60^\circ) r_2 \delta\phi_2 = Q_1 \delta\phi_2, \end{aligned}$$

де

$$Q_1 = (F + P_1 \sin 60^\circ) R_2 + M_1 - M_2 \frac{r_2}{R_3} + (F_{np} - F'_{np} - P_4 \sin 60^\circ) r_2. \quad (12)$$

3.2. Визначення узагальненої сили  $Q_2$ . Надамо системі можливого переміщення, при якому координата  $x$  отримує приріст  $\delta x_4 > 0$ , а координата  $\phi$  не змінюється, тобто  $\delta\phi_2 = 0$  (при такому переміщенні 1, 2, 3 тіло не рухається). Тоді елементарна робота матиме вигляд:

$$\delta A_2 = (P_4 \sin 60^\circ - F_{np}) \delta x_4 = Q_2 \delta x_4,$$

де

$$Q_2 = P_4 \sin 60^\circ - F_{np} = P_4 \sin 60^\circ - cx. \quad (13)$$

Тут в (13)  $x=x_4$ .

**5. Знаходження диференціального рівняння коливального руху системи.**

**5.1. Визначення лівої частини рівнянь Лагранжа II роду.**

Знайдемо частинні і повну похідну від виразу (11):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = a_{22} \dot{\varphi} - a_{12} \dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = a_{22} \ddot{\varphi} - a_{12} \ddot{x}; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = a_{11} \dot{x} - a_{12} \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = a_{11} \ddot{x} - a_{12} \ddot{\varphi}. \end{aligned} \quad (14)$$

**5.2. Складання рівнянь Лагранжа II роду.** Рівняння (1) з врахуванням виразів (13), (14) та (15), матимуть вигляд:

$$a_{22} \ddot{\varphi} - a_{12} \ddot{x} = Q_1, \quad a_{11} \ddot{x} - a_{12} \ddot{\varphi} = Q_2. \quad (15)$$

**5.3. Знаходження диференціального рівняння коливального руху системи.**

Виразимо з першого рівняння системи (15) змінну  $\ddot{\varphi}$  та підставимо її у друге. Тоді, враховуючи (13), отримаємо:

$$a_{11} \ddot{x} - a_{12} \frac{(Q_1 + a_{12} \ddot{x})}{a_{22}} = P_4 \sin 60^\circ - cx$$

або

$$\left( a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{22}} \right) \ddot{x} + cx = P_4 \sin 60^\circ + \frac{a_{12}}{a_{22}} Q_1.$$

Остаточно, диференціальне рівняння руху системи матиме вигляд:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = a, \quad (16)$$

де

$$\omega_0^2 = c / \left( a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{22}} \right), \quad a = \left( P_4 \sin 60^\circ + \frac{a_{12}}{a_{22}} Q_1 \right) / \left( a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{22}} \right). \quad (17)$$

**6. Визначення закону зміни узагальненої координати  $x=f(t)$ , частоти та періоду коливаний системи.**

Розв'язок рівняння (16) має вигляд:

$$x = x_1 + x_2,$$

де

$$x_1 = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t), \quad x_2 = A = const.$$

Підставляючи  $x_2$  в рівняння (16) отримаємо, що  $A = a / \omega_0^2$ . Таким чином загальний розв'язок рівняння (16) має вигляд:

$$x = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t) + \frac{a}{\omega_0^2}, \quad (18)$$

де  $C_1, C_2$  - сталі інтегрування.

Знайдемо сталі інтегрування, для цього спочатку знайдемо похідну від  $x$ , отримаємо:

$$\dot{x} = C_1 \omega_0 \cos(\omega_0 t) - C_2 \omega_0 \sin(\omega_0 t). \quad (19)$$

Початкові умови руху мають вигляд:

$$t_0 = 0, \quad x(t_0) = 0, \quad \dot{x}(t_0) = 0.$$

Підставляючи початкові умови руху в рівняння (18) та (19) отримаємо:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -a / \omega_0^2. \quad (20)$$

Підставляючи (20) в (18), остаточно, розв'язок рівняння (16) матиме вигляд:

$$x = \frac{a}{\omega_0^2} [1 - \cos(\omega_0 t)].$$

З урахуванням вихідних даних та виразів (10), (12) і (17) знайдемо:

$$a_{11} = \frac{3}{2} \frac{2P}{g} = \frac{3P}{g}, \quad a_{12} = \frac{3}{2} \frac{2P}{g} 0,4R = 1,2 \frac{PR}{g},$$

$$a_{22} = \frac{1}{g} \left( 2PR^2 + 1,47PR^2 + 0,16PR^2 + \frac{3}{2} 0,32PR^2 \right) = 4,11 \frac{PR^2}{g},$$

$$\omega_0^2 = c / \left( \frac{3P}{g} - \frac{1,44}{4,11} \frac{P^2 R^2}{g^2} \frac{g}{PR^2} \right) = c / \left( 2,65 \frac{P}{g} \right) = 0,377 \frac{cg}{P}.$$

Отже

$$\omega_0 = 0,614 \sqrt{\frac{cg}{P}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 3,26\pi \sqrt{\frac{P}{cg}}.$$

**Відповідь:**  $x = \frac{a}{\omega_0^2} [1 - \cos(\omega_0 t)]$  [м],  $\omega_0 = 0,613 \sqrt{\frac{cg}{P}}$  [1/с],

$$T = 3,26\pi \sqrt{\frac{P}{cg}} \text{ [с]}.$$

## Задача Д12 – рівняння Лагранжа II роду для системи з одним ступенем вільності

### 12.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Механізм, розташований у вертикальній площині (рис. Д12.0 – Д12.9, табл. Д12), складається із ступінчатих коліс 1 та 2 з радіусами  $R_1=0,4$  м,  $r_1=0,2$  м та  $R_2=0,5$  м,  $r_2=0,3$  м, які мають нерухомі осі обертання; однорідного стрижня 3 довжиною  $l=1,2$  м, закріпленого шарніром на одному з кінців; вантажів 4 та 5, підвішених до ниток, намотаними на колеса. На стрижні відстань  $AB=2l/3$ .

Стрижень 3 з'єднаний з колесом 2 невагомими стрижнем 6. Колеса 1 і 2 або знаходяться в зачепленні (рис. Д12.0 – Д12.4), або з'єднані невагомим стрижнем 7 (рис. Д12.5 – Д12.9). До коліс і стрижня 3 прикріплені пружини.

В табл. Д12 задані маси  $m_i$  тіл (кг) і коефіцієнти жорсткості  $c_i$  пружин (Н/м). Прочерки в стовпцях таблиці означають, що відповідні тіла або пружини в систему не входять (на кресленні ці тіла і пружини не зображати); в результаті в кожному конкретному варіанті отримується доволі простий механізм, який складається з трьох або навіть двох тіл. Стрижень 6 або 7 входить до складу механізма, коли в нього входять тіла з'єднані цим стрижнем.

В положеннях, показаних на рисунках, механізм знаходиться у стані рівноваги. При розрахунках колеса 1 та 2 вважати суцільними однорідними циліндрами.

**Знайти:** частоту і період малих коливань системи навколо положення рівноваги, а також статичне видовження  $\lambda_{cm}$  пружини в положенні рівноваги.

Таблиця Д12

| Номер умови | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $m_5$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|             | кг    |       |       |       |       | Н/м   |       |       |
| 0           | 12    | 16    | —     | 8     | —     | 1200  | —     | —     |
| 1           | 10    | 8     | 4     | —     | —     | —     | —     | 1000  |
| 2           | 16    | 12    | —     | —     | 6     | —     | 800   | —     |
| 3           | 20    | —     | —     | 6     | —     | 1500  | —     | —     |
| 4           | —     | 18    | —     | —     | 4     | —     | 1000  | —     |
| 5           | 18    | 14    | 6     | —     | —     | 1000  | —     | —     |
| 6           | 12    | —     | 8     | 4     | —     | —     | —     | 1200  |
| 7           | 16    | 10    | —     | —     | 4     | 800   | —     | —     |
| 8           | 20    | 16    | —     | 8     | —     | —     | 1200  | —     |
| 9           | 10    | —     | 6     | 4     | —     | 1000  | —     | —     |

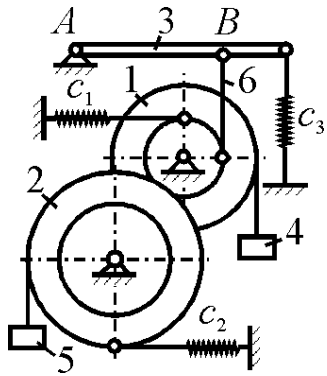


Рис. Д12.0

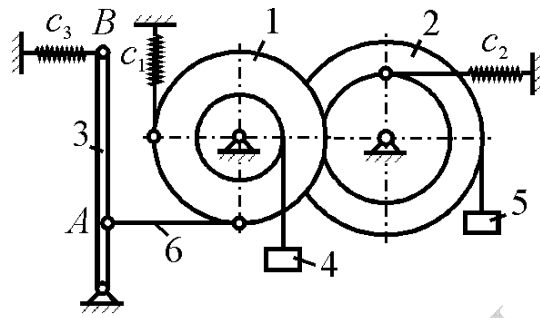


Рис. Д12.1

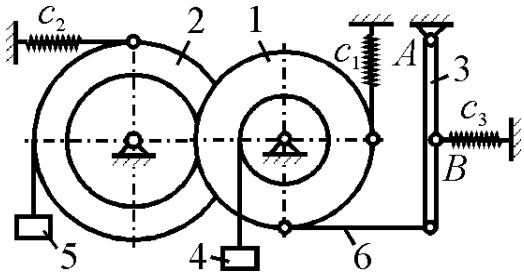


Рис. Д12.2

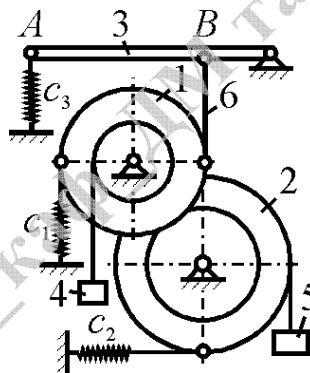


Рис. Д12.3

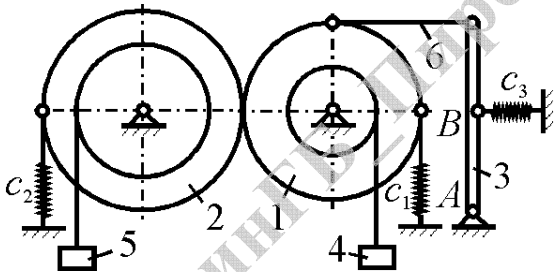


Рис. Д12.4

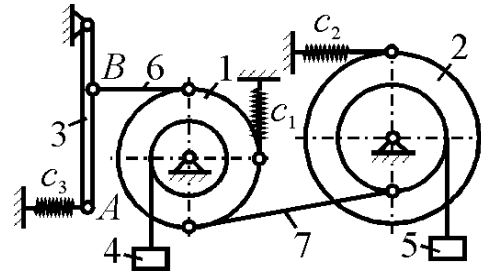


Рис. Д12.5

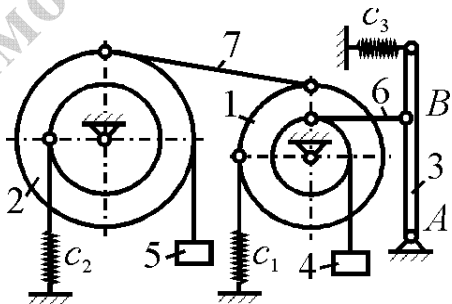


Рис. Д12.6

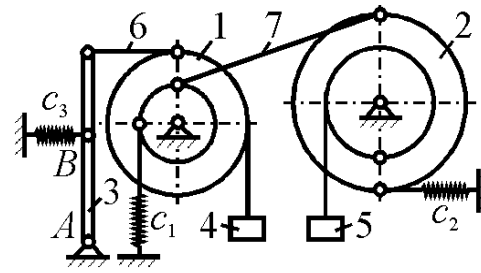


Рис. Д12.7

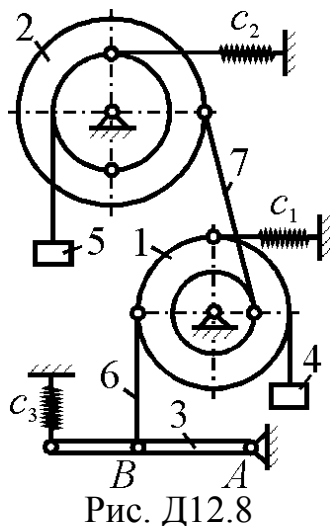


Рис. Д12.8

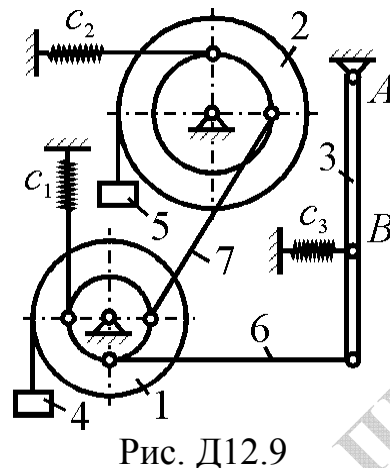


Рис. Д12.9

## 12.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Задача Д12 – на застосування до вивчення руху системи рівняння Лагранжа. В прикладі система має один ступінь вільності, тобто її положення визначається однією узагальненою координатою  $q$ , тому для опису її руху достатньо скласти одне диференціальне рівняння руху системи. При визначенні узагальненої сили врахувати, що так як активні сили потенціальні, то узагальнену силу краще визначати через потенціальну енергію системи.

## 12.3. Приклад розв'язання задачі Д12 (1-ий варіант розв'язку (знаходження узагальненої сили через потенціальну енергію))

**Умова задачі.** Механізм, розташований у вертикальній площині (рис. Д12а), складається із ступінчатих коліс 1 та 2 з радіусами  $R_1, r_1$  та  $R_2, r_2$ , відповідно, які мають нерухомі осі обертання; однорідного стрижня 3 довжиною  $l$ , закріпленого шарніром на одному з кінців; вантажа 4, підвішеного до нитки, намотаної на колесо. Стрижень 3 з'єднаний з колесом 1 невагомими стрижнем 5. До стрижня 3 прикріплена пружина.

В положеннях, показаних на рисунках, механізм знаходиться у стані рівноваги. При розрахунках колеса 1 та 2 вважати суцільними однорідними циліндрами.

**Дано:**  $m_1=10$  кг;  $m_2=8$  кг;  $m_3=5$  кг;  $m_4=6$  кг;  $l=1,2$  м;  $R_1=0,4$  м;  $r_1=0,2$  м;  $R_2=0,5$  м;  $r_2=0,3$  м;  $AB=2l/3$ ;  $c=1200$  Н/м.

**Знайти:** частоту і період малих коливань системи навколо положення рівноваги, а також статичне видовження  $\lambda_{cm}$  пружини в положенні рівноваги.



## Розв'язок

1. Побудова розрахункової схеми (рис. Д12б). Розглянемо довільне положення системи, коли вона виведена з стану рівноваги і здійснює малі коливання.

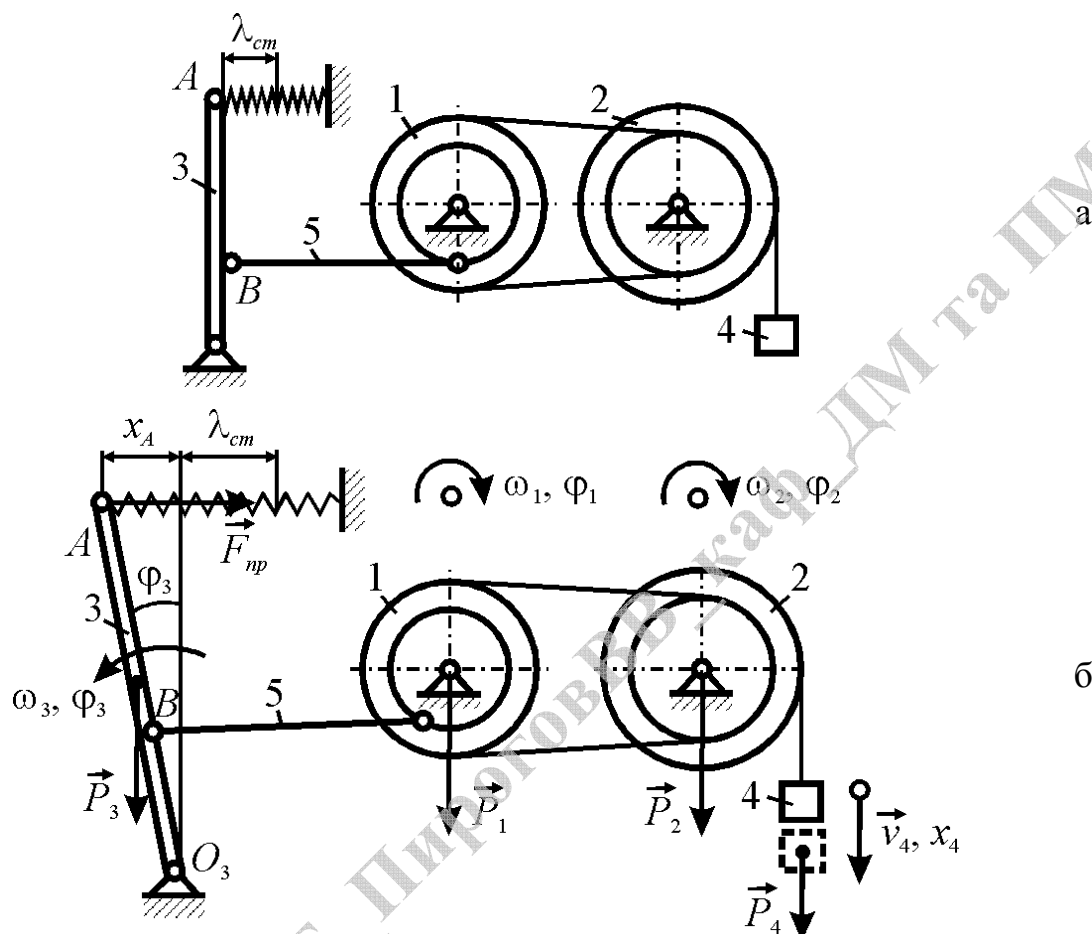


Рис. Д12 Схема механічної системи:  
а – вихідна схема; б – розрахункова схема

1.1. Запишемо рівняння Лагранжа II роду. Система має одну ступінь вільності. Оберемо в якості узагальненої координати кут  $\varphi_1$  відхилення стрижня від вертикалі, вважаючи  $\varphi_1$  малим. Оскільки всі діючі активні сили (сила пружності і сила ваги) потенціальні, виразимо узагальнену силу  $Q$  через потенціальну енергію  $\Pi$  системи. Тоді вихідним рівнянням буде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \quad Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}. \quad (1)$$

Тут в (1) враховано, що  $q = \varphi_1$ .

При дослідженні малих коливань в рівнянні залишають малі величини  $\varphi_1, \dot{\varphi}_1$  в першій степені, відкидаючи малі більш високого порядку.

1.2. Показуємо на схемі переміщення та швидкості тіл системи.

1.3. Прикладаємо до тіл системи сили: активні  $\vec{P}_i = m_i \vec{g}$ ,  $/i = \overline{1,4}/$  ;

силу пружності  $\vec{F}_{np}$  ( $F_{np} = cx$ ).

## 2. Визначення зв'язків між переміщеннями і швидкостями.

2.1. Визначаємо зв'язки між переміщеннями. В якості незалежного переміщення будемо розглядати  $\varphi_1$ :

$$x_B = \varphi_1 r_1, \quad \varphi_3 = \frac{3x_B}{l} = \frac{3\varphi_1 r_1}{l}, \quad x_A = \varphi_3 l = \frac{3\varphi_1 r_1}{l} l = 3\varphi_1 r_1,$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 R_1}{r_2}, \quad x_4 = \varphi_2 R_2 = \frac{\varphi_1 R_1 R_2}{r_2}. \quad (2)$$

2.2. Визначаємо зв'язки між швидкостями. В якості незалежної швидкості будемо розглядати  $\omega_1$ :

$$v_B = \omega_1 r_1, \quad \omega_3 = \frac{3v_B}{l} = \frac{3\omega_1 r_1}{l}, \quad v_A = \omega_3 l = 3\omega_1 r_1,$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 R_1}{r_2}, \quad v_4 = \omega_2 R_2 = \frac{\omega_1 R_1 R_2}{r_2}. \quad (3)$$

**3. Визначення кінетичної енергії системи.** Кінетична енергія системи має вигляд:

$$T = \sum_{i=1}^4 T_i = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \quad (4)$$

Тіло 1 обертається навколо нерухомої осі

$$T_1 = J_1 \omega_1^2 / 2. \quad (5)$$

Тіло 2 обертається навколо нерухомої осі

$$T_2 = J_2 \omega_2^2 / 2. \quad (6)$$

Тіло 3 – однорідний стрижень – обертається навколо нерухомої осі, що проходить через точку  $O_3$

$$T_3 = J_3 \omega_3^2 / 2. \quad (7)$$

Тіло 4 рухається поступально

$$T_4 = m_4 v_4^2 / 2. \quad (8)$$

В (5), (6) та (7) осьові моменти інерції відповідних тіл мають вигляд:

$$J_1 = m_1 R_1^2 / 2, \quad J_2 = m_2 R_2^2 / 2, \quad J_3 = m_3 l^2 / 3. \quad (9)$$

Підставляючи (5) – (9) в (4), кінетична енергія системи матиме вигляд:

$$T = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \omega_2^2 + \frac{1}{3} m_3 l^2 \omega_3^2 + m_4 v_4^2 \right)$$

або враховуючи зв'язки для швидкостей (3), отримаємо

$$T = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \left( \frac{\omega_1 R_1}{r_2} \right)^2 + \frac{1}{3} m_3 l^2 \left( \frac{3\omega_1 r_1}{l} \right)^2 + m_4 \left( \frac{\omega_1 R_1 R_2}{r_2} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{\omega_1^2}{2} \left( \frac{m_1}{2} R_1^2 + \frac{m_2}{2} \frac{R_2^2 R_1^2}{r_2^2} + 3m_3 r_1^2 + m_4 \frac{R_2^2 R_1^2}{r_2^2} \right) = \frac{1}{2} J_{зв} \omega_1^2 = \frac{1}{2} J_{зв} \dot{\varphi}_1^2, \quad (10)$$

де

$$J_{зв} = \frac{m_1}{2} R_1^2 + \frac{m_2}{2} \frac{R_2^2 R_1^2}{r_2^2} + 3m_3 r_1^2 + m_4 \frac{R_2^2 R_1^2}{r_2^2} \quad (11)$$

- зведений до першого тіла осьовий момент інерції системи.

#### 4. Визначення узагальненої сили через потенціальну енергію системи.

Потенціальна енергія системи має вигляд:

$$\Pi = 0,5c\lambda^2 + m_1 g z_{C1} + m_2 g z_{C2} + m_3 g z_{C3} + m_4 g z_{C4}. \quad (12)$$

Тут в (12)

$$z_{C1} = 0, \quad z_{C2} = 0, \quad z_{C3} = 0,5l \cos \varphi_3 \approx 0,5l \left( 1 - \frac{\varphi_3^2}{2} \right),$$

$$z_{C4} = -x_4, \quad \lambda = \lambda_{cm} + x_A. \quad (13)$$

Підставляючи (13) в (12) отримаємо:

$$\Pi = 0,5c(\lambda_{cm} + x_A)^2 + 0,5m_3 g l \left( 1 - \frac{\varphi_3^2}{2} \right) - m_4 g x_4$$

або враховуючи зв'язки для переміщень (2), отримаємо

$$\Pi = 0,5c(\lambda_{cm} + 3\varphi_1 r_1)^2 + 0,5m_3 g l \left( 1 - \frac{9\varphi_1^2 r_1^2}{2l^2} \right) - m_4 g \frac{\varphi_1 R_1 R_2}{r_2}. \quad (14)$$

Узагальнену силу  $Q$  визначимо через потенціальну енергію системи (14):

$$Q = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = - \left[ 3r_1 c (\lambda_{cm} + 3\varphi_1 r_1) - m_3 g \frac{9\varphi_1 r_1^2}{2l} - m_4 g \frac{R_1 R_2}{r_2} \right]. \quad (15)$$

Коли система знаходиться в стані рівноваги, то  $Q=0$  і  $\varphi_1=0$ , тоді з (15) отримаємо:

$$\lambda_{cm} = \frac{m_4 g}{c} \frac{R_1 R_2}{3r_1 r_2}. \quad (16)$$

Підставляючи (16) в (15) отримаємо:

$$Q = -9\varphi_1 r_1^2 \left( c - \frac{m_3 g}{2l} \right). \quad (17)$$

## 5. Проведення перетворень та розрахунків.

### 5.1. Визначення лівої частини рівнянь Лагранжа II роду.

Знайдемо частинні і повну похідну від виразу (10):

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = J_{зв} \dot{\varphi}_1, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = J_{зв} \ddot{\varphi}_1. \quad (18)$$

**5.2. Складання рівнянь Лагранжа II роду.** Рівняння (1) з врахуванням виразів (17) та (18), матиме вигляд:

$$J_{зв} \ddot{\varphi}_1 = Q. \quad (19)$$

### 5.3. Знаходження колової частоти $\omega_0$ та періоду $T$ коливань.

Підставимо вихідні дані в вирази (11), (16) та (17), отримаємо:

$$J_{зв} = \frac{10}{2} \cdot 0,4^2 + \frac{8}{2} \frac{0,5^2 \cdot 0,4^2}{0,3^2} + 3 \cdot 5 \cdot 0,2^2 + 6 \frac{0,5^2 \cdot 0,4^2}{0,3^2} \approx 5,84 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$\lambda_{cm} = \frac{6 \cdot 9,8}{1200} \frac{0,4 \cdot 0,5}{3 \cdot 0,3 \cdot 0,2} \approx 0,0545 \text{ м},$$

$$Q = -9 \cdot 0,2^2 \varphi_1 \left( 1200 - \frac{5 \cdot 9,8}{2 \cdot 1,2} \right) = -424,64 \varphi_1. \quad (20)$$

З врахуванням (20) рівняння (19) матиме вигляд:

$$5,84 \ddot{\varphi}_1 = -424,64 \varphi_1$$

або

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 = 0,$$

де колова частота  $\omega_0$  та період  $T$  коливань

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{424,64}{5,84}} \approx 8,53 \text{ с}^{-1}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{8,53} \approx 0,736 \text{ с}.$$

**Відповідь:**  $\lambda_{cm} = 0,0545 \text{ м}; \omega_0 = 8,53 \text{ с}^{-1}, T = 0,736 \text{ с}.$

## 12.4. Приклад розв'язання задачі Д12 (2-ий варіант розв'язку (знаходження узагальненої сили через елементарну роботу))

Розглянемо інший варіант розв'язання задачі, придатний і у випадку, коли діючі сили не потенціальні.

Оберемо в якості узагальненої координати кут  $\varphi_1$ , вважаючи його малим, і складемо для системи рівняння Лагранжа (1).

Для кінетичної енергії  $T$  системи і для відповідних похідних отримаємо, як і раніше, значення (10) і (18).

Для знаходження узагальненої сили на схемі необхідно обов'язково показати діючі активні сили, які здійснюють роботу при

переміщенні системи, тобто силу пружності пружини  $\vec{F}_{np}$  ( $F_{np} = cx$ ), прикладену до стрижня 3 в точці  $A$  і направлену вправо, сили ваги  $\vec{P}_i = m_i \vec{g}$ ,  $/i = \overline{1,4}/$ , прикладені до відповідних тіл.

Нижче приведемо ті пункти задачі Д12, які відрізняються від попереднього варіанту розв'язку.

## 2. Визначення зв'язків між можливими переміщеннями, переміщеннями і пришвидженнями.

2.1. Визначаємо зв'язки між можливими переміщеннями. В якості незалежного можливого переміщення будемо розглядати  $\delta\varphi_1$ :

$$\begin{aligned} \delta x_B = \delta\varphi_1 r_1, \quad \delta\varphi_3 = \frac{3\delta x_B}{l} = \frac{3r_1\delta\varphi_1}{l}, \quad \delta x_A = \delta\varphi_3 l = \frac{3r_1\delta\varphi_1}{l} l = 3r_1\delta\varphi_1, \\ \delta\varphi_2 = \frac{R_1\delta\varphi_1}{r_2}, \quad \delta x_4 = \delta\varphi_2 R_2 = \frac{R_1 R_2 \delta\varphi_1}{r_2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Підпункти 2.2, 2.3 та пункт 3 аналогічні відповідним підпунктам 2.1, 2.2 та пункту 3 приведеним в попередньому варіанті розв'язку задачі.

**4. Визначення узагальненої сили через елементарну роботу системи.** Надамо системі можливого переміщення, при якому кут  $\varphi$  отримає приріст  $\delta\varphi$ , і обчислюємо роботу  $\delta A$  всіх названих сил на цьому переміщенні. Отримаємо

$$\delta A = (0,5P_3 l \sin \varphi_3 - F_{np} l \cos \varphi_3) \delta\varphi_3 + P_4 \delta x_4. \quad (22)$$

Підставимо зв'язки між можливими переміщеннями (21) в рівняння (22). Тоді враховуючи, що

$$F_{np} = c(\lambda_{cm} + x_A) = c(\lambda_{cm} + 3r_1\varphi_1),$$

та те, що при малих  $\varphi$

$$\sin \varphi = \varphi, \quad \cos \varphi = 1,$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \delta A &= (0,5m_3 g l \varphi_3 - cF_{np} l) \delta\varphi_3 + m_4 g \delta x_4 = \\ &= [0,5m_3 g l \frac{3r_1\varphi_1}{l} - cl(\lambda_{cm} + 3r_1\varphi_1)] \frac{3r_1\delta\varphi_1}{l} + m_4 g \frac{R_1 R_2 \delta\varphi_1}{r_2} = \\ &= \left[ m_3 g \frac{9r_1^2 \varphi_1}{2l} - 3r_1 c(\lambda_{cm} + 3r_1\varphi_1) + m_4 g \frac{R_1 R_2}{r_2} \right] \delta\varphi_1. \end{aligned}$$

Коефіцієнт при  $\delta\varphi$  в правій частині отриманої рівності і є шуканою узагальненою силою. Отже, узагальнена сила буде мати вигляд (15). Величину  $\lambda_{cm}$  знайдемо враховуючи, що при рівновазі, тобто коли  $\varphi_1=0$ , буде і  $Q=0$ . В результаті отримаємо для  $\lambda_{cm}$  значення задане формулою (16), а узагальнена сила прийме вигляд (17).

## 5. Проведення перетворень та розрахунків.

Підпункти 5.1, 5.2 та 5.3 аналогічні відповідним підпунктам приведеним в попередньому варіанті розв'язку задачі.

### 5.4. Аналіз стійкості системи.

Підставляючи значення відповідних похідних з рівностей (18) і значення  $Q$ , задане формулою (17), в рівняння (1), приведемо його до вигляду

$$\ddot{\varphi}_1 + \left( c - \frac{m_3 g}{2l} \right) \frac{9r_1^2}{J_{зв}} \varphi_1 = 0. \quad (23)$$

Розв'язок рівняння (23) суттєво залежить від знака коефіцієнта при  $\varphi_1$ . Якщо цей коефіцієнт додатний, тобто

$$c > 0,5m_3 g / l, \quad (24)$$

то, ввівши позначення

$$\omega_0^2 = \left( c - \frac{m_3 g}{2l} \right) \frac{9r_1^2}{J_{зв}}, \quad (25)$$

отримаємо, як відомо, розв'язок рівняння (23) у вигляді

$$\varphi = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t).$$

Якщо при  $t_0 = 0$ ,  $\varphi = \varphi_0$  та  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ , то  $C_2 = \varphi_0$ ,  $C_1 = \dot{\varphi}_0 / \omega_0$ . Але  $\varphi_0$  і  $\dot{\varphi}_0$  завжди можна вибрати як завгодно малим, так щоб кут  $\varphi$  при русі системи теж буде залишатися малим, і система здійснюватиме малі коливання навколо положення її рівноваги, що визначається кутом  $\varphi = 0$ . Рівновага системи в даному випадку називається стійкою; умова стійкості рівноваги визначається в даній задачі нерівністю (24).

Якщо коефіцієнт при  $\varphi$  в рівнянні (23) буде від'ємним, тобто  $c < 0,5m_3 g / l$ , то ввівши позначення

$$n^2 = \left( c - \frac{m_3 g}{2l} \right) \frac{9r_1^2}{J_{зв}},$$

приведемо рівняння (23) до вигляду  $\ddot{\varphi} - n^2 \varphi = 0$ . Розв'язок цього рівняння матиме вигляд

$$\varphi = C_1 e^{nt} + C_2 e^{-nt}$$

і, які б не були початкові умови, множник  $e^{nt}$ , а з ним і кут  $\varphi$ , з часом зростатимуть, тобто система виведена з стану рівноваги як завгодно малим зміщенням, відхилятиметься від цього положення все більше і більше. Рівновага системи в такому випадку називається нестійкою.

В даному прикладі  $c > 0,5m_3 g / l$ , тому рівновага системи є стійкою і вона здійснює малі коливання навколо положення рівноваги.

## Теоретичні питання з розділу "Динаміка"

Для розв'язання задач з динаміки необхідно засвоїти такі теми курсу теоретичної механіки.

### Динаміка точки

1. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки у векторній, координатній і натуральній формах.
2. Дві основні задачі динаміки точки (пряма, обернена). Послідовність їх розв'язання.
3. Сила інерції матеріальної точки. Принцип Даламбера для вільної і невільної матеріальної точки. Принцип Даламбера при відносному русі матеріальної точки. Стан відносного спокою.
4. Теорія прямолінійних коливань матеріальної точки. Пружна сила, сила в'язкого опору середовища, збурна сила. Положення статичної рівноваги. Коливальний рух.
5. Вільні коливання матеріальної точки при відсутності сил опору. Амплітуда, частота, фаза, період вільних коливань.
6. Затухаючі коливання матеріальної точки. Декремент затухаючих коливань.
7. Вимушені коливання матеріальної точки. Явище резонансу.

### Загальні теореми динаміки

8. Центр мас матеріальної системи. Координати центра мас. Теорема про рух центра мас матеріальної системи.
9. Кількість руху матеріальної точки. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки в диференціальній і інтегральній формах.
10. Кількість руху матеріальної (механічної) системи. Теорема про зміну кількості руху матеріальної системи в диференціальній і інтегральній формах.
11. Момент кількості руху матеріальної точки. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки.
12. Момент кількості руху матеріальної системи (кінетичний момент). Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної системи.
13. Кінетичний момент твердого тіла. Тензор інерції.
14. Властивості тензора інерції.
15. Осьові моменти інерції деяких тіл – приклади обчислення.
16. Диференціальні рівняння поступального, обертального і плоско-паралельного рухів абсолютно твердого тіла.
17. Елементарна робота сили і робота сили на кінцевому переміщенні (повна робота сили). Визначення роботи у векторній, координатній і натуральній формах.

18. Кінетична енергія матеріальної точки. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки у диференціальній і інтегральній формах.
19. Кінетична енергія матеріальної системи. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи у диференціальній і інтегральній формах.
20. Обчислення кінетичної енергії матеріальної системи у загальному випадку її руху – переносного руху разом з центром мас і відносного руху навколо центра мас (теорема Кьоніга). Кінетична енергія абсолютно твердого тіла при різних випадках його руху.
21. Силкові поля. Потенціальні силкові поля. Робота сил ваги, пружності і центральної сили. Силова функція. Критерій потенціальності силового поля.
22. Потенціальна енергія. Повна механічна енергія. Консервативні механічні системи. Закон збереження повної механічної енергії матеріальної точки і системи.

#### **Аналітична механіка**

23. Математичне означення в'язей. Класифікація в'язей (стаціонарні, нестаціонарні, утримуючі, неутримуючі, голономні, неголономні).
24. Дійсні і можливі переміщення механічної системи. Обмеження, які накладають в'язі на можливі переміщення.
25. Ідеальні і неідеальні в'язі. Приклади.
26. Принцип можливих переміщень.
27. Загальне рівняння динаміки.
28. Узагальнені координати, швидкості, сили. Узагальнене рівняння статички.
29. Рівняння Лагранжа II роду.
30. Рівняння Лагранжа II роду для консервативних і дисипативних систем.



## Література

1. *Кільчевський М. О.* Курс теоретичної механіки. – Т. 1–2. –К., 1955–1957.
2. *Павловський М.А.* Теоретична механіка: Підручник / Павловський М.А. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
3. *Філімоніхін Г.Б.* Теоретична механіка. Статика. Навчальний посібник. -Кіровоград.: КНТУ, -2010. 115 с.
4. *Філімоніхін Г.Б.* Теоретична механіка. Кінематика. Навчальний посібник. -Кіровоград.: КНТУ, -2011. 68 с.
5. *Філімоніхін Г.Б.* Теоретична механіка. Динаміка. Навчальний посібник. -Кіровоград.: ПП "КОД", -2000. 111 с.
6. Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников машиностроительных, строительных, транспортных, приборостроительных специальностей высших учебных заведений / Под ред. С.М.Тарга – 4-е изд. – М.: Высш. шк., 1989. – 111 с.
7. *Путята Т.В., Фрадлін Б.Н.* Методика розв'язування задач з теоретичної механіки. –К.: “Радянська школа”, -1955. 391 с.
8. *Мецкерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. –М., 1986 (и пред. изд.)
9. *Г.Б.Філімоніхін* Методичні вказівки і завдання до курсової роботи з теоретичної механіки (розділ "Динаміка"). –К: "ВІПОЛ", 1993. 31 с., іл.
10. *Бертяев В.Д.* Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум / В.Д. Бертяев. –СПб.: БХВ-Петербург, 2005. –752 с.

**Практикум з теоретичної механіки. Динаміка:  
Навчальний посібник**

д.т.н., проф. Геннадій Борисович Філімоніхін,  
к.ф.-м.н., ст. викл. Володимир Васильович Пирогов

Комп'ютерний набір  
кафедра ДМ та ПМ  
т. (0522) 597-547

Підп. до друку 12.10.2014 Формат 60x84 1/16 (A5). Папір друк №3. Друк офсетний.  
Умов. друк. арк. Ум.фарбо-відб. 3,33 Облік.-вид.арк. . Тираж 100 прим.  
Зам.№

---

Кіровоградський національний технічний університет  
25006, м. Кіровоград. пр. Університетський, 8