УДК 62-752+62-755

УРАВНОВЕШИВАНИЕ АВТОБАЛАНСИРОМ РОТОРА В УПРУГО-ВЯЗКО ЗАКРЕПЛЕННОМ КОРПУСЕ, СОВЕРШАЮЩЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

Филимонихин Геннадий Борисович,
д-р техн. наук, профессор кафедры деталей машин и прикладной механики факультета проектирования и эксплуатации машин Кировоградского национального технического университета, Украина, 25006, г. Кировоград, пр. Университетский, 8. E-mail: filimonikhin@yandex.ua

Гончаров Валерий Владимирович,
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики факультета проектирования и эксплуатации машин Кировоградского национального технического университета, Украина, 25006, г. Кировоград, пр. Университетский, 8. E-mail: matkora@yandex.ru

Актуальность работы обусловлена необходимостью исследования процесса уравновешивания автобалансирами ротора.
Цель работы*: оценить переходные процессы при статическом уравновешивании автобалансиром со многими корректирующими грузами ротора, помещенного с возможностью вращения в тяжелый упруго-вязко закрепленный корпус, совершающий пространственное движение.*
Методы исследования: *тория устойчивости установившихся движений механических систем; математическая теория устойчивости движений по Ляпунову.*
Результаты: *Найдены условия наступления автобалансировки и установлено, что:*

- *корпус и ротор условно образуют составной, более массивный и длинный ротор, характеристики которого влияют на процесс автобалансировки;*
- *переходные процессы, характеризующие автобалансировку, делятся на: быстрые, при которых практически прекращаются движения корригирующих грузов относительно ротора и устанавливается движение ротора, соответствующее суммарному дисбалансу корректирующих грузов и дисбаланса ротора; медленные, при которых корригирующие грузы приходят в автобалансировочное положение, двигаясь относительно ротора;*
- *скорость протекания быстрых переходных процессов зависит от параметров закрепления корпуса, массо-инерционных характеристик составного ротора, скорости вращения, положения плоскости балансировки, сил вязкого сопротивления, действующих на корригирующие грузы, и не зависит от уравновешиваемого дисбаланса, количества и положений корригирующих грузов;*
- *скорость протекания медленных переходных процессов дополнительно зависит от уравновешиваемого дисбаланса, количества и положений корригирующих грузов, но не зависит от сил сопротивления опор.*

Ключевые слова:
Ротор, дисбаланс, автобалансир, основное движение, устойчивость движения.

Введение

Роторы многих центробежных машин – стиральных, экстракторов, сепараторов, центрифуг, осевых вентиляторов и пр. – установлены в корпус с возможностью вращения, а уже корпус закреплен упруго-вязко и совершает неплоское движение. В этих машинах дисбаланс ротора меняется в процессе выполнения технологических операций, поэтому его целесообразно уравновешивать на ходу пассивными автобалансирами (АБ) [1–5].

Наиболее полный обзор литературы по пассивной автобалансировке роторов приведен в [5]. Учет этого обзора, более поздних публикаций и работ [6–18] показывает, что на сегодня практически нет работ, в которых аналитически исследуется процесс автобалансировки роторов, совершающих пространственное движение. В указанных работах определяются только условия наступления автобалансировки в виде критических скоростей, при переходе через которые наступает или исчезает автобалансировка. Эти скорости для двухшарового АБ определяются в [1–4, 6–13, 15–18] с применением метода синхронизации динамических систем И.И. Блехмана [19], для АБ любого типа – с применением эмпирического критерия наступления автоболансировки в [5] или энергетического критерия, использующего функцию Гамильтона, в [14]. При этом переходные процессы не исследуются.

Дифференциальные уравнения движения роторных машин с АБ почти не поддаются аналитическому исследованию ввиду существенной нелинейности и большому количеству степеней свободы системы. Такие уравнения позволяют аналитически исследовать АБ только с двумя корректирующими грузами (КГ) – шарами, роликами, маятниками.

С учетом вышеописанных проблем в работе [20] была предложена методика составления упрощенных дифференциальных уравнений движения роторных машин с АБ, учитывающая особенности таких механических систем – отношения малости параметров, малость отклонений продольной оси ротора от оси вращения и т. п. В соответствии с этой методикой составляются замкнутые уравнения движения роторной машины с АБ относительно обобщенных координат, описывающих движение ротора и его дисбаланс, так как именно эти координаты описывают процесс автобалансировки и позволяют исследовать АБ со многими КГ. В работе [21] с применением указанной методики были аналитически исследованы переходные процессы, протекающие при статическом уравновешивании АБ со многими КГ ротора, помещенного с возможностью вращения в упруго-вязко закрепленный корпус с неподвижной точкой. Там же была предложена методика таких исследований, которая может быть стандартной при решении подобных задач.

В настоящей работе методика исследований, предложенная в работах [20, 21], применяется для аналитического исследования переходных процессов, протекающих при статическом уравновешивании АБ со многими КГ ротора, помещенного с возможностью вращения в упруго-вязко закрепленный корпус, совершающий пространственное движение.

Описание теоретико-механической модели роторной машины

Осесимметричный ротор массы m_r установлен в корпусе массы m_c с возможностью вращения вокруг продольной оси (рис. 1). Центры масс ротора и массивного корпуса совпадают и находятся в точке O. Ротор вращается относительно корпуса с постоянной угловой скоростью ω. Корпус удерживают пять упруго-вязких опор.

Движение машины описывается с использованием двух систем осей: $Oxyz$ – неподвижных; $G\xi\eta\zeta$ – подвижных, жестко связанных с ротором. В исходном положении, когда машина неподвижна и находится в положении статического равновесия, системы $Oxyz$ и $G\xi\eta\zeta$ совпадают. Ось Oz направлена вдоль оси вращения ротора. В плоскости $z=d$ находится статический дисбаланс $\mathbf{s}_0$, образованный точечной массой m_0, находящейся на расстоянии r_0 от продольной оси ротора. Ось Ox направлена в сторону начального направления вектора статического дисбаланса $\mathbf{s}_0$, а ось Oy направлена так, что тройка осей $Oxyz$ правая. Свойства упруго-вязких опор характеризуют коэффициенты жесткости k, k_z и вязкости b, b_z.

Модель движения ротора с массивным корпусом и дисбалансом приведена на рис. 2. Вначале совершается поступательное перемещение ротора с корпусом на (x,y,z) вдоль координатных осей. В результате система осей $Oxyz$ переходит в промежуточное положение $Gx_Gy_Gz_G$ (рис. 2, *а*). Потом совершаются повороты ротора с корпусом вокруг точки G на углы Резаля α и β (рис. 2, *б*). В результате система осей $Gx_Gy_Gz_G$ переходит в $Guvw$. Последним совершается поворот ротора вокруг продольной оси $w=\zeta$ на угол ωt (рис. 2, *в*). При этом система осей $Guvw$ переходит в систему $G\xi\eta\zeta$.

Относительно системы осей $Ouvw$ тензоры инерции ротора и корпуса имеют вид

$$\mathbf{J}_r = \mathrm{Diag}(A_r, A_r, C_r),\ \ \mathbf{J}_c = \mathrm{Diag}(A_c, A_c, C_c).$$

В плоскости $\zeta=d$ ротор уравновешивает АБ, состоящий из n одинаковых КГ (маятников, шаров или цилиндрических роликов). В маятниковом АБ на вал ротора насажено n математических маятников массы m и физической длины r. В шаровом либо роликовом АБ n шаров или цилиндрических роликов массой m катятся без скольжения по кольцевой дорожке, при этом расстояние от продольной оси ротора до центра шара либо продольной оси ролика равно r.

Как это принято в теории пассивных АБ [1–21], действием сил тяжести пренебрегаем и полагаем, что: радиусы КГ (шаров, роликов) намного меньше

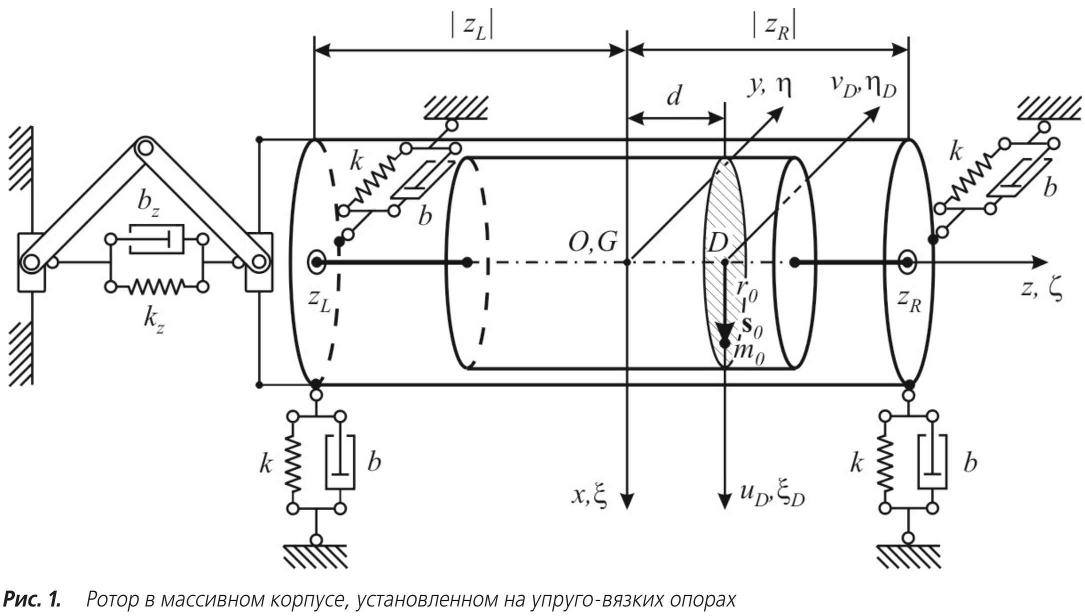

Рис. 1. *Ротор в массивном корпусе, установленном на упруго-вязких опорах*

Fig. 1. *Rotor in massive bed fixed on visco-elastic columns*

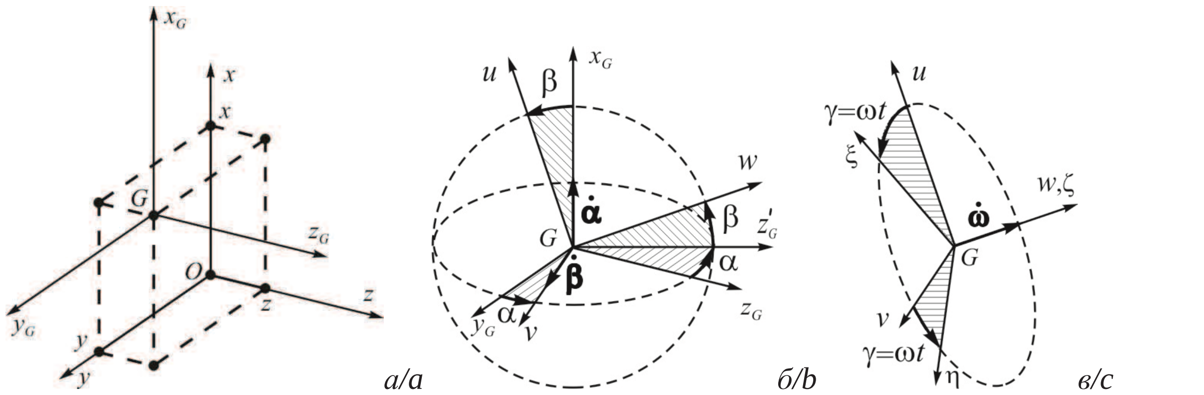

Рис. 2. *Кинематика движения ротора и корпуса*

Fig. 2. *Kinematics of rotor and bed motion*

радиусов их беговых дорожек; при нахождении на одной дорожке КГ не мешают движению друг друга.

Положение массы дисбаланса или i-го КГ ($i=\overline{0,n}$) в плоскости $\zeta=d$ будем определять абсолютными углами φ_i, отсчитываемыми между осью Ou_D и относительными радиус-векторами $\mathbf{r}_i$ массы дисбаланса или центров масс КГ (рис. 3, *а*), или относительными углами ψ_i, отсчитываемыми между осью $O\xi_D$ и относительными радиус-векторами $\mathbf{r}_i$ (рис. 3, *б*). Связи между абсолютными и относительными углами имеют вид $\varphi_i=\omega t+\psi_i$, $/i=\overline{0,n}/$.

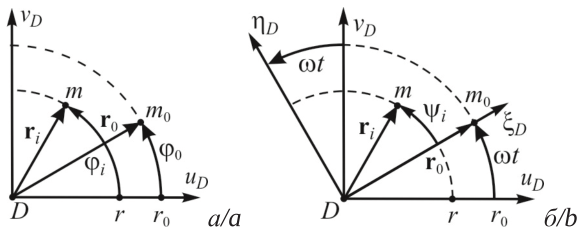

Рис. 3. *Кинематика движения КГ и массы дисбаланса: а) абсолютные; б) относительные углы*

Fig. 3. *Kinematics of corrective weights and mass imbalance: a) absolute; b) relative angles*

Относительному движению i-го шара или ролика ($i=\overline{0,n}$) препятствует ньютоновская сила вязкого сопротивления, модуль которой равен $F_i^{(vis)}=b_r u_i$, где b_r – коэффициент сил вязкого сопротивления; $u_i=r|\dot{\varphi}_i-\omega|=r|\dot{\psi}_i|$ – модуль относительной скорости КГ (скорости центра масс КГ относительно ротора); точка над величиной обозначает производную по времени. При повороте i-го маятника ($i=\overline{0,n}$) вокруг оси ротора на него действует момент сил вязкого сопротивления $M_i^{(vis)}=rb_r u_i$, где b_r – коэффициент момента сил вязкого сопротивления, приведенный к плечу r.

Составление упрощенных дифференциальных уравнений движения роторной машины в неподвижной системе координат

При составлении дифференциальных уравнений движения роторной машины используются уравнения Лагранжа II рода вида

$$d(\partial \mathrm{T} / \partial \dot{\boldsymbol{q}}) / dt - \partial \mathrm{T} / \partial \boldsymbol{q} = -\partial \Pi / \partial \boldsymbol{q} - \partial \Phi / \partial \dot{\boldsymbol{q}},$$

$$\boldsymbol{q} = (x, y, z, \alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_n)^{\mathrm{T}}, \tag{1}$$

где Т и П – соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы; Ф – диссипативная функция Релея; $\boldsymbol{q}$ – вектор обобщенных координат, определяющих движение машины. Упрощающие предположения касаются отношений малости величин [20]:

$$|x|,|y|,|z|,|\alpha|,|\beta| \ll 1;\ |\dot{x}|,|\dot{y}|,|\dot{z}|,|\dot{\alpha}|,|\dot{\beta}| \ll 1;$$

$$mn \ll m_r,\ m_c \sim m_r.$$

С использованием уравнений (1) получаем систему $5+n$ обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка относительно обобщенных координат:

$$M\ddot{z} + b_z \dot{z} + k_z z = 0, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} M\ddot{x} + b_x \dot{x} + k_x x + b_{x\beta}\dot{\beta} + k_{x\beta}\beta + \ddot{s}_u = 0, \\ M\ddot{y} + b_x \dot{y} + k_x y - b_{x\beta}\dot{\alpha} - k_{x\beta}\alpha + \ddot{s}_v = 0, \\ A\ddot{\beta} + b_\beta \dot{\beta} + k_\beta \beta - C_r \omega \dot{\alpha} + b_{x\beta}\dot{x} + k_{x\beta}x + d\ddot{s}_u = 0, \\ -A\ddot{\alpha} - b_\beta \dot{\alpha} - k_\beta \alpha - C_r \omega \dot{\beta} + b_{x\beta}\dot{y} + k_{x\beta}y + d\ddot{s}_v = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

$$m\kappa\ddot{\varphi}_i r + b_r r(\dot{\varphi}_i - \omega) = m(a_{Du}\sin\varphi_i - a_{Dv}\cos\varphi_i),$$

$$/i = \overline{1,n}/, \tag{4}$$

где $s_u = m_0 r_0 + \sum_{i=1}^{n} m_i r_i \cos\varphi_i$, $s_v = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i \sin\varphi_i$ – соответственно проекции суммарного дисбаланса точечной массы и КГ на оси Ou, Ov; $a_{Du}=\ddot{x}+d\ddot{\beta}$, $a_{Dv}=\ddot{y}+d\ddot{\alpha}$; $M=m_c+m_r$, $A=A_c+A_r$, $k_x=2k$, $k_\beta=k(z_L^2+z_R^2)$, $k_{x\beta}=k(z_L+z_R)$, $b_x=2b$, $b_\beta=b(z_L^2+z_R^2)$, $b_{x\beta}=b(z_L+z_R)$, $\kappa=1+\kappa^{(rot)}$; $\kappa^{(rot)}=2/5$ – для шаров, $\kappa^{(rot)}=1/2$ – для цилиндрических роликов, $\kappa^{(rot)}=0$ – для маятников.

Из равенств (2)–(4) видно, что корпус, совершающий только часть движений ротора, «прибавляет» к соответствующим массо-инерционным характеристикам свои характеристики. При этом условно образуется составной ротор – более массивный и длинный, и именно его характеристики влияют на динамику системы. Поэтому даже короткий ротор в массивном корпусе может вести себя как длинный.

Система (2)–(4) распадается на две независимые подсистемы – уравнение (2) описывает затухающее движение машины вдоль оси z, остальные уравнения описывают процесс автобалансировки. В дальнейшем будем рассматривать только уравнения (3), (4).

Основные движения роторной системы и дифференциальные уравнения для исследования их устойчивости

На основных движениях ротор уравновешен и вращается вокруг собственной продольной оси, поэтому обобщенные координаты ротора x, y, α, β и проекции суммарного дисбаланса s_u, s_v равны нулю:

$$x = y = \alpha = \beta = s_u = s_v = 0. \qquad (5)$$

Устойчивость основных движений будем исследовать по этим обобщенным координатам. Система уравнений (3) незамкнута. Замыкаем ее минимальным количеством уравнений, являющихся комбинациями дифференциальных уравнений движения КГ (4).

Умножим каждое уравнение в (4) поочередно на $\sin\varphi_i$ и сложим, затем – на $\cos\varphi_i$ и сложим. Полученные уравнения в окрестности определенного установившегося движения линеаризуются и принимают вид

$$\kappa(\ddot{s}_u + 2\omega\dot{s}_v - \omega^2 s_u) + b_r(\dot{s}_u + \omega s_v)/m =$$
$$= -mnd\begin{bmatrix} a_{Dv}(p_1\sin 2\omega t + p_2\cos 2\omega t) + \\ + a_{Du}(1 - p_1\cos 2\omega t + p_2\sin 2\omega t) \end{bmatrix}/2,$$
$$\kappa(\ddot{s}_v - 2\omega\dot{s}_u - \omega^2 s_v) + b_r(\dot{s}_v - \omega s_u)/m =$$
$$= mnd\begin{bmatrix} a_{Dv}(1 + p_1\cos 2\omega t - b_2\sin 2\omega t) + \\ + a_{Du}(p_1\sin 2\omega t + p_2\cos 2\omega t) \end{bmatrix}/2, \qquad (6)$$

где $p_1 = (\sum_{i=1}^{n}\cos 2\tilde{\psi}_i)/n$, $p_2 = (\sum_{i=1}^{n}\sin 2\tilde{\psi}_i)/n$; $\tilde{\psi}_i$, $/i=1,n/$ – угловое положение i-го КГ в установившемся движении.

Введем угол ϑ и параметр p: $\cos\vartheta = p_1/p$, $\sin\vartheta = p_2/p$, $p=\sqrt{p_1^2+p_2^2}$. Сдвинем время: $2\omega t+\vartheta=2\omega\tau$ или $t=\tau-\vartheta/(2\omega)$. Тогда уравнения (6) запишутся в виде

$$\kappa(\ddot{s}_u + 2\omega\dot{s}_v - \omega^2 s_u) + b_r/m\cdot(\dot{s}_u + \omega s_v) =$$
$$= -mnd/2\cdot[a_{Du}(1 - p\cos 2\omega\tau) - a_{Dv}\,p\sin 2\omega\tau],$$
$$\kappa(\ddot{s}_v - 2\omega\dot{s}_u - \omega^2 s_v) + b_r/m\cdot(\dot{s}_v - \omega s_u) =$$
$$= mnd/2\cdot[a_{Du}\,p\sin 2\omega\tau - a_{Dv}(1 + p\cos 2\omega\tau)]. \qquad (7)$$

Уравнения (3) не изменятся при переходе к новому времени, поэтому уравнения (7) замыкают их относительно неизвестных функций x, y, α, β, s_v, s_u.

Уравнения (3), (7) – это система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с периодическими коэффициентами. В нее входят 16 параметров M, A, C_r, k_x, k_β, b_β, $k_{x\beta}$, $b_{x\beta}$, b_x, ω, d, m, n, κ, b_r, p.

Псевдо сворачивание, переход к подвижной системе координат и обезразмеривание системы дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения для исследования устойчивости основных движений в комплексном виде. В комплексных переменных X_z, B_z, S_{zu}:

$$X_z = x + \boldsymbol{i}y,\ B_z = \beta - \boldsymbol{i}\alpha,\ S_{zu} = s_u + \boldsymbol{i}s_v$$

уравнения (3), (7) примут вид

$$L_1 = M\ddot{X}_z + b_x\dot{X}_z + k_x X_z + b_{x\beta}\dot{B}_z + k_{x\beta}B_z + \ddot{S}_{zu} = 0,$$
$$\bar{L}_1 = 0,$$
$$L_2 = A\ddot{B}_z + b_\beta\dot{B}_z + k_\beta B_z - \boldsymbol{i}\omega C_r\dot{B}_z +$$
$$+ b_{x\beta}\dot{X}_z + k_{x\beta}X_z + d\ddot{S}_{zu} = 0,\ \bar{L}_2 = 0,$$
$$L_3 = \kappa\bar{D}_t^2 S_{zu} + b_r/m\cdot\bar{D}_t S_{zu} +$$
$$+ mnd/2\cdot[\ddot{X}_z + d\ddot{B}_z - (\ddot{\bar{X}}_z + d\ddot{\bar{B}}_z)pe^{2\omega\tau\boldsymbol{i}}] = 0,$$
$$\bar{L}_3 = 0, \qquad (8)$$

где $D_t\bullet = \dot{\bullet} + \boldsymbol{i}\omega\bullet$ – оператор.

Приведение уравнений к автономному виду. В новых комплексных переменных $\Xi_z = X_z e^{i\omega\tau}$, $\Theta_z = B_z e^{i\omega\tau}$, $S_z = S_{zu}e^{i\omega\tau}$ система (8) приводится к автономному виду

$$L_1 = MD_t^2\Xi_z + b_x D_t\Xi_z + k_x\Xi_z + b_{x\beta}D_t\Theta_z +$$
$$+ k_{x\beta}\Theta_z + D_t^2 S_z = 0,\ \bar{L}_1 = 0,$$
$$L_2 = AD_t^2\Theta_z + b_\beta D_t\Theta_z + k_\beta\Theta_z - \boldsymbol{i}\omega C_r D_t\Theta_z +$$
$$+ b_{x\beta}D_t\Xi_z + k_{x\beta}\Xi_z + dD_t^2 S_z = 0,\ \bar{L}_2 = 0,$$
$$L_3 = \kappa\ddot{S}_z + b_r/m\cdot\dot{S}_z +$$
$$+ mnd/2\cdot\begin{bmatrix} D_t^2\Xi_z + dD_t^2\Theta_z - \\ -p(\bar{D}_t^2\Xi_z + d\bar{D}_t^2\Theta_z) \end{bmatrix} = 0,\ \bar{L}_3 = 0. \qquad (9)$$

Уравнения в безразмерном виде. При стандартном обезразмеривании уравнения (9) примут вид

$$L_1 = D^2\xi_z + \tilde{b}_x D\xi_z + \xi_z +$$
$$+ \tilde{k}_{x\beta}(\tilde{b}_x D\theta_z + \theta_z) + D^2 s_z = 0,\ \bar{L}_1 = 0,$$
$$L_2 = D^2\theta_z + (\tilde{k}_\beta\tilde{b}_x - \boldsymbol{i}\tilde{\omega}\tilde{C})D\theta_z + \tilde{k}_\beta\theta_z +$$
$$+ \tilde{k}_{x\beta}(\tilde{b}_x D\xi_z + \xi_z) + \tilde{d}D^2 s_z = 0,\ \bar{L}_2 = 0, \qquad (10)$$

$$L_3 = \tilde{s}_z'' + \tilde{b}s_z' + \tilde{m}\begin{bmatrix} D^2(\xi_z + \tilde{d}\theta_z) - \\ -p\bar{D}^2(\bar{\xi}_z + \tilde{d}\bar{\theta}_z) \end{bmatrix} = 0,$$
$$\bar{L}_3 = 0, \qquad (11)$$

где $\xi_z = \Xi_z M/(mr)$, $\theta_z = \Theta_z\sqrt{AM}/(mr)$, $s_z = S_z/(mr)$ – безразмерные комплексные обобщенные координаты; штрих обозначает производную по безразмерному времени $\tilde{\tau} = \omega_0 t$; $D(\bullet) = (\bullet)' + \boldsymbol{i}\tilde{\omega}(\bullet)$ – оператор, $\tilde{k}_x = b_x\omega_0/k_x$, $\omega_0 = \sqrt{k_x/M}$, $\tilde{k}_{x\beta} = k_{x\beta}/(\omega_0^2\sqrt{AM})$, $\tilde{d} = d/\sqrt{AM}$, $\tilde{k}_\beta = k_\beta/(A\omega_0^2)$, $\tilde{C} = C_r/A$, $\tilde{\omega} = \omega/\omega_0$, $\tilde{k}_{x\beta} = b_r/(m\kappa\omega_0)$, $m\tilde{\ } = mn/(2\kappa M) << 1$.

Из (5) и способа введения новых обобщенных координат следует, что на основных движениях

$$\xi_z = \bar{\xi}_z = 0,\ \theta_z = \bar{\theta}_z = 0,\ s_z = \bar{s}_z = 0.$$

Уравнения (10), (11) линейны и стационарны, поэтому устойчивость основных движений роторной системы можно исследовать по обобщенным комплексным координатам ξ_z, $\bar{\xi}_z$, θ_z, $\bar{\theta}_z$, s_z, $\bar{s}_z$ с применением теории устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Заметим, что в уравнения входят девять независимых безразмерных параметров $\tilde{d}$, $\tilde{C}$, $\tilde{m}$, $\tilde{\omega}$, $\tilde{k}_\beta$, $\tilde{k}_{x\beta}$, $\tilde{b}_x$, $\tilde{b}$, p.

Оценка величин безразмерных параметров $\tilde{\omega}, \tilde{d}, \tilde{C}, \tilde{m}, \tilde{k}_x, \tilde{k}_{x\beta}, \tilde{b}_x, \tilde{b}, p$

Параметр $\tilde{\omega}$ соответствует угловой скорости вращения ротора и теоретически может меняться в пределах от 0 до $+\infty$. Нужно определить такие области изменения $\tilde{\omega}$, в пределах которых будут устойчивыми основные движения.

Для реальных роторных машин масса КГ намного меньше массы ротора с корпусом, поэтому $\tilde{m} \ll 1$. Параметр $\tilde{d}$ равен отношению расстояния от центра масс составного ротора до плоскости дисбаланса к радиусу инерции составного ротора относительно его поперечной центральной оси, поэтому $\tilde{d} \geq 0$.

Параметр $\tilde{k}_\beta$ характеризует жесткость опор. Для реальных роторных машин он эквивалентен 1. Параметр $\tilde{k}_{x\beta}$ характеризует расположение опор относительно центра масс системы и может изменяться в пределах от -1 до 1. При почти симметричных опорах он эквивалентен 0.

Параметры $\tilde{b}_x$, $\tilde{b}$, соответственно, характеризуют силы вязкого сопротивления в опорах и силы сопротивления относительному движению КГ. Для реальных роторных машин $\tilde{m} \ll \tilde{b}_x \ll 1$, $\tilde{b} \sim 1$.

Параметры p и $\tilde{C}$ подробно описаны в [21]: p зависит от расположения КГ в АБ и принимает значения в пределах от 0 до 1; $\tilde{C}$ характеризует вид составного ротора (при $\tilde{C}<1$ ротор длинный, при $\tilde{C}\approx 1$ – сферический, при $\tilde{C}>1$ – короткий). Будем считать, что $\tilde{C} \sim 1$.

Окончательно имеем такие оценки величин безразмерных параметров:

$$\tilde{\omega} \in (0,+\infty),\ \tilde{m} \ll 1,\ \tilde{d} \geq 0,\ \tilde{C}, \tilde{k}_\beta, \tilde{b} \sim 1,\ p \in [0,1],$$

$$\tilde{m} \ll \tilde{b}_x \ll 1,\ \tilde{k}_{x\beta} \in [-1;1]\ (\tilde{k}_{x\beta} \sim 0).$$

Исследование устойчивости основных движений и характера переходных процессов

Характеристическое уравнение системы (10), (11) имеет вид

$$\lambda^2(\lambda+\tilde{b})^2 X\bar{X} - \lambda(\lambda+\tilde{b})(X\bar{Y}+\bar{X}Y)\cdot\tilde{m} + +(1-p^2)Y\bar{Y}\cdot\tilde{m}^2 = 0, \tag{12}$$

где

$$X = (\Lambda^2 - 1 + \boldsymbol{i}\tilde{b}_x\Lambda)\Lambda_1 - [\tilde{d}\Lambda^2 - (\tilde{d}-\tilde{k}_{x\beta})(1-\boldsymbol{i}\tilde{b}_x\Lambda)]^2,$$

$$Y = \Lambda^4\Lambda_1,\ \ \Lambda = -\tilde{\omega} + \boldsymbol{i}\lambda,$$

$$\Lambda_1 = \Lambda^2(1+\tilde{d}^2) + \Lambda\tilde{C}\tilde{\omega} - a_1 + a_1\boldsymbol{i}\tilde{b}_x\Lambda,$$

$$a_1 = \tilde{d}^2 - 2\tilde{d}\tilde{k}_{x\beta} + \tilde{k}_\beta.$$

Заметим, что мнимые части корней характеристического уравнения определяют частоту колебаний в переходных процессах, а их продолжительность зависит от величин отрицательных действительных частей этих корней – чем они меньше, тем меньше продолжительность.

Разложение корней уравнения (12) по степеням малых параметров $0<\tilde{m}\ll\tilde{k}_x\ll 1$ имеет вид

$$\lambda_{1,2} = -\frac{[(1-\tilde{C}+\tilde{d}^2)\tilde{\omega}^2 - \tilde{d}^2 - \tilde{k}_\beta + 2\tilde{d}\tilde{k}_{x\beta}]\tilde{\omega}^4}{(\tilde{\omega}^2-1)[\tilde{\omega}^2(1-\tilde{C})-\tilde{k}_\beta] - \tilde{k}_{x\beta}^2} \times$$

$$\times\frac{1\pm p}{\tilde{b}}\tilde{m} + O(\tilde{m}^2),\quad \lambda_{3,4} = -\tilde{b} + O(\tilde{m}),$$

$$\lambda_{\overline{5,8}} = -\boldsymbol{i}(\tilde{\omega} + \Lambda^{(0)}_{\overline{5,8}}) -$$

$$-\tilde{b}_x \left| \frac{\begin{bmatrix} (1+\tilde{k}_\beta)(\Lambda^{(0)}_{\overline{5,8}})^2 + \\ +\tilde{\omega}\tilde{C}\Lambda^{(0)}_{\overline{5,8}} - 2(\tilde{k}_\beta - \tilde{k}_{x\beta}^2) \end{bmatrix}\Lambda^{(0)}_{\overline{5,8}}}{\begin{pmatrix} 2\Lambda^{(0)}_{\overline{5,8}}[(\Lambda^{(0)}_{\overline{5,8}})^2 - \Lambda^{(0)}_{\overline{5,8}}\tilde{C}\tilde{\omega} - \tilde{k}_\beta] + \\ +[(\Lambda^{(0)}_{\overline{5,8}})^2 - 1](2\Lambda^{(0)}_{\overline{5,8}} - \tilde{C}\tilde{\omega}) \end{pmatrix}} \right| +$$

$$+O(\tilde{b}_x^2),\ \ \lambda_{\overline{9,12}} = \bar{\lambda}_{\overline{5,8}}, \tag{13}$$

где $\Lambda^{(0)}_{\overline{5,8}} \in R$ – корни уравнения

$$(\Lambda^2-1)(\Lambda^2+\tilde{\omega}\tilde{C}\Lambda-\tilde{k}_\beta) - \tilde{k}_{x\beta}^2 = 0. \tag{14}$$

В случае симметричного расположения опор ($\tilde{k}_{x\beta}\sim 0$) корни уравнения (14) находятся аналитически. При этом корни (13) принимают вид:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{(1-\tilde{C}+\tilde{d}^2)\tilde{\omega}^2 - \tilde{d}^2 - \tilde{k}_\beta}{(\tilde{\omega}^2-1)[\tilde{\omega}^2(1-\tilde{C})-\tilde{k}_\beta]}\tilde{\omega}^4\cdot\frac{1\pm p}{\tilde{b}}\tilde{m} + O(\tilde{m}^2),$$

$$\lambda_{3,4} = -\tilde{b} + O(\tilde{m}),$$

$$\lambda_{5,6} = -\boldsymbol{i}(\tilde{\omega}\mp 1) - \frac{1-\tilde{k}_\beta \mp \tilde{\omega}\tilde{C}}{2(1-\tilde{k}_\beta \pm \tilde{\omega}\tilde{C})}\tilde{b}_x + O(\tilde{b}_x^2),$$

$$\lambda_{7,8} = -\boldsymbol{i}(\tilde{\omega}\tilde{C} \mp \sqrt{\tilde{\omega}^2\tilde{C}^2 + 4\tilde{k}_\beta})/2 -$$

$$-\frac{(1+\tilde{k}_\beta)\tilde{k}_\beta}{\tilde{C}\tilde{\omega}(4\tilde{\omega}\tilde{C} \pm 3\sqrt{\tilde{\omega}^2\tilde{C}^2+4\tilde{k}_\beta})}\tilde{b}_x + O(\tilde{b}_x^2),\ \ \lambda_{\overline{9,12}} = \bar{\lambda}_{\overline{5,8}}.$$

Эти же корни в размерном виде

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\omega^4}{2}\sqrt{\frac{M}{k_x}}\frac{(A-C_r+Md^2)\omega^2 - k_\beta - d^2k_x}{(\omega^2M-k_x)[\omega^2(A-C_r)-k_\beta]} \times$$

$$\times\frac{1\pm p}{b_r}m^2n + O\left(\frac{m^2n^2}{M^2}\right),$$

$$\lambda_{3,4} = -\frac{b_r}{\kappa m}\sqrt{\frac{M}{k_x}} + O\left(\frac{mn}{M}\right),$$

$$\lambda_{5,6} = -\boldsymbol{i}\left(\omega\sqrt{\frac{M}{k_x}} \mp 1\right) +$$

$$+\frac{b_x}{2\sqrt{Mk_x}}\frac{\omega \mp (Ak_x - Mk_\beta)/(\sqrt{Mk_x}C_r)}{\omega \pm (Ak_x - Mk_\beta)/(\sqrt{Mk_x}C_r)} + O\left(\frac{b_x^2}{k_xM}\right),$$

$$\lambda_{7,8} = -\boldsymbol{i}\frac{C_r}{2A}\sqrt{\frac{M}{k_x}}(\omega \mp \sqrt{\omega^2 + 4k_\beta A/C_r^2}) -$$
$$-\frac{(k_x A/C_r^2 + k_\beta M/C_r^2)k_\beta / k_x}{\omega(4\omega \pm 3\sqrt{\omega^2 + 4k_\beta A/C_r^2})}\frac{b_x}{\sqrt{Mk_x}} + O\left(\frac{b_x^2}{k_x M}\right),$$
$$\lambda_{\overline{9,12}} = \bar{\lambda}_{\overline{5,8}}.$$

Анализ устойчивости.

Корни $\lambda_{\overline{3,12}}$ имеют отрицательную действительную часть, а следовательно, соответствующие им частные решения асимптотически устойчивы при любых . Эти корни определяют быстрые переходные процессы, при которых практически прекращаются движения КГ относительно ротора и устанавливается движение ротора, соответствующее суммарному дисбалансу КГ и дисбаланса ротора. Скорость протекания быстрых переходных процессов зависит от параметров закрепления корпуса, массо-инерционных характеристик составного ротора, его скорости вращения, положения плоскости балансировки, сил вязкого сопротивления, действующих на КГ, и не зависит от уравновешиваемого дисбаланса, количества и положений КГ. Поэтому возможна отдельная оптимизация этих параметров роторной машины с целью скорейшего наступления ее автобалансировки.

Корни $\lambda_{1,2}^{(1)}$ устойчивы при выполнении условия

$$\{(\tilde{\omega}^2 - 1)[\tilde{\omega}^2(1 - \tilde{C}) - \tilde{k}_\beta] - \tilde{k}_{x\beta}^2\} \times$$
$$\times[(1 - \tilde{C} + \tilde{d}^2)\tilde{\omega}^2 - \tilde{d}^2 - \tilde{k}_\beta + 2\tilde{d}\tilde{k}_{x\beta}] > 0. \quad (15)$$

В размерном виде условие (15) имеет вид

$$\{(M\omega^2 - k_x)[\omega^2(A - C_r) - k_\beta] - k_{x\beta}^2\} \times$$
$$\times[(A - C_r + Md^2)\omega^2 - d^2 k_x - k_\beta + 2dk_{x\beta}] > 0. \quad (16)$$

Условие (16), с точностью до обозначений, получено и исследовано в роботе [5] при помощи эмпирического критерия наступления автобалансировки, и в роботе [14] – при помощи энергетического метода, основанного на применении функции Гамильтона. Условие (16) получено для многошарового, многомаятникового или многороликового АБ и ротора, заключенного в упруго-вязко закрепленный корпус, а условия в работах [5, 14] получены для любого типа АБ и ротора на упругих опорах.

Корни $\lambda_{1,2}^{(1)}$ соответствуют медленным переходным процессам – реакции КГ на движение ротора, установившееся после затухания быстрых переходных процессов. КГ медленно стремятся к автобалансировочному положению. При чрезмерном количестве КГ существует семья установившихся движений и КГ стремятся к одному из движений этой семьи. Скорость протекания медленных переходных процессов зависит уже и от уравновешиваемого дисбаланса, количества КГ и их текущих положений, но не зависит от сил сопротивления опор.

Полученные разложения корней позволяют оптимизировать параметры роторной машины из условия наименьшего времени наступления автобалансировки.

Результаты работ [5,14] позволяют сделать следующие заключения об условиях наступления автобалансировки.

а) Для длинного составного ротора ($C_r<A$):

- если $k_{x\beta}\neq 0$ или $k_{x\beta}=0$, $\omega_{сч1}=\sqrt{k_x/M}\neq\omega_{сч2}=\sqrt{k_\beta/(A-C_r)}$ и $d\neq 0$, то машина имеет три разные резонансные частоты

$$\omega_{1,3} = \sqrt{\left\{\omega_{сч1}^2 + \omega_{сч2}^2 \pm \sqrt{\begin{matrix}(\omega_{сч1}^2 - \omega_{сч2}^2)^2 + \\ +4k_{x\beta}^2 / [M(A - C_r)]\end{matrix}}\right\} / 2},$$
$$\omega_2 = \sqrt{k_x d^2 - 2k_{x\beta}d + k_\beta} / \sqrt{A - C_r + Md^2},$$

  причем $\omega_1<\omega_2<\omega_3$ и автобалансировка наступает при $\omega\in(\omega_1,\omega_2)\cup(\omega_3,\infty)$;
- если $k_{x\beta}=0$, $\omega_{сч1}\neq\omega_{сч2}$ и $d=0$, то резонансная частота ω_2 совпадает с ω_1 при $\omega_{сч1}>\omega_{сч2}$ или с ω_3 при $\omega_{сч1}<\omega_{сч2}$ и автобалансировка, соответственно, наступает на скоростях $\omega\in(\omega_1,\infty)$ или $\omega\in(\omega_3,\infty)$;
- если $k_{x\beta}=0$ и $\omega_{сч1}=\omega_{сч2}$, то все три резонансные частоты совпадают – $\omega_{1,2,3}=\omega_{сч1}$ и автобалансировка наступает на скоростях $\omega\in(\omega_1,\infty)$.

Для обеспечения наступления автобалансировки на как можно меньших скоростях вращения ротора нужно уменьшать жесткость закрепления корпуса (k_x,k_β).

б) Для сферического составного ротора ($C_r=A$):

- если $k_\beta\neq k_{x\beta}d$, то машина имеет две разные резонансные скорости

$$\omega_1 = \sqrt{(k_x - k_{x\beta}^2 / k_\beta) / M},$$
$$\omega_2 = \sqrt{(k_x d^2 - 2k_{x\beta}d + k_\beta) / (Md^2)},$$

  причем $\omega_1<\omega_2$ и автобалансировка наступает на скоростях $\omega\in(\omega_1,\omega_2)$ (если $d\to 0$, то $\omega_2\to+\infty$). При этом сферический ротор целесообразно уравновешивать в плоскости, проходящей через центр масс ротора и корпуса.
- если $k_\beta=k_{x\beta}d$, то резонансные скорости одинаковы ($\omega_1=\omega_2$) и область автобалансировки вырождается в точку.

в) Для короткого составного ротора ($C_r>A$):

- если $d^2>(C_r-A)/M$, то у машины существует единственная резонансная частота

$$\omega_1 = \sqrt{\left\{\begin{matrix}\omega_{сч1}^2 - k_\beta / (C_r - A) + \\ + \sqrt{\begin{matrix}[\omega_{вч1}^2 + k_\beta / (C_r - A)]^2 - \\ -4k_{x\beta}^2 / [M(C_r - A)]\end{matrix}}\end{matrix}\right\} / 2}$$

  и автобалансирвка наступает на скоростях $\omega\in(\omega_1,\infty)$;
- если $d^2\leq(C_r-A)/M$, то у машины появляется дополнительная резонансная частота

$$\omega_2 = \sqrt{(k_x d^2 - 2k_{x\beta}d + k_\beta) / (Md^2 - C_r + A)}, \quad \omega_2 > \omega_1$$

  и автобалансировка наступает на скоростях $\omega\in(\omega_1,\omega_2)$.

Для обеспечения наступления автобалансировки на как можно меньших скоростях вращения ротора нужно уменьшать k_x и увеличивать k_β, $k_{x\beta}$.

Выводы

1. Корпус и ротор ведут себя как условный составной ротор – более массивный и удлиненный, чем сам ротор, и характеристики этого составного ротора влияют на процесс автобалансировки.
2. Если составной ротор длинный, то у машины существуют три резонансные скорости вращения ротора и автобалансировка наступает между первой и второй и над третьей скоростью. Если составной ротор сферический или короткий, то у машины существует одна или две резонансные скорости вращения ротора. При этом в случае двух резонансных скоростей автобалансировка наступает между этими скоростями, а в случае одной резонансной скорости автобалансировка наступает над этой скоростью для короткого составного ротора, и никогда не наступает для сферического составного ротора.
3. Переходные процессы, характеризующие наступление автобалансировки, делятся на: быстрые, при которых прекращаются быстрые движения КГ относительно ротора и устанавливается устойчивое движение ротора, соответствующее текущему суммарному дисбалансу; медленные, при которых КГ приходят в автобалансировочное положение, медленно двигаясь относительно ротора.
4. Скорость протекания быстрых переходных процессов зависит от параметров закрепления корпуса, массо-инерционных характеристик составного ротора, скорости вращения ротора, положения плоскости балансировки, сил вязкого сопротивления, действующих на КГ, и не зависит от уравновешиваемого дисбаланса, количества и положений КГ.
5. Скорость протекания медленных переходных процессов дополнительно зависит от уравновешиваемого дисбаланса, количества и положений КГ, но не зависит от сил сопротивления опор.

Работа выполнена в соответствии с госбюджетной темой Министерства образования и науки Украины № 0105U001506, период выполнения 2012–2014 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thearle E.L. Automatic dynamic balancers. P. 1. Leblanc balancers // Machine Design. – 1950. – V. 22. – № 9. – P. 119–124.
2. Thearle E.L. Automatic dynamic balancers. P. 2. Ring, pendulum and ball balancers // Machine Design. – 1950. – V. 22. – № 10. – P. 103–106.
3. Ларри Дж. Автоматическое балансирование вращающихся масс // Сб. переводов и обзоров периодической иностранной литературы. – 1955. – Т. 23. – № 5. – С. 14–19.
4. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия. – М.: Наука, 2002. –119 с.
5. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.
6. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. – 84 с.
7. Нестеренко В.П. Теория и практика устройств автоматической балансировки роторов: автореф дис. ... д-ра техн. наук. – Новосибирск, 1990. – 34 с.
8. Sperling L., Merten F., Duckstein H. Self-synchronization and automatic balancing in rotor dynamics // Int. J. Rotating Machinery. – 2000. – V. 6. – № 4. – P. 275–285.
9. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Two-plain automatic balancing // Machine Dynamics Problems. – 2001. – V. 25. – № 3/4. – P. 139–152.
10. Ryzhik B., Sperling L., Duckstein H. Display of the Sommerfeld-Effect in a Rigid Rotor One-plain Autobalancing Device // Advanced Problems in Mechanics: Proc. of XXX Summer School. – St. Peterburg, 2002. – P. 554–563.
11. Simulation of two-plain automatic balancing of a rigid rotor / L. Sperling, B. Ryzhik, Ch. Linz, H. Duckstein // Mathematics and Computers in Simulation. – 2002. – V. 58. – № 4–6, – P. 351–365.
12. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Single-Plain Auto-Balancing of Rigid Rotors // Technische Mechanik. – 2004. – V. 24. – № 1. – P. 1–24.
13. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Single-Plain Auto-Balancing of Anisotropically Supported Rigid Rotors // Technische Mechanik. – 2004. – V. 24. – № 1. – P. 37–50.
14. Філімоніхіна І.І. Застосування функції Гамільтона до визначення умов зрівноваження автобалансирами ротора, здійснюючого просторовий рух // Збірник наукових праць КНТУ. – 2007. – Вип. № 18. – С. 34–41.
15. Automatic two-plane balancing for rigid rotors / D.J. Rodrigues, A.R. Champneys, M.I. Friswell, R.E. Wilson // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2008. – V. 43. – Iss. 6. – P. 527–541.
16. Lu Chung-Jen, Wang Ming-Cheng, Huang Shih-Hsuan. Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2009. – V. 23. – Iss. 3. – P. 884–896.
17. Bolton J.N. Single- and dual-plane automatic balancing of an elasticallymounted cylindrical rotor with considerations of coulomb friction and gravity: *Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in Engineering Mechanics*. – Blacksburg, Virginia, 2010. – 317 p.
18. Two-plane automatic balancing: A symmetry breaking analysis / D.J. Rodrigues, A.R. Champneys, M.I. Friswell, R.E. Wilson // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2011. – V. 46. – Iss. 9. – P. 1139–1154.
19. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. – М.: Наука, 1971. – 896 с.
20. Філімоніхін Г.Б., Гончаров В.В. Методика складання диференціальних рівнянь руху роторних систем з автобалансирами і її застосування до системи ротор – масивний корпус – автобалансир // Збірник наукових праць КНТУ. – 2009. – Вип. 22. – С. 357–363.
21. Филимонихин Г.Б., Гончаров В.В. Уравновешивание автобалансиром ротора в упруго-вязко закрепленном корпусе с неподвижной точкой // Известия Томского политехнического университета. – 2014. – Т. 324. – № 2. – С. 71–77.

Поступила 21.05.2014 г.

UDC 62-752+62-755

ROTOR BALANCING by AUTO-BALANCER IN VISCO-ELASTIC FIXED BED BEING IN SPATIAL MOTION

Gennadiy B. Filimonikhin,
Dr. Sc., Kirovograd National Technical University, 8, University Avenue, Kirovograd, 25006, Ukraine. E-mail: filimonikhin@yandex.ua

Valery V. Goncharov,
Cand. Sc., Kirovograd National Technical University, 8, University Avenue, Kirovograd, 25006, Ukraine. E-mail: matkora@yandex.ru.

The relevance of the study is caused by the need to research rotor balancing by auto-balancers.
The main aim of the study *is to evaluate the transients during static balancing rotor with many corrective weights by auto-balancer. The rotor is placed in heavy visco-elastic fixed bed being in spatial motion; the rotor can spin there.*
The methods used in the study: *theory of stability of mechanical system steady motions; mathematical theory of motion stability by Lyapunov.*
The results: *the authors have determined the conditions of auto-balance occurring and have found out that:*

- *bed and rotor form conventionally the composite rotor, more massive and long; its characteristics influence auto-balancing;*
- *transients that characterize auto-balancing are divided into: fast – when corrective weights motion relative to rotor stop and rotor motion corresponding to the total imbalance of corrective weights and rotor imbalance is set; slow – when corrective weights come in auto-balancing position moving relative to rotor;*
- *flow rate of the fast transients depends on bed fixing parameters, inertia characteristics of the composite rotor, rotation speed, balancing plane position, viscous resistance forces influencing the corrective weights; it does not depend on rotor imbalance, quantity and positions of corrective weights;*
- *flow rate of slow transients depends additionally on rotor imbalance, number and positions of corrective weights, but it does not depend on resistance forces of supports.*

Key words:
Rotor, imbalance, auto-balancer, main motion, stability of motion.

It is the taxpayer-funded research of the Ministry of Education and Science of the Ukraine № 0105U001506, 2012–2014.

REFERENCES

1. Thearle E.L. Automatic dynamic balancers. P. 1. Leblanc balancers. *Machine Design*, 1950, vol. 22, no 9, pp. 119–124.
2. Thearle E.L. Automatic dynamic balancers. P. 2. Ring, pendulum and ball balancers. *Machine Design*, 1950, vol. 22, no. 10, pp. 103–106.
3. Larri Dzh. Avtomaticheskoe balansirovanie vrashchayushchikhsya mass [Automatic balancing of rotating masses]. *Sbornik perevodov i obzorov periodicheskoy inostrannoy literatury* [Translations and reviews of periodic foreign literature]. Moscow, 1955, vol. 23, no 5, pp. 14–19.
4. Gusarov A.A. *Avtobalansiruyushchie ustroystva pryamogo deystviya* [Autobalancing direct action devices]. Moscow, Nauka Publ., 2002. 119 p.
5. Filimonikhin G.B. *Zrivnovazhennya i vibrozakhyst rotoriv avtobalansirami z tverdymi koriguvalnymi vantazhami* [Balancing and vibration protection of rotors by avtobalancers with solid corrective weights]. Kirovograd, KNTU Publ., 2004. 352 p.
6. Nesterenko V.P. *Avtomaticheskaya balansirovka rotorov priborov i mashin so mnogimi stepenyami svobody* [Automatic balancing of rotors of the devices and machines with many degrees of freedom]. Tomsk, Tomsk University Press, 1985. 84 p.
7. Nesterenko V.P. *Teoriya i praktika ustroystv avtomaticheskoy balansirovki rotorov. Avtoreferat Dokt. Dis*. [Theory and practice of devices of automatic rotors balancing. Dr. Diss. Abstract]. – Novosibirsk, 1990. – 34 p.
8. Sperling L., Merten F., Duckstein H. Self-synchronization and automatic balancing in rotor dynamics. *Int. J. Rotating Machinery*, 2000, vol. 6, no. 4, pp. 275–285.
9. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Two-plain automatic balancing. *Machine Dynamics Problems*, 2001, vol. 25, no. 3/4, pp. 139–152.
10. Ryzhik B., Sperling L., Duckstein H. Display of the Sommerfeld-Effect in a Rigid Rotor One-plain Autobalancing Device. *Proc. Of XXX Summer School «Advanced Problems in Mechanics»*. St. Peterburg, 2002. pp. 554–563.
11. Sperling L., Ryzhik B., Linz Ch., Duckstein H. Simulation of two-plain automatic balancing of a rigid rotor. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2002, vol. 58, no. 4–6, pp. 351–365.
12. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Single-Plain Auto-Balancing of Rigid Rotors. Technische Mechanik, 2004, vol. 24, no. 1, pp. 1–24.
13. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Single-Plain Auto-Balancing of Anisotropically Supported Rigid Rotors. Technische Mechanik, 2004, vol. 24, no. 1, pp. 37–50.
14. Filimonikhina I.I. Zastosuvannya funktsii Gamiltona do viznachennya umov zrivnovazhennya avtobalansiramy rotora, zdiysnyuyuchogo prostorovy rukh [Applying Hamilton function to determine the conditions of rotor balancing by avtobalancers, making spatial movement]. *Zbirnyk naukovykh prats KNTU*, 2007, Iss. 18, pp. 34–41.
15. Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Automatic two-plane balancing for rigid rotors. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2008, vol. 43, Iss. 6, pp. 527–541.
16. Lu Chung-Jen, Wang Ming-Cheng, Huang Shih-Hsuan. Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009, vol. 23, Iss. 3, pp. 884–896.

17. Bolton J.N. Single- and dual-plane automatic balancing of an elasticallymounted cylindrical rotor with considerations of coulomb friction and gravity. *Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in Engineering Mechanics*. Blacksburg, Virginia, 2010. 317 p.
18. Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Two-plane automatic balancing: A symmetry breaking analysis. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, vol. 46, Iss. 9, pp. 1139–1154.
19. Blekhman I.I. *Sinkhronizatsiya dinamicheskikh sistem* [The sync of dynamic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1971.896 p.
20. Filimonikhin G.B., Goncharov V.V. Metodika skladannya dyferentsialnykh rivnyan rukhu rotornykh sistem z avtobalansirami i i'i' zastosuvannya do sistemy rotor – masyvny korpus – avtobalansir [Methodology of compiling differential equations of rotor system motion with avtobalancers and its application to rotor systems – a massive building – avtobalancer]. *Zbirnik naukovykh prats KNTU*, 2009, Iss. 22, pp. 357–363.
21. Filimonikhin G.B., Goncharov V.V. Uravnoveshivanie avtobalansirom rotora v uprugo-vyazko zakreplennom korpuse s nepodvizhnoy tochkoy [Rotor balancing in visco-elastic fixed casing with fixed point using autobalancer]. *Bulletin of Tomsk Polytechnic University*, 2014, vol. 324, no 2, pp. 71–77.

Received: 21 May 2014.