

## Математичне моделювання процесу зношування вузла тертя типу „вал-втулка”.

В статті розроблена математична модель зношування вузла тертя ковзання в залежності від співвідношень різноманітних конструкційних матеріалів та покриттів, з вираженням зносостійкості через інтенсивність лінійного зношування в залежності від тиску в парі тертя.

**інтенсивність зношування, спряження, навантаження**

Задача прогнозування та розрахунку зносостійкості та довговічності вузла тертя ковзання є дуже актуальною. Цій проблемі присвячено ряд робіт вітчизняних учених М.М.Хрущова, В.Д.Кузнецова, І.В.Крагельського, Н.Б.Демкіна, Ф.Р.Геккера, М.Н.Добичина, Г.М.Харача, А.К.Зайцева і ін., а також зарубіжних учених Ф.П.Боудена, Д.Тейбора, Д.Арчарда, Т.Ф.Куїнна, Польцера, і ін. [1]

На даний час накопичено значний об'єм експериментальних даних по зносостійкості співвідношень різноманітних конструкційних матеріалів та композиційних покриттів в парах тертя, виражену через залежність інтенсивності лінійного зношування від тиску в спряженні [2].

Разом з тим відсутня математична модель, котра, на базі емпіричних даних, дозволила б розрахувати знос вузла тертя ковзання при різноманітних співвідношеннях матеріалів вала та втулки.

Для визначення зношування спряження „вал-втулка” пропонується розрахункова схема (рис. 1), де деталь  $N_1$  - втулка, що охоплює деталь  $N_2$  -вал.

Початковий радіус втулки -  $R_0$ , початковий радіус вала -  $r_0$ , навантаження на підшипник -  $Q$ , довжина поверхні контакту -  $L$ . Співвідношення матеріалу вала і втулки може змінюватись. Навантаження  $Q$  розподіляється вздовж вісі підшипників рівномірно, вал відносно втулки на перекошується, втулка нерухома, вал обертається відносно до навантаження.

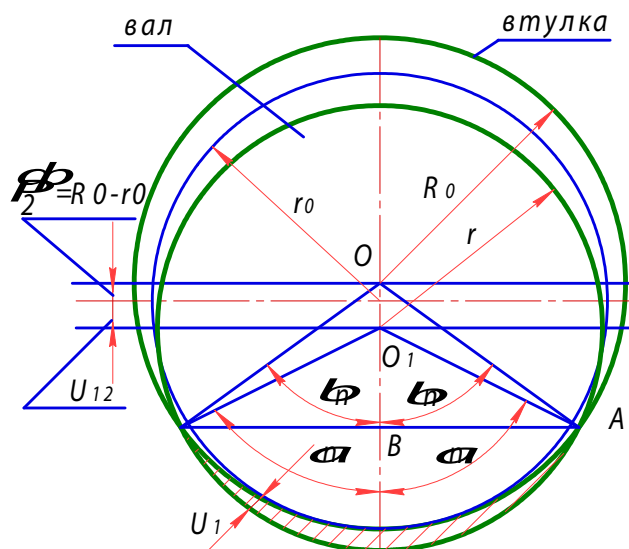


Рисунок 1 – Розрахункова схема для визначення зношування спряження вал-втулка

При розрахунку даної моделі приймаємо припущення про відсутність пружного деформування вала і втулки в відповідностях з рекомендаціями роботи [3]. При цьому значно спрощується визначення залежності епюри тиску в зоні контакту від характеру попереднього зношування.

Інтенсивність зношування втулки визначаємо по формулі [3]:

$$I_1 = I_{01} + B_1 p^{v_1}, \quad (1)$$

де  $I_1 = f(p)$  – інтенсивність лінійного зношування втулки в залежності від тиску в парі тертя;

$I_{01}$  – інтенсивність зношування при ординарних умовах;

$$B_1 = \frac{I_{g1} - I_{01}}{p_g^{v_1}},$$

$p$  – тиск в парі тертя ;

$I_{g1}$  - інтенсивність зношування, що відповідає гранично допустимому тиску  $p_g$ ,

в межах якого пара працює стабільно;

$v_1$  – показник ступені, який визначає характер залежності  $I_1 = f\left(\frac{p}{p_g}\right)$  ;

$p_g$  - граничний тиск в парі тертя.

Інтенсивність зношування вала визначали відповідно по формулі:

$$I_2 = I_{02} + B_2 p^{v_2}, \quad (2)$$

де  $I_2 = f(p)$  – інтенсивність лінійного зношування вала в залежності від тиску в парі тертя ;

$I_{02}$  – інтенсивність зношування матеріалу вала при ординарних умовах;

$$B_2 = \frac{I_{g2} - I_{02}}{p_g^{v_2}};$$

де  $v_2$  – показник ступені, який визначає характер залежності  $I_2 = f\left(\frac{p}{p_g}\right)$  .

Позначимо величину зношування втулки, вала і спряження через  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_{1,2}$  відповідно. Величина  $U_{1,2}$  визначає опускання вісі вала (точка  $O_1$  на рис. 1.) за рахунок зношування втулки та вала. Область зношування втулки заштрихована. На втулці утворюється лунка радіусом  $r = r_0 - U_2$  і  $U_0 = U_1(j)$ , де  $0 \leq \alpha \leq \alpha_n$ . Вал зношується по діаметру рівномірно.

По мірі зношування спряження збільшується величина дуги контакту, що визначається кутом  $2\alpha_n$ , значить збільшується і шлях тертя вала за один оберт.

Величини зношування вала за час одного n-го оберту позначимо через  $(U)_n$ ,  $(U_2)_n$  і  $(U_{1,2})_n$ .

Приймаємо слідуєчі припущення по роботі вузла тертя: вповодж одного  $n$ -го оберту кут контакту  $\alpha_n$  і тиск в зоні контакту  $P(\alpha)$  практично не змінюється.

Якщо кут дуги контакту  $2\alpha_n$ , то шлях тертя втулки за один оберт складе:

$$S_1 = 2\pi r . \quad (3)$$

При цьому шлях тертя вала:

$$S_2 = 2r\alpha_n , \quad (4)$$

де  $r$  – радіус вала з урахуванням його зношування за  $n$  оборотів;

$2\alpha_n$  – кут дуги контакту, що відповідає  $n$ -ному оберту вала.

Очевидно з достатньою точністю можна прийняти при визначенні шляху тертя  $r = r_0$ , тоді

$$S_1 = 2\pi r_0 , \quad (5)$$

$$S_2 = 2r_0\alpha_n . \quad (6)$$

Якщо виразити величини  $(U_1)$  і  $(U_2)$  через інтенсивність зношування з урахуванням симетричності епюри  $P = P(\alpha)$ , отримаємо:

$$(U_1)_n = 2\pi r_0 (I_{01} + B_1 P^{V1}(\alpha)) ; \quad (7)$$

$$(U_2)_n = 2r_0 \int_0^{\alpha_n} (I_{02} = B_2 P^{V2}(\alpha)) . \quad (8)$$

Встановимо зв'язок між величинами  $(U_1)_n$ ,  $(U_2)_n$ ,  $(U_{1,2})_n$ . Для цього побудуємо схему дуги контакту вала з втулкою після  $(n-1)$ -го оберту (рис.2). Згідно схеми:  $O$  – вісь втулки,  $O_1$  і  $r$  – положення центру вала і його радіус в момент перед  $n$ -м оборотом,  $O_2$  – центр вала після  $n$ -го оберту. Область зношування втулки за час  $n$ -го оберту заштриховано. За час  $n$ -го оберту кут дуги контакту змінюється від  $2\alpha_{n-1}$  до  $2\alpha_n$ , довжина дуги збільшується на величину  $\Delta L$ . Після  $(n-1)$ -го оберту на дільниці вище точки  $C$  має місце зазор, котрий вибирається на довжині  $\Delta L$  за рахунок зношування втулки.

Встановимо зв'язок між величинами  $(U_1)_n$ ,  $(U_2)_n$ ,  $(U_{1,2})_n$  на відділку нижче точки  $C(0 \leq \alpha \leq \alpha_{n-1})$

$$(U_1)_n = AB = BO_2 - AO_2 .$$

З  $\Delta AO_1O_2$  одержимо:

$$(AO_1)^2 = (AO_2)^2 + (O_1O_2)^2 - 2AO_2O_1O_2 \cos(180^\circ - \alpha) ,$$

$$AO_1 = r ; \quad AO_2 = r - (U_2)_n - (U_1)_n ; \quad O_1O_2 = (U_{1,2})_n .$$

Виходячи з даного розрахунку:

$$r^2 = [r - (U_2)_n - (U_1)_n]^2 + [(U_{1,2})_n]^2 + 2[r - (U_2)_n - (U_1)_n](U_{1,2})_n \cos\alpha . \quad (9)$$

Якщо не враховувати малі величини другого порядку  $[(U_{1,2})_n]^2$ ;  $[(U_2)_n + (U_1)_n]^2$  і  $(U_{1,2})[(U_2)_n + (U_1)_n]^2$ , то з рівняння (9) маємо

$$(U_{1,2})_n = \frac{(U_1)_n(\alpha) + (U_2)_n}{\cos \alpha}. \quad (10)$$

Виразимо  $(U_1)_n$  через  $(U_2)_n$  і  $(U_{1,2})_n$  користуючись рівняннями (7) і (10):

$$(U_1)_n = (U_{1,2})_n \cos \alpha - (U_2)_n = 2\pi r_0 (I_{01} + B_1 P^V 1); \quad (11)$$

звідси

$$P(\alpha) = \left\{ \frac{1}{B_1} \left[ \frac{(U_2)_n \cos \alpha + (U_2)_n}{2\pi r_0} - I_{01} \right] \right\}^{\frac{1}{V}}. \quad (12)$$

Рівняння (12) визначає закон зміни тиску на відділку дуги контакту, що відповідає куту  $2\alpha_{n-1}$ . Якщо знехтувати зношуванням втулки і вала на дуже малому відділку  $\Delta L = 2r(\alpha_n - \alpha_{n-1})$ , то підставляючи вираз (12) в рівняння (8) знайдемо величину зношування за час n-го обороту:

$$(U_2)_n = 2r_0 \int_0^{\alpha_{n-1}} \left\{ I_{02} + B_2 \left[ \frac{1}{B_2} \left( \frac{(U_2)_n \cos \alpha - (U_2)_n}{2\pi r_0} - I_{01} \right) \right]^{\frac{V}{2}} \right\} d\alpha. \quad (13)$$

Сумарне зношування вала за n-обертів

$$U_2 = \sum_{k=1}^n (U_2)_k. \quad (14)$$

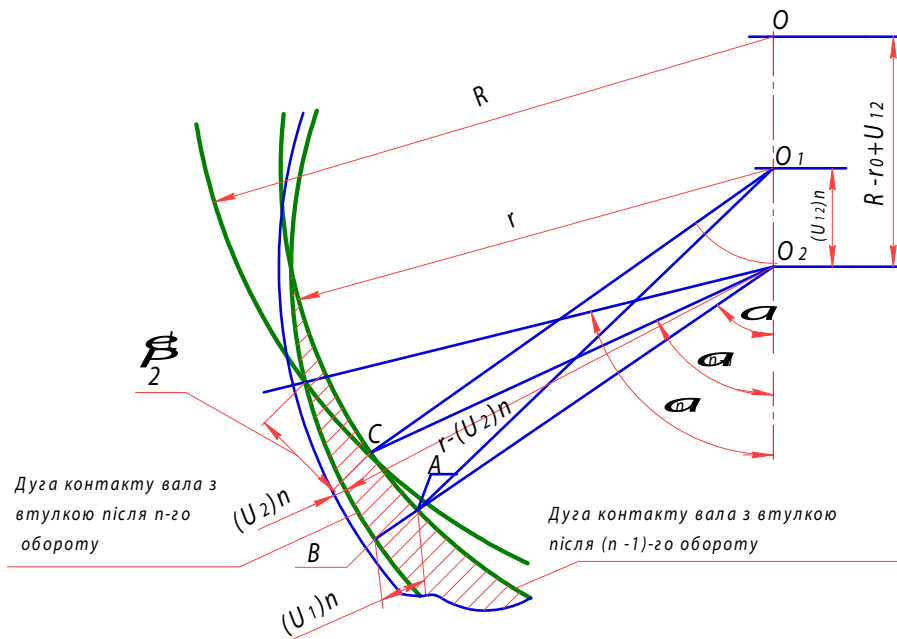


Рисунок 2 – Схема для визначення величин  $(U_1)_n$ ,  $(U_2)_n$ ,  $(U_{1,2})_n$  зношування спряження за n-обертів

$$U_{12} = \sum_{\kappa=1}^n (U_{12})_{\kappa}. \quad (15)$$

Встановимо зв'язок між величинами  $\alpha_n$ ,  $U_2$  і  $U_{1,2}$ . розглянемо трикутники  $ABO_1$  і  $ABO$  (рис. 1). Маємо:

$$AB^2 = R_0^2 - (O_1B + OO_1)^2 = (r_0 - U_2)^2 - O_1B^2.$$

Звідси

$$OB = \frac{R_0^2 + (U_{1,2} + \frac{\Delta}{2})^2 - (r_0 - U_2)^2}{2(U_{1,2} + \frac{\Delta}{2})}.$$

Далі

$$\begin{aligned} \alpha_n - \arccos \frac{O_1B}{I_0 - U_1} &= \arccos \frac{R_0^2 + (U_{1,2} + \frac{\Delta}{2})^2 - (r_0 - U_2)^2}{2(U_{1,2} + \frac{\Delta}{2})(r_0 - U_2)} = \\ &= \arccos \frac{R_0^2 + U_{1,2}^2 + U_{1,2}\Delta - \frac{\Delta^2}{4} - r_0^2 + 2r_0U_2 - U_2^2}{2(U_{1,2} + \frac{\Delta}{2})(r_0 - U_2)} = \\ &= \arccos \frac{2r_0 \left[ U_2 \left(1 - \frac{U_2}{2r_0}\right) + \frac{\Delta}{2} \left(\frac{R_0 + r_0}{2r_0} - \frac{\Delta}{4r_0} + \frac{U_{1,2}}{r_0}\right) \right]}{2(U_{1,2} + \frac{\Delta}{2})(r_0 - U_2 \approx r_0)}. \end{aligned}$$

Якщо прийняти  $1 - \frac{U_2}{2r_0} \approx 1$ ;  $\frac{R_0 + r_0}{2r_0} - \frac{\Delta}{4r_0} + \frac{U_{1,2}}{r_0} \approx 1$ ;  $r_0 - U_2 \approx r_0$ , тоді

$$\alpha_n = \arccos \frac{U_2 + \frac{\Delta}{2}}{U_{1,2} + \frac{\Delta}{2}}. \quad (16)$$

З (15) можна одержати величину сумарного зношування коли відома величина кута контакту  $\alpha_n$

$$U_{1,2} = \frac{\frac{\Delta}{2}(1 - \cos \alpha_n) + U_2}{\cos \alpha_n}. \quad (17)$$

Якщо пружні деформації не враховувати, тоді розподілення контактних тисків повністю визначається характером зношування, дійсне розподілення контактних тисків в початковий момент ( $n=0$ ) не використовується, а використовується лише величина зони контакту. Це припущення приймається з слідуєчих міркувань: вже після кількох

обертів вала в втулці утворюється лунка, після цього розмір площі контакту в даний момент часу не буде залежати від величини навантаження, що прикладається.

Однак величину початкового кута контакту  $\alpha_0$  (при  $n=0$ ) приймаємо рівною куту пружного контакту вала та втулки.

В роботі [4] наведена емпірична формула визначення кута контакту  $\alpha_0$  :

$$\alpha_0 = \text{arctg} 2 \sqrt{\frac{V_1 + V_2}{\Delta/2} \cdot \frac{Q}{L}} \quad (18)$$

де  $V_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{\pi - E_1}$  ;

$$V_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{\pi - E_2}$$

$\mu$  - коефіцієнт Пуасона ;

$E$  - модуль Юнга.

Далі з урахуванням (17) по куту контакту  $\alpha_0$  визначаємо величину  $(U_{1,2})_0$  початкового зближення вісей втулки і вала за рахунок пружних деформацій:

$$(U_{1,2})_0 = (U_{1,2})_0 = \frac{\Delta(1 - \cos \alpha_0)}{2 \cos \alpha_0} \quad (19)$$

Складемо рівняння статки для вибраної моделі спряження:

$$\frac{Q}{L} = 2r_0 \int_0^{\alpha_n} P(\alpha) \cos \alpha d\alpha \quad (20)$$

Таким чином одержано систему рівнянь(12), (13), (14), (15), (16) і (20) при початкових умовах (18), вирішивши яку можна знайти невідомі величини  $P$ ;  $(U_2)_n$ ;  $(U_{1,2})_n$ ;  $\alpha_n$ ;  $U_2$ ;  $U_{1,2}$ .

Система рівнянь розбивалась на три групи:

1 група

$$\left. \begin{aligned} P(\alpha) &= \left\{ \frac{1}{B_1} \left[ \frac{(U_n)_n \cos \alpha - (U_2)_n}{2 \pi r_0} - I_{01} \right] \right\}^{1/\nu_1} \\ (U_2)_n &= 2r_0 \int_0^{\alpha_n} \left\{ I_{02} + B_2 P(\alpha)^{\nu_2} \right\} d\alpha \\ 2r_0 \int_0^{\alpha_n} P(\alpha) \cos \alpha \cdot d\alpha &= \frac{Q}{L} \end{aligned} \right\} (21)$$

2 група

$$\alpha_n = \arccos \frac{U_2 + \frac{\Delta}{2}}{U_{1,2} + \frac{\Delta}{2}} \quad (22)$$

3 група

$$\left. \begin{aligned} U_2 &= (U_2)_n + \sum_{\kappa=1}^{n-1} (U_2)_{\kappa} \\ U_{12} &= (U_{12})_n + \sum_{\kappa=1}^{n-1} (U_{12})_{\kappa} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Систему (21) приводимо до ітераційного виду:

$$\left\{ \begin{aligned} (U_{12})_n^i &= (U_{12})^{i-1} + K \left\{ \frac{Q}{Lr_0} (2\pi r_0 B_1)^{1/\nu_1} - 2 \cdot \int_0^{\alpha_{n-1}} [(U_{12})_n^{i-1} \cos \alpha - \right. \\ &\left. - (U_2)_n^{i-1} - 2\pi r_0 I_{01}]^{1/\nu_1} \cos \alpha d\alpha \right\} \\ (U_2)_n^i &= 2r_0 I_0 2\alpha_{n-1} + \frac{2r_0 B_2}{(2\pi r_0 B_1)^{\nu_2/\nu_1}} \int_0^{\alpha_{n-1}} [(U_{12})_n^{i-1} \cos \alpha - \\ &\left. - (U_2)_n^{i-1} - 2\pi r_0 I_{01}]^{\nu_2/\nu_1} d\alpha \end{aligned} \right. \quad (24)$$

Коефіцієнт К підбирається з ціллю отримання найбільшої швидкості сходимості ітераційного процесу.

Рішення продовжуємо до тих пір, поки не виконаються наступні умови:

$$\left\{ \begin{aligned} \left| 1 - \frac{(U_{12})_n^i}{(U_{12})_n^{n-1}} \right| &\leq 10^{-4} \\ \left| 1 - \frac{(U_2)_n^i}{(U_2)_n^{n-1}} \right| &\leq 10^{-4} \end{aligned} \right. \quad (25)$$

Після цього визначаються нові значення абсолютних величин зношень по рівнянням (23) для К обертів.

В результаті спрацювання вала та втулки за n-ий оберт вала кут  $\alpha_{n-1}$  зміниться. Нове значення кута  $\alpha_n$  отримуємо з співвідношення (22).

Після цього знову визначаються зношення на наступному оберті і т.д.

На основі розробленої математичної моделі створена програма розрахунку зношення вузла тертя з застосуванням ПЕВМ (рис.3)

**Висновок.** Створена модель зношення вузла тертя ковзання, що надає можливість на стадії проектування прогнозувати його зносостійкість та довговічність.

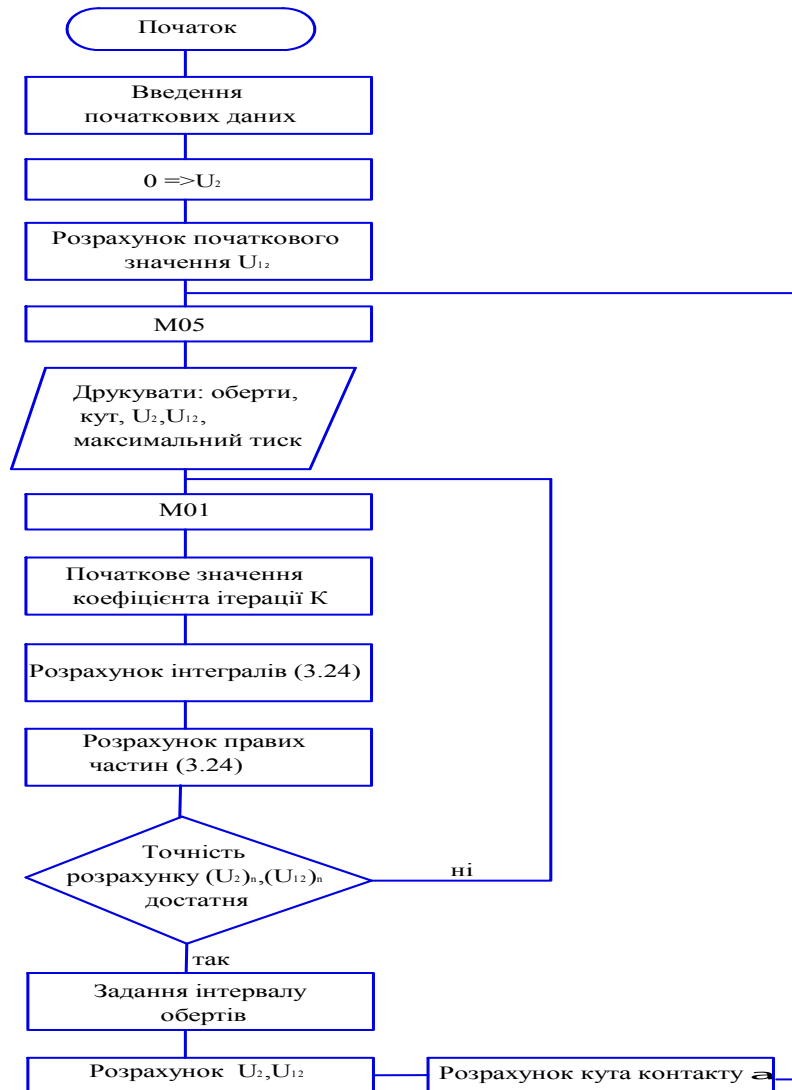


Рисунок 3 – Блок-схема програми розрахунку підшипника ковзання

## Список літератури

1. Беркович И.И., Громаковский Д.Г. Трибология. Самар. гос. техн. ун-т. Самара, 2000. 268 с.
2. Доучаева Е.Н. Износостойкость конструкционных материалов с различными видами упрочнения // Сб. науч. тр. «НИИ тракторосельхозмаш». – М.: Машгиз. – 1981. – С. 24-29.
2. Усов П.П. Теоретическое исследование напряженного состояния пары вал-втулка с учетом износа. // Машиноведение. – 1987. – №2. – С. 80 - 87.
3. Милов А.Б. О вычислении контактной жесткости цилиндрических соединений. // Проблемы прочности. – 1973. – №1. – С. 70 - 72.

В статье разработана математическая модель изнашивания узла трения скольжения в зависимости от соотношений многообразных конструкционных материалов и покрытий, с выражением износостойкости через интенсивность линейного изнашивания в зависимости от давления в паре трения.

In the article the developed mathematical model of wear of knot of sliding friction depending on correlations of the varied constructions materials and coverages, with expression of wearproofness through intensity of linear wear depending on pressure in the pair of friction.