УДК 631.365.22

Л.Н. Блохін, проф., канд. техн. наук
Київський національний авіаційний університет
С.І. Осадчий, доц., канд. техн. наук
Кіровоградський національний технічний університет

Пошук допоміжної матриці при синтезі багатовимірних оптимальних систем керування нестійкими об’єктами

В даній статті отримано новий алгоритм визначення поліноміальної матриці необхідної для застосування базового методу синтезу багатовимірних оптимальних та оптимальних робастних систем стохастичної стабілізації нестійких об’єктів
нестійкий об’єкт, поліноміальна матриця, оптимальна робастна система

Вступ. Постійне зростання вимог до точності виконання заданих траєкторій руху різноманітних об’єктів приводить до необхідності розробки новітніх технологій створення систем керування. Як відомо [1], конкурентноздатними виявляються лише ті об’єкти, у яких оптимальними обираються не тільки параметри, але й структури систем управління.

До теперішнього часу відомі, наприклад [2], вітчизняні методи синтезу оптимальних систем стабілізації руху, які успішно пройшли експериментальну перевірку при модернізації престижної і унікальної аерокосмічної техніки. Проте вони розраховані і застосовувалися лише для управління складними, але стійкими рухомими об’єктами. З іншого боку існує досить широкий спектр рухомих об’єктів, які мають нестійкі особливості. Найбільш відомим серед них є вертольоти [3] та рухомі роботи [4].

В роботах [5, 6] наведено алгоритми синтезу оптимальних систем спостереження, стабілізації та робастної стабілізації багатовимірних нестійких об’єктів, які дозволяють успішно знайти фізично-реалізуємий регулятор, що забезпечує стійкість замкнутої системи та мінімізацію обраного критерію якості.

Застосування даних алгоритмів передбачає наявність моделі об’єкта керування у вигляді системи звичайних диференційних рівнянь

$$P \cdot x = M \cdot u + \psi , \qquad (1)$$

де x – n-вимірний вектор вихідних координат;

u – m-вимірний вектор керуючих дій;

ψ – n-вимірний вектор збурень, які є центрованими взаємозв’язаними стаціонарними випадковими процесами з відомою матрицею спектральних щільностей;

P – поліноміальна матриця розміру $n \times n$, поліном визначник якої має нестійкі корені;

M – поліноміальна матриця розміру $n \times m$.

Першим етапом процедури синтезу при цьому є визначення поліноміальних матриць A та B з наступних співвідношень

$$P^{-1} \cdot M = \breve{M} \cdot B^{-1}, \tag{2}$$

$$(P^{-1} \cdot M \cdot A)_{-} = -P_{-}^{-1}, \tag{3}$$

де B – результат правостороннього видалення нестійких полюсів [7];

P_{-}^{-1} - нестійкий результат сепарації оберненої матриці P [2, 8];

A – матриця відповідного розміру, що забезпечує виконання (3);

„_” – знак знаходження нестійкої частини результату сепарації.

Якщо чисельна реалізація правостороннього видалення полюсів з (2) не викликає принципової складності, то розв’язання рівняння (3) відносно A є досить складним завданням. Складність в першу чергу обумовлена наперед невідомими структурою шуканої матриці та розмірністю об’єкта стабілізації. Отже, виникає наступна задача.

Постановка задачі. За відомою апріорно системою диференційних рівнянь об’єкту (1), який має нестійкі полюси, знайти поліноміальне рівняння для визначення структури та параметрів матриці A, яке б не передбачало виконання сепарації добутку $P^{-1} \cdot M \cdot A$.

Рішення. Для пошуку алгоритму рішення поставленої задачі доведемо наступну теорему:

якщо задані поліноміальні матриці P та M розміру $n \times n$ та $n \times m$ відповідно, і нулі визначника $|P|$ можуть бути у правій півплощині комплексної змінної s, то поліноміальна матриця A, що забезпечує виконання умови (3) може бути знайдена в результаті розв’язання наступного поліноміального рівняння

$$P_{10} F_{-} A = -P_{1-}, \tag{4}$$

де F_{-} - дробово-раціональна матриця нестійкої частини результату сепарації добутку

$$P_{-}^{-1} M = F_{0} + F_{-}, \tag{5}$$

P_{10}, P_{1-} - поліноміальні матриці результати лівостороннього видалення полюсів дробово-раціональної матриці P_{-}^{-1} такі, що

$$P_{-}^{-1} = P_{10}^{-1} P_{1-}. \tag{6}$$

Для доказу теореми виконаємо множення зліва рівняння (4) на P_{10}^{-1}, в такому разі з урахуванням (6)

$$F_{-} A = -P_{-}^{-1}. \tag{7}$$

Позначимо

$$C = P^{-1} \cdot (M \cdot A + E_n) \tag{8}$$

та здійснимо сепарацію матриці P^{-1}

$$P^{-1} = P_{+}^{-1} + P_{-}^{-1}. \tag{9}$$

В такому разі, співвідношення (8) може бути представлено у вигляді

$$C = P_{+}^{-1} \cdot M \cdot A + P_{-}^{-1} \cdot M \cdot A + P_{+}^{-1} + P_{-}^{-1}. \tag{10}$$

Якщо врахувати (5), то (10) легко перетворюється на

$$C = P_{+}^{-1} \cdot M \cdot A + F_0 \cdot A + F_{-} \cdot A + P_{+}^{-1} + P_{-}^{-1}, \tag{11}$$

отже при виконанні умови (7)

$$C = P_{+}^{-1} \cdot M \cdot A + F_0 \cdot A + P_{+}^{-1}. \tag{12}$$

Оскільки матриці *M, A* та F_0 є поліноміальними за визначенням, а елементи P_{+}^{-1} мають лише стійкі полюси, то нестійкий результат сепарації (12) $C_{-} = 0$, тому на основі (8)

$$[P^{-1}(M \cdot A + E_n)]_{-} = 0, \tag{13}$$

за умови, що виконується рівняння (4), що и потрібно було довести.

Таким чином алгоритм знаходження матриці A, побудований на основі даної теореми може бути представлений у вигляді:

- за відомою матрицею P^{-1} в результаті сепарації знайти P_{-}^{-1};
- на основі заданих P^{-1} та M з урахуванням (5) визначити F_{-};
- в результаті лівостороннього видалення полюсів сформувати P_{10} та P_{1-};
- знайти добуток $P_{10}F_{-}$ та перевірити його поліноміальність;
- розв'язати поліноміальне рівняння (4).

Для перевірки ефективності обґрунтованого алгоритму розглянемо наступний приклад.

Припустимо що задані матриці:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+\alpha} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{-s+\beta} \end{bmatrix}; \; M = \begin{bmatrix} m_{11}^{1}s + m_{11}^{0} \\ m_{21}^{1}s + m_{21}^{0} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Необхідно знайти таку A, щоб виконувалось рівняння (3).

Виконання першого кроку алгоритму дозволяє визначити, що

$$P_-^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{-s+\beta} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

тому в результаті лівостороннього видалення полюсів на третьому кроці будемо мати

$$P_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -s+\beta \end{bmatrix},\ P_{1-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Результат другого кроку отриманий з (5) має вигляд

$$F_- = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{m_{21}^0 + m_{21}^1\beta}{-s+\beta} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

як наслідок знаходження відповідного добутку, на четвертому кроці отримуємо

$$P_{10}F_- = \begin{bmatrix} 0 \\ m_{21}^0 + m_{21}^1\beta \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Оскільки це поліноміальна матриця, то шукана A повинна мати таку структуру

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

а поліноміальне рівняння (4) зводиться до наступних алгебраїчних рівнянь

$$\left(m_{21}^0 + m_{21}^1\beta\right)a_{11} = 0, \tag{20}$$

$$\left(m_{21}^0 + m_{21}^1\beta\right)a_{12} = -1. \tag{21}$$

Звідки $a_{11} = 0$, $a_{12} = \dfrac{-1}{m_{21}^0 + m_{21}^1\beta}$.

Для перевірки знайдено добуток $P^{-1}MA$

$$P^{-1}MA = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{m_{11}^1 s + m_{11}^0}{\left(m_{21}^0 + m_{21}^1\beta\right)(s+\alpha)} \\ 0 & -\dfrac{m_{21}^1 s + m_{21}^0}{\left(m_{21}^0 + m_{21}^1\beta\right)(-s+\beta)} \end{bmatrix}, \tag{22}$$

нестійкий результат сепарації якого

$$\left[P^{-1}MA\right]_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{-s+\beta} \end{bmatrix} \tag{23}$$

задовольняє рівнянню (3).

Висновки. Таким чином, отримано новий алгоритм визначення поліноміальної матриці A необхідної для застосування базового методу синтезу багатовимірних оптимальних та оптимальних робастних систем стохастичної стабілізації нестійких об'єктів з [5,6].

Отриманий алгоритм (4) є особливо простим при квадратній матриці F_-, в цьому випадку

$$A = -F_-^{-1} \cdot P_-^{-1}. \tag{24}$$

Список літератури

1. Блохін Л.М., Азарсков В.М. Найважливіша науково-організаційна проблема вітчизняної авіації.// Вісник ЦНЦ ТАУ, 1999.-№2.-С.5-6.
2. Блохін Л.М., Буриченко М.Ю. Статистична динаміка систем управління: Підручник. – К.: НАУ, 2003. – 208с.
3. Есаулов С.Ю., Бахов О.П., Дмитриев И.С. Вертолет как объект управления. – М.: Машиностроение, 1977. – 192с.
4. Ларин В.Б. Управление шагающими аппаратами. – К.: Наук.думка, 1980. – 168с.
5. Азарсков В.Н., Блохин Л.Н., Житецький Л.С. Методология конструи-рования оптимальних систем стохастической стабилизации – К.: НАУ, 2006.-437с.
6. Блохин Л.Н., Осадчий С.И., Безкоровайный Ю.Н. Технология структурной идентификации и последующего синтеза оптимальных систем стабилизации неустойчивых динамических объектов// Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики» -2007.-№6.-С.57-66
7. Davis M.C. Factoring the Spectral Matrix. – IEEE Trans. Auto. Cont., 1963,AG-8, N4. – p. 296-305
8. Ньютон Дж.К., Гулд Л.А., Кайзер Дж.Ф. Теория линейных следящих систем. – М.: Наука, 1961. – 407с.

В данной статье получен новый алгоритм определения полиномиальной матрицы необходимой для применения базового метода синтеза многомерных оптимальных и оптимальных робастних систем стохастической стабилизации неустойчивых объектов

In this article the new algorithm of determination of polinomiali matrix is got necessary for application of base method synthesis of the multidimensional optimum and optimum robast systems of the stochastic stabilizing unsteady objects