

ОБ УРАВНОВЕШИВАНИИ РОТОРА МАЯТНИКАМИ, НАСАЖЕННЫМИ НА ОСИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ВАЛУ*

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Н.А.Перестюком)

It is offered to autobalance a rotor by two pairs of pendulum, which are connected under a right angle, installed on axes perpendicular to the shaft. The model of a rotor making cylindrical motions is considered. The sufficient conditions for asymptotic stability of the main motion are found: when the weight of pendulums are much less than the weight of a rotor; at fast rotation of a rotor; at large friction between pendulums and axes; and at large external friction. In the absence of forces of resistance, the area of stability of the main motion not dependent on unbalance is found.

Насколько нам известно, в работе впервые предложено уравнивать ротор на ходу жёстко связанными под прямым углом маятниками, насаженными на оси, перпендикулярные валу ротора. Рассмотрим поведение одной пары связанных маятников в поле центробежных сил (рис.1). На маятники действуют силы инерции $J_1 = m\rho_1\omega^2 = ml\omega^2 \sin \alpha$, $J_2 = m\rho_2\omega^2 = ml\omega^2 \cos \alpha$, которые сводятся к равнодействующей

$$J = J_1 - J_2 = ml\omega^2(\sin \alpha - \cos \alpha) = \sqrt{2}ml\omega^2 \sin \beta. \quad (1)$$

Здесь $\sqrt{2}l \sin \beta = \rho_c$ - расстояние от общего центра масс маятников до оси вращения.

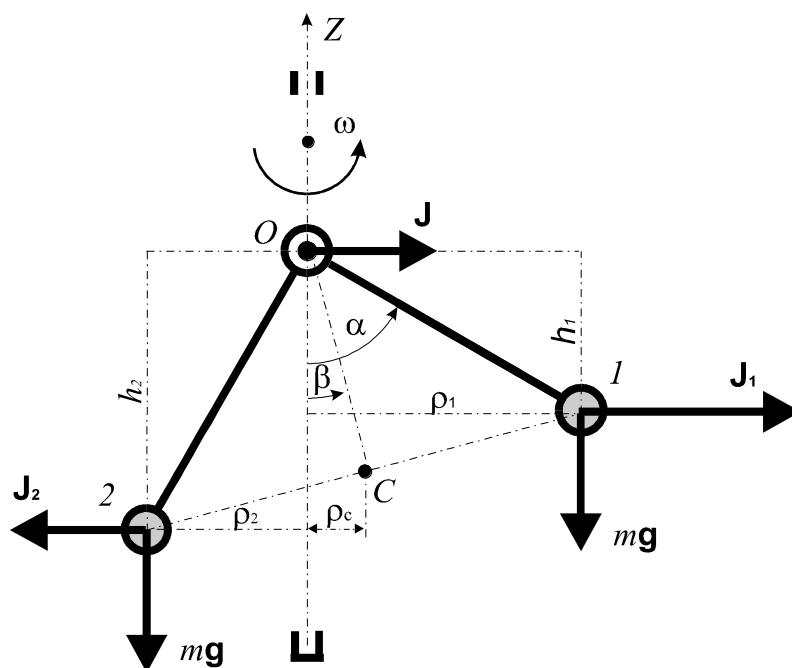


Рис.1.

Равнодействующая приложена в точке подвеса маятников и направлена в сторону большей силы инерции. Поэтому маятники уравнивают дисбаланс, который находится в плоскости, перпендикулярной валу и проходящей через точку подвеса O. Эта плоскость и является плоскостью коррекции. Момент сил инерции относительно оси O:

$$M_o = J_1 h_1 - J_2 h_2 = ml\omega^2 \sin \alpha \cdot l \cos \alpha - ml\omega^2 \cos \alpha \cdot l \sin \alpha \equiv 0. \quad (2)$$

Таким образом, маятники под действием центробежных сил инерции находятся в состоянии безразличного равновесия. Силы тяжести это состояние нарушают.

Исследуем динамику уравнивания ротора двумя парами маятников, насаженных на две взаимно перпендикулярные оси, расположенные перпендикулярно валу ротора (рис.2 а, б). Предполагаем, что ротор совершает цилиндрические движения. Первую группу уравнений получим, используя теорему о движении центра масс системы. Координаты центра масс системы:

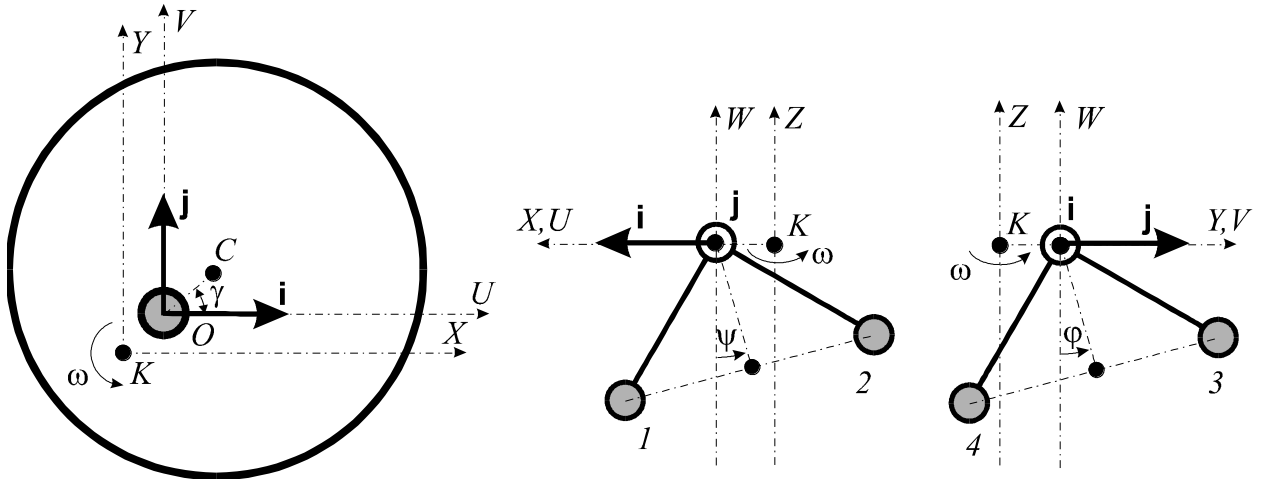


Рис. 2

$$\begin{aligned} M_{\Sigma}x_c &= Mx_0 + M_{\Sigma}x - \sqrt{2}ml \sin \psi, & M_{\Sigma}y_c &= My_0 + M_{\Sigma}y + \sqrt{2}ml \sin \varphi, \\ M_{\Sigma} &= M + 4m, & x_0 &= e \cos \gamma, & y_0 &= e \sin \gamma, & e &= |OC|. \end{aligned} \quad (3)$$

Ускорение центра масс системы:

$$M_{\Sigma}a_{xc} = M_{\Sigma}(\ddot{x}_c - 2\omega\dot{y}_c - \omega^2x_c), \quad M_{\Sigma}a_{yc} = M_{\Sigma}(\ddot{y}_c + 2\omega\dot{x}_c - \omega^2y_c).$$

Производные во вращающейся системе координат:

$$\begin{aligned} M_{\Sigma}\dot{x}_c &= M_{\Sigma}\dot{x} - \sqrt{2}ml\dot{\psi}\cos\psi, & M_{\Sigma}\dot{y}_c &= M_{\Sigma}\dot{y} + \sqrt{2}ml\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ M_{\Sigma}\ddot{x}_c &= M_{\Sigma}\ddot{x} - \sqrt{2}ml\ddot{\psi}\cos\psi + \sqrt{2}ml\dot{\psi}^2\sin\psi, & M_{\Sigma}\ddot{y}_c &= M_{\Sigma}\ddot{y} + \sqrt{2}ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - \sqrt{2}ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi. \end{aligned}$$

Левая часть теоремы о движении центра масс:

$$\begin{aligned} M_{\Sigma}a_{xc} &= M_{\Sigma}(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2x) - \\ & - \sqrt{2}ml \left[\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\psi}^2\sin\psi + 2\omega\dot{\varphi}\cos\varphi - \left(\sin\psi - \frac{Mx_0}{\sqrt{2}ml} \right) \omega^2 \right], \\ M_{\Sigma}a_{yc} &= M_{\Sigma}(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2y) + \\ & + \sqrt{2}ml \left[\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi - 2\omega\dot{\psi}\cos\psi - \left(\sin\varphi + \frac{My_0}{\sqrt{2}ml} \right) \omega^2 \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Если ротор удерживают изотропные вязкоупругие опоры и он расположен вертикально, то главный вектор внешних сил можно найти как

$$R_x^{(e)} = -H_1v_{ox} - cx = -H_1(\dot{x} - \omega y) - cx, \quad R_y^{(e)} = -H_1v_{oy} - cy = -H_1(\dot{y} + \omega x) - cy. \quad (5)$$

Тогда дифференциальные уравнения движения центра масс примут вид:

$$\begin{aligned} M_{\Sigma}(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2x) + H_1(\dot{x} - \omega y) + cx - \\ - \sqrt{2}ml \left[\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\psi}^2\sin\psi + 2\omega\dot{\varphi}\cos\varphi - \left(\sin\psi - \frac{Mx_0}{\sqrt{2}ml} \right) \omega^2 \right] &= 0, \\ M_{\Sigma}(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2y) + H_1(\dot{y} + \omega x) + cy + \end{aligned}$$

$$+ \sqrt{2}ml \left[\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - 2\omega\dot{\psi} \cos \psi - \left(\sin \varphi + \frac{My_0}{\sqrt{2}ml} \right) \omega^2 \right] = 0. \quad (6)$$

Составим уравнения движения маятников. Используем то, что момент сил инерции маятников относительно оси подвеса уравнивается моментом активных сил. Момент сил инерции первой и второй пары маятников относительно осей v, u :

$$M_v^{(ин)} = \vec{j} \cdot \vec{M}_{o1}^{(ин)} = -\vec{j} \cdot (\vec{r}_1 \times m\vec{a}_1 + \vec{r}_2 \times m\vec{a}_2), \quad M_u^{(ин)} = \vec{i} \cdot \vec{M}_{o2}^{(ин)} = -\vec{i} \cdot (\vec{r}_3 \times m\vec{a}_3 + \vec{r}_4 \times m\vec{a}_4).$$

Радиус-векторы маятников относительно точки O :

$$\vec{r}_1 = l[\sin(45^\circ - \psi), 0, -\cos(45^\circ - \psi)], \quad \vec{r}_2 = l[-\cos(45^\circ - \psi), 0, -\sin(45^\circ - \psi)], \\ \vec{r}_3 = l[0, \sin(45^\circ + \varphi), -\cos(45^\circ + \varphi)], \quad \vec{r}_4 = l[0, -\cos(45^\circ + \varphi), -\sin(45^\circ + \varphi)],$$

Ускорения масс маятников:

$$\vec{a}_i = \vec{a}_o + \vec{\varepsilon}_i \times \vec{r}_i + \vec{\omega}_i (\vec{\omega}_i \cdot \vec{r}_i) - \omega_i^2 \vec{r}_i, \quad i = \overline{1,4},$$

где

$$\vec{a}_o = (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x, \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y, 0), \quad \vec{\omega}_{1/2} = (0, \dot{\psi}, \omega), \quad \vec{\omega}_{3/4} = (\dot{\varphi}, 0, \omega), \\ \vec{\varepsilon}_{1/2} = (-\omega\dot{\psi}, \ddot{\psi}, 0), \quad \vec{\varepsilon}_{3/4} = (\ddot{\varphi}, \omega\dot{\varphi}, 0).$$

Тогда моменты сил инерции для двух пар маятников задают выражения

$$M_v^{(ин)} = -2ml^2 \ddot{\psi} + \sqrt{2}ml(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) \cos \psi, \quad M_u^{(ин)} = -2ml^2 \ddot{\varphi} - \sqrt{2}ml(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) \cos \varphi. \quad (7)$$

Из активных сил момент образуют силы тяжести и условно отнесенные к активным силам - силы вязкого трения между маятниками и осями:

$$M_v^{(ак)} = -H_2 \dot{\psi} - \sqrt{2}mgl \sin \psi, \quad M_u^{(ак)} = -H_2 \dot{\varphi} - \sqrt{2}mgl \sin \varphi. \quad (8)$$

Тогда уравнения движения маятников примут вид:

$$2ml^2 \ddot{\psi} + H_2 \dot{\psi} + \sqrt{2}mgl \sin \psi - \sqrt{2}ml(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) \cos \psi = 0, \\ 2ml^2 \ddot{\varphi} + H_2 \dot{\varphi} + \sqrt{2}mgl \sin \varphi + \sqrt{2}ml(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) \cos \varphi = 0. \quad (9)$$

Таким образом, динамику ротора и связанных маятников определяют десять параметров $M, e, \gamma, H_1, H_2, c, m, l, \omega, g$. Для выделения существенно различных параметров, характеризующих динамику системы, приведём уравнения движения к безразмерному виду.

Определим резонансную частоту системы равенством $\omega_0 = \sqrt{c/M_\Sigma}$. Это частота собственных колебаний ротора при неподвижных маятниках и при отсутствии сил сопротивления. Введём безразмерные переменные и время:

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{2}l}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{2}l}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \left(\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau} \right). \quad (10)$$

Введём безразмерные параметры:

$$R_\omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad R_m = \frac{m}{M_\Sigma}, \quad R_g = \frac{g}{\sqrt{2}l\omega_0^2}, \quad H = \frac{H_1}{\omega_0 M_\Sigma}, \quad h = \frac{H_2}{2\omega_0 ml^2}, \quad u_0 = \frac{Mec \cos \gamma}{\sqrt{2}ml}, \quad v_0 = \frac{Mes \sin \gamma}{\sqrt{2}ml}. \quad (11)$$

Тогда уравнения динамики принимают вид:

$$\ddot{\xi} - 2R_\omega \dot{\eta} - R_\omega^2 \xi + H(\dot{\xi} - R_\omega \eta) + \xi - R_m[\ddot{\psi} \cos \psi + 2R_\omega \dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\psi}^2 \sin \psi - R_\omega^2(\sin \psi - u_0)] = 0, \\ \ddot{\eta} + 2R_\omega \dot{\xi} - R_\omega^2 \eta + H(\dot{\eta} + R_\omega \xi) + \eta + R_m[\ddot{\varphi} \cos \varphi - 2R_\omega \dot{\psi} \cos \psi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - R_\omega^2(\sin \varphi + v_0)] = 0, \\ \ddot{\psi} + h\dot{\psi} + R_g^2 \sin \psi - (\ddot{\xi} - 2R_\omega \dot{\eta} - R_\omega^2 \xi) \cos \psi = 0, \\ \ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} + R_g^2 \sin \varphi + (\ddot{\eta} + 2R_\omega \dot{\xi} - R_\omega^2 \eta) \cos \varphi = 0. \quad (12)$$

Здесь точка над переменной означает уже производную по τ , а не по t . Динамику системы определяют семь существенно различных параметров.

Полученная система уравнений при не учете сил тяжести ($R_g = 0$) полностью совпадает с дифференциальными уравнениями движения четырехмаятникового автобалансира со связями,

наложенными на движения маятников [2]. Это позволяет сделать следующие заключения об устойчивости основного движения

$$\xi_0 = 0, \eta_0 = 0, \psi_0 = \arcsin u_0, \varphi_0 = -\arcsin v_0, \left(R_g = 0 \right) \quad (13)$$

- когда масса маятников намного меньше массы ротора $\varepsilon_2 \ll 1$ достаточное условие асимптотической устойчивости $|R_\omega| > 1$;
- при большом трении между маятниками и валом $h \gg 1$ достаточное условие асимптотической устойчивости $|R_\omega| > 1$;
- для быстровращающегося ротора $|R_\omega| \gg 1$ достаточное условие асимптотической устойчивости $h > \sqrt{\varepsilon_2} H$;
- при большом внешнем трении $H \gg 1$ достаточное условие асимптотической устойчивости $(R_\omega^2 - 1)h^2 - R_\omega^4 \varepsilon_2 (-\delta^2) > 0$.

Здесь

$$\varepsilon_2 = \frac{\cos^2 \psi_0 + \cos^2 \varphi_0}{2} R_m, \quad \delta = \frac{\cos^2 \psi_0 - \cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \psi_0 + \cos^2 \varphi_0}. \quad (14)$$

При отсутствии сил сопротивления $H = 0$, $h = 0$ критические скорости есть функции вида [3] $R_{\omega j} = R_{\omega j}(\varepsilon_2, k)$, $k = 1 - \delta^2$, и в плоскости $R_m \times R_\omega$ области устойчивости A, B, не зависящие от величины и направления вектора дисбаланса ограничивают кривые (рис.3):

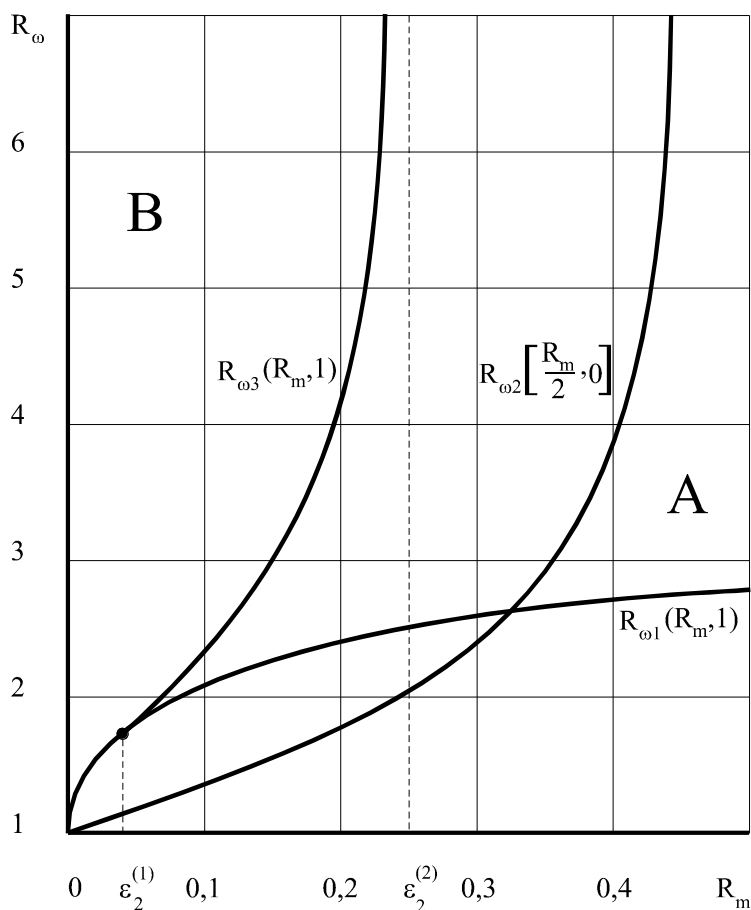


Рис. 3

$$R_{\omega 1}(R_m, 1) = \frac{\sqrt{1-s^2}}{1-2s^2}, \quad s = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{R_m}}{2} \left[1 - \frac{16}{27} R_m + \left(1 - \frac{32}{27} R_m \right)^{\frac{1}{2}} \right]} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{R_m}}{2} \left[1 - \frac{16}{27} R_m - \left(1 - \frac{32}{27} R_m \right)^{\frac{1}{2}} \right]} - \frac{2}{3} \sqrt{R_m};$$

при $0 < R_m \leq 0,1$

$$R_{\omega 2}\left(\frac{R_m}{2}, 0\right) = 1 + \frac{49}{16} \frac{R_m}{2} + \frac{12397}{1024} \left(\frac{R_m}{2}\right)^2 + \dots,$$

при $0,1 < R_m < 0,5$

$$R_{\omega 2}\left(\frac{R_m}{2}, 0\right) = \frac{1}{8\alpha} \left(1 - 2\alpha^{\frac{1}{2}} + \frac{11}{2}\alpha + \frac{37}{4}\alpha^{\frac{3}{2}} - \frac{155}{8}\alpha^2 + \dots \right), \quad \alpha = \frac{1}{2} \left(0,25 - \frac{R_m}{2} \right);$$

$$R_{\omega 3}(R_m, 1) = \frac{\sqrt{2(-2R_m)}}{1-4R_m}, \quad R_m \in (\varepsilon_2^{(1)}, \varepsilon_2^{(2)}), \quad \varepsilon_2^{(1)} = 0,0401783\dots, \quad \varepsilon_2^{(2)} = 0,25.$$

Список литературы

1. Детинко Ф.М. Об устойчивости работы автобалансира для динамической балансировки // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. И Машиностр. - 1959. - №4. - С. 38-45.
2. Філімоніхін Г.Б. До стійкості автобалансируючого пристрою із зв'язками, накладеними на рух корегуючих вантажів // Доп. АН УРСР. Сер.А. - 1990. - №12. - С. 26-29.
3. Филимоныхин Г.Б. К устойчивости основного движения двухмаятникового автобалансира // Доп. НАН України. Сер.А. - 1996. - №8. - С. 74-78.
4. Найфэ А. Введение в методы возмущений. - М.: Мир, 1984. - 535 с.

Кировоградский государственный технический
Университет

Поступила в редакцию 05.04.99