

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

**методичні вказівки та завдання до індивідуальних завдань
для студентів механічних та електротехнічних спеціальностей**

Кропивницький – 2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра деталей машин та прикладної механіки

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

**методичні вказівки та завдання до індивідуальних завдань
для студентів механічних та електротехнічних спеціальностей**

Рекомендовано засіданням кафедри деталей машин та прикладної механіки для студентів механічних та електротехнічних спеціальностей

Протокол № 10 від 11.05.2021 р.

Технічна механіка: методичні вказівки і контрольні завдання для студентів механічних та електротехнічних спеціальностей // Укл. Пирогов В.В., Філімоніхін Г.Б., Невдаха Ю.А. – Кропивницький: ЦНТУ, 2021. – 64 с.

Табл. 13. Іл. 15. Бібліогр.: 6 назв.

Укладачі к.ф.-м.н., доц. Пирогов В.В.,
д.т.н., проф. Філімоніхін Г.Б.,
к.т.н., доц. Невдаха Ю.А.

Рецензент к.т.н., доц. Плешков С.П.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	4
ЧАСТИНА I. КІНЕМАТИЧНИЙ І ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМА КОНТАКТОРА ПРИСТРОЮ РЕГУЛЮВАННЯ НАПРУГИ ТРАНСФОРМАТОРА	5
1.1 Будова та принцип роботи механізму контактора	5
1.2 Вибір вихідних даних та побудова розрахункової схеми механізму контактора	6
1.3 Визначення швидкостей і прискорень точок ланок механізму та побудова планів швидкостей і прискорень	9
1.4 Визначення параметрів руху ланок механізму	13
1.4.1 Кінематичний аналіз механізму	14
1.4.2 Динамічний аналіз механізму.....	16
ЧАСТИНА II. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ, ЖОРСТКІСТЬ І СТІЙКІСТЬ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ МЕРЕЖ ТА ЕЛЕКТРИЧНИХ МАШИН	20
2.1 Розрахунок на міцність проводів повітряних електричних мереж	20
2.2 Кручення валу круглого поперечного перерізу	25
2.3 Розрахунок балок на міцність при згинанні.....	30
2.4 Визначення переміщень в балках змінного перерізу при згинанні.....	35
2.5 Розрахунок на міцність при крученні із згинанням.....	40
2.6 Розрахунок сталевих стрижнів на стійкість	48
2.7 Розрахунок балки на міцність при ударних навантаженнях	54
ДОДАТОК А.....	59
ДОДАТОК Б	61
ДОДАТОК В.....	62
ЛІТЕРАТУРА	64

Передмова

Методичні вказівки складаються з двох частин. Перша частина дозволяє закріпити теоретичні знання та засвоїти методику кінематичного і динамічного аналізу на прикладі дослідження механізму контактора пристрою регулювання напруги трансформатора.

Друга частина дозволяє придбати навички розрахунку на міцність, жорсткість та стійкість елементів конструкцій електричних мереж та електричних машин.

Робота виконується на одній стороні аркушу формату А4 за формою 2 (для титульного аркушу) та за формою 2а (для наступних аркушів). Нумерацію сторінок проставляють в штампах.

Всі величини, які входять до відповідних рівнянь та формул, необхідно розшифровувати. Для числових значень, які підставляються в формули, обов'язково вказуються одиниці вимірювання. Розрахунки, які повторюються, зводяться в таблиці.

Під час захисту індивідуальних завдань визначається якість знання студентом відповідних розділів технічної механіки і вміння використовувати їх під час вирішення практичних задач.

Вихідні дані до кожної задачі студент обирає з таблиці задачі у відповідності з літерами “г”, “д”, “е”, яким співставлені відповідні цифри залікової книжки. Наприклад:

номер залікової книжки – 8.0 2 3 0 4 1 5

г д е

В даному випадку цифра визначатиме рядок, а літера – стовпець. Комірка, отримана в результаті перетину відповідного рядка та стовпця, дає необхідне значення величини. Наприклад, стовпцю “е” відповідає рядок під номером “5”, в результаті їх перетину отримуємо комірку з якої знаходимо значення необхідної величини.

Перед розв'язком кожної задачі необхідно записати її умову та вписати вихідні дані задачі у відповідності до варіанту, накреслити вихідну схему і вказати на ній всі величини, необхідні для розрахунків.

Частина I. Кінематичний і динамічний аналіз механізму контактора пристрою регулювання напруги трансформатора

1.1 Будова та принцип роботи механізму контактора

В механізмі швидкодії контактора (рис. 1.1) з'єднуючі електричні контакти розташовані на роторі 7, вал C якого жорстко з'єднаний з мальтійським хрестом 4. Ведуча ланка мальтійського механізму 1 одночасно є кривошипом кривошипно-шатунного механізму, утвореного ланками 1, 2, 3. До ланки 3 або повзуна прикріплена пружина 5.

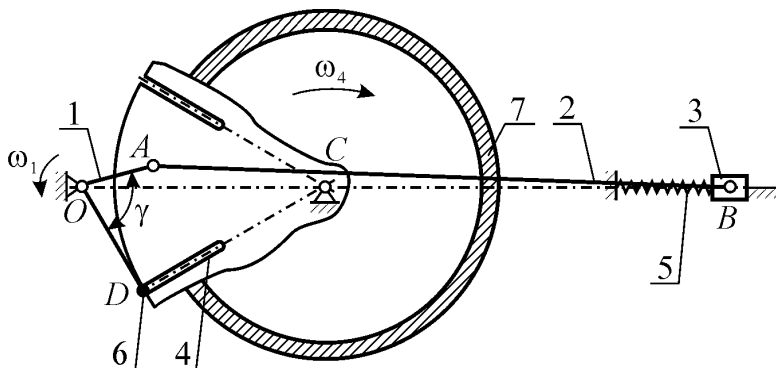


Рис. 1.1 Механізм контактора пристрою регулювання напруги трансформатора: 1 – кривошип; 2 – шатун; 3 – повзун; 4 – куліса мальтійського механізму (хреста); 5 – пружина; 6 – цівка (палець) мальтійського механізму.

Регулювання напруги контактором здійснюється за заданою програмою при обертанні ротора 7, жорстко зв'язаного з мальтійським хрестом 4. Кривошип OA жорстко зв'язаний з кривошипом OD (ланка 1 утворена кривошипами OA і OD). Повзун B (ланка 3) починає рухатися вздовж лінії OBC під дією сили пружності деформованої пружини 5 і через шатун AB (ланка 2) приводить в рух кривошип OA . Ланка 1 обертається навколо осі O ; цівка D при цьому рухається вздовж куліси мальтійського хреста 4 і обертає його разом з ротором 7 навколо осі C . В початковий момент часу, коли цівка D розпочинає рух вздовж куліси мальтійського хреста 4, кут ODC рівний 90° . Після виходу цівки D з куліси, мальтійський хрест 4, для запобігання мимовільного повороту, фіксується спеціальними циліндричними поверхнями на хресті і на кривошипі OD .

1.2 Вибір вихідних даних та побудова розрахункової схеми механізма контактора

Необхідно:

1. відповідно до свого варіанту виписати вихідні дані (вихідні дані задані в табл. 1.1) та враховуючи їх побудувати на схемі поточне положення механізма, коли ланка 4 повернеться на кут θ відносно початкового положення механізма (тут $\theta \in [0, \pi / Z]$, задається викладачем);

2. для поточного положення механізма побудувати плани швидкостей і прискорень його точок A, B, D , визначити кутову швидкість і кутове прискорення ланки 4;

3. використовуючи рівняння, що описують кінематичні зв'язки між ланками механізму та їх динаміку, знайти параметри руху ланок, як функції часу або кута повороту кривошипа 1 в інтервалі від α_0 до α_1 , а також побудувати відповідні графіки на ЕОМ.

Таблиця 1.1

№ рядка	Z	$l_{OA}, \text{мм}$	$l_{AB}, \text{мм}$	$l_{OC}, \text{мм}$	$\gamma, \text{град}$	$M_c, \text{Н}\cdot\text{м}$	$F_0, \text{Н}$	$c, \text{Н/мм}$	$\omega_1, \text{с}^{-1}$	$J_1 \cdot 10^3, \text{кг}\cdot\text{м}^2$	$J_2 \cdot 10^3, \text{кг}\cdot\text{м}^2$	$m_3, \text{кг}$	$J_4 \cdot 10^3, \text{кг}\cdot\text{м}^2$
1	4	50	350	125	65	20	2000	5	12	11	20	5	0,4
2	5	48	340	130	70	22	1900	6	11	12	21	6	0,5
3	6	46	330	135	75	24	1800	7	10	13	22	7	0,6
4	7	44	320	140	80	26	1700	8	9	14	23	8	0,7
5	8	42	310	145	85	28	1600	9	8	15	24	9	0,8
6	4	40	300	150	65	30	1500	10	7	16	25	5	0,9
7	5	38	290	155	70	32	1400	11	8	17	26	6	0,5
8	6	36	280	160	75	34	1300	12	9	18	27	7	0,6
9	7	34	270	165	80	36	1200	13	10	19	28	8	0,7
0	8	32	260	170	85	38	1100	14	11	20	29	9	0,8
	г	д	е	г	д	е	г	д	е	г	д	е	д

В таблиці 1.1:

Z – кількість пазів мальтійського хреста 4;

l_{OA} – довжина кривошипа 1;

l_{AB} – довжина шатуна 2;

l_{OC} – відстань між осями обертання кривошипа і мальтійського хреста (ротора 7);

γ – кут AOD між кривошипом і розташуванням цівки 6 мальтійського хреста;

M_c – момент опору, що прикладений до ланки 4;

F_0 – початкове зусилля пружини в момент входження цівки 6 в паз мальтійського хреста 4;

c – жорсткість пружини;

ω_1 – кутова швидкість кривошипа 1 для визначення швидкостей і прискорень точок механізму і побудови планів швидкостей і прискорень (для динамічного аналізу механізму $\omega_1=2, c^{-1}$);

J_1, J_2, J_4 – моменти інерції ланок 1, 2 і 4;

m_3 – маса повзуна 3.

При розрахунках будемо враховувати, що $m_{OA} = 0,25m_3$, $m_{OD} = 0,4m_3$, $m_{AB} = 0,8m_3$, $m_4 = 0,5m_3$.

При побудові графіків залежностей враховуємо, що $\theta = 0,25\pi t / Z$, де $t \in [0,4]$ (t в сек).

Приклад. Побудувати механізм контактора згідно з наступними вихідними даними:

- кількість пазів мальтійського хреста $Z=4$;

- довжина кривошипа $l_{OA} = 35$ мм;

- довжина шатуна $l_{AB} = 310$ мм;

- кут між кривошипами OA і OD $\gamma = 70^\circ$;

- відстань між осями O і C $l_{OC} = 150$ мм;

- від початкового положення куліса відхилилась на кут $\theta=15^\circ$, тоді отримаємо

$$\angle OCD = \frac{\pi}{Z} - 15^\circ = 30^\circ.$$

Згідно з вихідними даними, в обраному масштабі, зображаємо схему механізму контактора (як це, наприклад, показано на рис. 1.2).

Спочатку на схемі проведемо лінію, на якій знаходяться точки O , C , B . В масштабі $\mu=0,5$ мм/мм на відстані l_{OC} зображаємо точки O і C . Із прямокутного трикутника OD_0C знаходимо довжину l_{OD} :

$$l_{OD} = OC \sin\left(\frac{\pi}{Z}\right) = 150 \cdot \sin\frac{\pi}{4} \approx 106 \text{ мм.}$$

В заданому положенні механізму за теоремою синусів

$$\frac{l_{OD}}{\sin(\angle OCD)} = \frac{l_{OC}}{\sin(\angle ODC)} = \frac{l_{CD}}{\sin(\angle COD)},$$

спочатку знаходимо $\angle ODC=135^\circ$, потім $\angle COD=15^\circ$ і $l_{CD}=55$ мм. Від положення кривошипа OD під кутом $\gamma=70^\circ$ проводимо кривошип OA завдовжки $l_{OA}=35$ мм. Від точки A відкладаємо відрізок $l_{AB}=310$ мм до перетину з продовженням лінії OC і позначаємо точку B – положення повзуна в заданому положенні механізму контактора.

Розрахункова схема механізму контактора показана на рисунку 1.2.

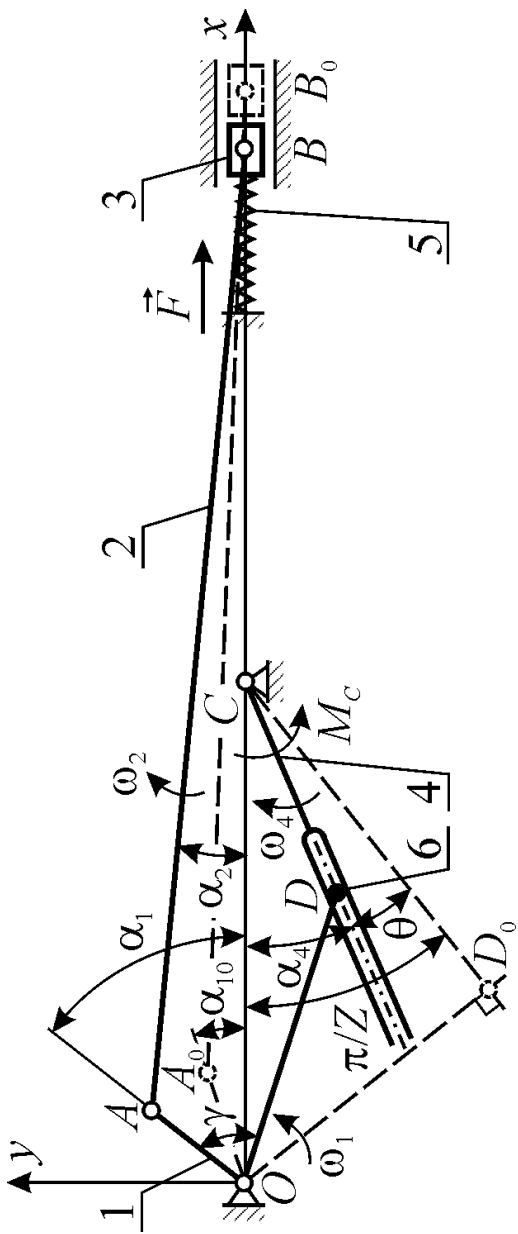


Рис. 1.2 Розрахункова схема механізму контактора

Пунктиром і літерами з індексом "0" показано положення механізму і його точок в початковий момент часу

1.3 Визначення швидкостей і прискорень точок ланок механізму та побудова планів швидкостей і прискорень

Для визначеності будемо вважати, що рух ланки 1 задано, тобто відомо, що кривошипи OA і OD в даний момент часу обертаються навколо осі O проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю $\omega_1=10 \text{ рад/с}$ і кутовим прискоренням $\varepsilon_1=20 \text{ рад/с}^2$ (рис. 1.3, а). Тоді весь механізм можна розбити на дві групи ланок (1, 2, 3 – провідна ланка 1 та 1, 4 – провідна ланка 2). Для провідної ланки 1 відомі лінійні швидкості і прискорення. Для визначення швидкостей і прискорень інших ланок складаємо відповідні векторні рівняння і аналізуємо величину і напрямок кожного вектора. Для визначення швидкості повзуна B і кутової швидкості обертання шатуна AB запишемо векторне рівняння:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \quad (1.1)$$

Швидкість точки A ланки 1 відома за величиною

$$v_A = \omega_1 l_{OA} = 10 \cdot 35 = 350 \text{ мм/с} = 0,35 \text{ м/с},$$

і направлена перпендикулярно до кривошипа OA в бік кутової швидкості ω_1 .

Швидкість точки B (\vec{v}_B) відома тільки за напрямком – направлена по лінії BC ; швидкість точки B при обертальному русі навколо полюса A (\vec{v}_{BA}) відома також тільки за напрямком – перпендикулярна шатуна AB .

Побудуємо векторний трикутник згідно рівняння (1.1), який дає графічне уявлення про швидкості ланок і називається планом швидкостей.

З точки p_v паралельно вектору \vec{v}_A відкладаємо відрізок $p_v a$, за величиною рівний:

$$p_v a = p_v a \cdot \mu_v, \text{ звідки } p_v a = v_A / \mu_v,$$

де μ_v – масштаб побудови плану швидкостей, який обираємо рівним $\mu_v=0,01 \text{ м/(с}\cdot\text{мм)}$. Тоді

$$p_v a = 0,35 \text{ м/с} / 0,01 \text{ м/(с}\cdot\text{мм)} = 35 \text{ мм}.$$

З точки a проводимо лінію, паралельну \vec{v}_{BA} , а з точки p_v – лінію, паралельну замикаючому вектору \vec{v}_B . Перетин цих ліній дає точку b . Вектор \vec{ab} відповідає вектору \vec{v}_{BA} , а вектор $\vec{p_v b}$ – вектору \vec{v}_B (рис. 1.3, б).

Використовуючи план швидкостей визначаємо швидкості v_B і v_{BA} . За допомогою лінійки визначаємо довжину відрізків ab та $p_v b$ і помноживши їх величину на масштаб μ_v , отримаємо: $v_B = 0,3 \text{ м/с}$; $v_{BA} = 0,2 \text{ м/с}$.

Кутова швидкість обертання шатуна AB навколо полюса A за величиною рівна

$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{l_{AB}} = \frac{0,2}{0,31} \approx 0,645 \text{ рад/с},$$

і направлена – за годинниковою стрілкою.

Якщо в точці B покажемо вектор \vec{v}_{BA} (переносимо з плану швидкостей), то отримаємо напрямок кутової швидкості ω_2 за ходом годинникової стрілки.

Для визначення кутової швидкості обертання мальтійського хреста 4 відносно осі C , розглянемо рух точки D , як складний рух. Тоді абсолютна швидкість точки D v_D^a складається з переносної швидкості v_D^e , що відповідає за переносний рух точки D разом з ланкою 4, та відносної швидкості v_D^r , що відповідає за відносний рух точки D відносно ланки 4. Векторне рівняння для абсолютної швидкості точки D має вигляд:

$$\vec{v}_D^a = \vec{v}_D^e + \vec{v}_D^r. \quad (1.2)$$

Абсолютна швидкість точки D відома

$$v_D^a = \omega_1 l_{OD} = 10 \cdot 106 = 1060 \text{ мм/с} = 1,06 \text{ м/с},$$

і направлена перпендикулярно OD проти ходу годинникової стрілки.

Швидкість \vec{v}_D^e відома тільки за напрямком – перпендикулярна відрізка

CD ; швидкість \vec{v}_D^r відома тільки за напрямком – направлена по лінії CD .

Векторний трикутник, відповідно до рівняння (1.2), будемо аналогічно, як і за рівнянням (1.1). Для зручності обираємо інший масштаб: $\mu_v = 0,02 \text{ м/(с}\cdot\text{мм)}$. З урахуванням даного масштабу з плану швидкостей (рис. 1.3, в) знаходимо:

$$v_D^e = 0,75 \text{ м/с}, \quad v_D^r = 0,75 \text{ м/с}.$$

Тоді

$$\omega_4 = \frac{v_D^e}{l_{CD}} = \frac{0,75}{0,055} \approx 13,64 \text{ рад/с}.$$

Для визначення прискорень групи ланок 1, 2, 3 запишемо векторне рівняння:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n, \quad (1.3)$$

де \vec{a}_B – прискорення повзуна B , відоме за напрямком – направлене вздовж лінії BC ;

$\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n$ – прискорення обертання полюса – точки A – навколо осі O , яке складається з двох складових \vec{a}_A^τ і \vec{a}_A^n , відомих за величиною і напрямком;

$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n$ – прискорення точки B при обертальному русі навколо полюса A , яке складається з двох складових \vec{a}_{BA}^τ і \vec{a}_{BA}^n , відомих за напрямком, а \vec{a}_{BA}^n ще й відоме за величиною.

Нижче визначимо деякі з вказаних прискорень.

Прискорення \vec{a}_A^τ перпендикулярне кривошипу OA і направлене в бік кутового прискорення ε_1 :

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_{OA} = 20 \cdot 0,035 = 0,7 \text{ м/с}^2.$$

Прискорення \vec{a}_A^n направлене від точки A до точки O :

$$a_A^n = \omega_1^2 l_{OA} = 10^2 \cdot 0,035 = 3,5 \text{ м/с}^2.$$

Прискорення \vec{a}_{BA}^τ направлене перпендикулярно шатуну AB .

Прискорення \vec{a}_{BA}^n направлене від точки B до точки A :

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_{AB} = 0,645^2 \cdot 0,31 \approx 0,129 \text{ м/с}^2.$$

Обираємо масштаб для прискорень $\mu_a = 0,05 \text{ (м/(с}^2 \cdot \text{мм))}$ і, використовуючи рівняння (1.3), будуємо векторний багатокутник (рис. 1.3, г). З рисунка 1.3, г, знаходимо:

$$a_B = 2,5 \text{ м/с}^2, \quad a_{BA}^\tau = 2,6 \text{ м/с}^2.$$

Тоді

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{l_{AB}} = \frac{2,6}{0,31} \approx 8,4 \text{ рад/с}^2.$$

Для визначення прискорень ланок 1 та 4 (складний рух точки D), використаємо векторне рівняння:

$$\vec{a}_D^a = \vec{a}_D^e + \vec{a}_D^r + \vec{a}_D^c, \quad (1.4)$$

де $\vec{a}_D^a = \vec{a}_D^\tau + \vec{a}_D^n$ - абсолютне прискорення точки D при обертальному русі навколо точки O , складові відомі за величиною та напрямком;

$\vec{a}_D^e = \vec{a}_D^{e\tau} + \vec{a}_D^{en}$ - прискорення точки D при переносному русі, складові відомі за напрямком, а \vec{a}_D^{en} ще й за величиною;

\vec{a}_D^r - прискорення точки D при відносному русі відносно куліси CD напрямлене по лінії CD ;

$\vec{a}_D^c = 2\vec{\omega}_4 \times \vec{v}_D^r$ - прискорення Коріоліса, величина і напрямок якого визначаються за загальними правилами обчислення векторного добутку або за правилом Жуковського. Щоб визначити напрямок вектора прискорення Коріоліса необхідно:

1. спроектувати вектор відносної швидкості \vec{v}_D^r на площину, що перпендикулярна вектору кутової швидкості $\vec{\omega}_4$;

2. повернути проекцію відносної швидкості на 90° в бік кутової швидкості.

Таким чином, для побудови векторного багатокутника за рівнянням (1.4) маємо замикаючий вектор \vec{a}_D^a складові якого:

$$a_D^\tau = \varepsilon_1 l_{OD} = 20 \cdot 0,106 = 2,12 \text{ м/с}^2,$$

$$a_D^n = \omega_1^2 l_{OD} = 10^2 \cdot 0,106 = 10,6 \text{ м/с}^2.$$

Прискорення \vec{a}_D^r направлене перпендикулярно OD в бік кутового прискорення ϵ_1 . Прискорення \vec{a}_D^n направлене від точки D до точки O .

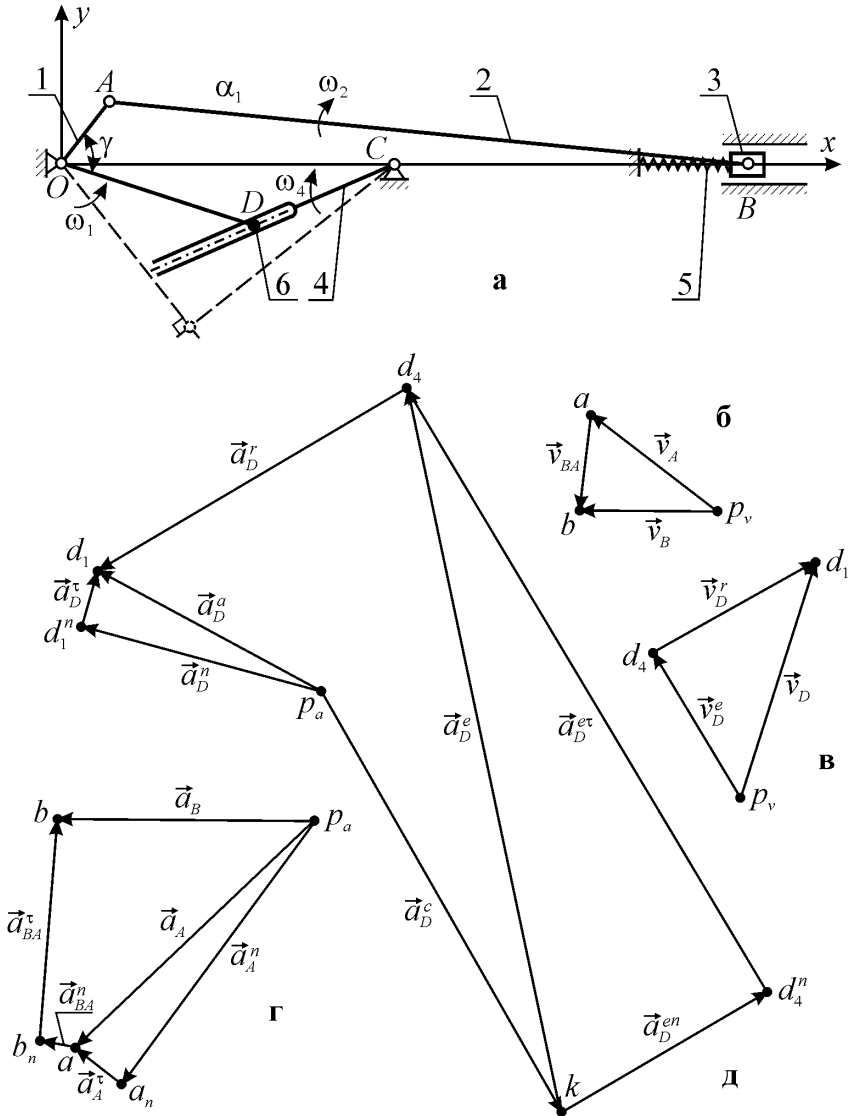


Рис. 1.3

Знайдемо прискорення, що знаходяться в правій частині рівності (1.4).

$$a_D^{en} = \omega_4^2 l_{CD} = 13,64^2 \cdot 0,055 = 10,23 \text{ м/с}^2,$$

$$a_D^c = 2\omega_4 v_D^r \sin(\bar{\omega}_4, \bar{v}_D^r) = 2 \cdot 13,64 \cdot 0,75 \cdot \sin 90^\circ = 20,46 \text{ м/с}^2.$$

Зазначимо, що прискорення \bar{a}_D^{en} направлене від точки D до точки C , прискорення \bar{a}_D^{et} направлене перпендикулярно до куліси CD , прискорення \bar{a}_D^r паралельне кулісі CD , прискорення \bar{a}_D^c направлене перпендикулярно до куліси CD .

Побудову векторного багатокутника починаємо з побудови відомих векторів прискорень в масштабі $\mu_a = 0,25 \text{ м/(с}^2 \cdot \text{мм)}$. З точки p_a відкладаємо вектор $\bar{a}_D^a = \bar{a}_D^t + \bar{a}_D^n$, в результаті отримуємо точку d_1 . Вектор \bar{a}_D^c також відкладаємо з точки p_a , в результаті отримуємо точку k . З точки k відкладаємо вектор \bar{a}_D^{en} і одержуємо точку d_4^n . З точки d_4^n проводимо лінію, паралельну вектору \bar{a}_D^{et} , а з точки d_1 проводимо лінію, паралельну вектору \bar{a}_D^r до їх перетину в точці d_4 (рис. 1.3, д). На рис 1.3, д показуємо напрямки прискорень $\bar{a}_D^a, \bar{a}_D^t, \bar{a}_D^n, \bar{a}_D^e, \bar{a}_D^{et}, \bar{a}_D^{en}, \bar{a}_D^r, \bar{a}_D^c$, та за допомогою отриманого плану прискорень визначаємо невідомі прискорення:

$$a_D^r = 16,25 \text{ м/с}^2, \quad a_D^{et} = 28,75 \text{ м/с}^2.$$

Кутове прискорення ε_4 направлене за ходом годинникової стрілки і в даному положенні мальтійського хреста дорівнює:

$$\varepsilon_4 = \frac{a_D^{et}}{l_{CD}} = \frac{28,75}{0,055} = 522,7 \text{ рад/с}^2.$$

1.4 Визначення параметрів руху ланок механізму

Для визначення параметрів руху ланок механізму контактора за допомогою кінематичних рівнянь та рівнянь динаміки здійснимо їх кінематичний і динамічний аналіз. Розв'язок цих рівнянь на ЕОМ, з використанням чисельного методу інтегрування диференціальних рівнянь [1], дозволяє отримати графічну залежність кінематичних і динамічних параметрів руху всіх ланок механізму контактора. Аналіз графічної залежності дозволяє зробити висновок про відповідність руху ланок механізму заданим вимогам або намітити шляхи доробок ланок механізму з подальшим повторенням аналізу руху ланок механізму контактора.

1.4.1 Кінематичний аналіз механізму

1. Визначення переміщень ланок механізму.

Знайдемо залежності $\alpha_4 = \alpha_4(\alpha_1)$, $x_B = x_B(\alpha_1)$.

Рівняння замкнутості кривошипно-шатунного механізму (ланки 1, 2, 3) має вигляд:

$$\vec{l}_{OA} + \vec{l}_{AB} = \vec{l}_{OB}. \quad (1.5)$$

В проекціях на осі координат Ox рівняння (1.5) матиме вигляд:

$$\left. \begin{aligned} l_{OA} \cos \alpha_1 + l_{AB} \cos \alpha_2 &= x_B, \\ l_{OA} \sin \alpha_1 + l_{AB} \sin \alpha_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

З другого рівняння системи (1.5) знаходимо

$$\alpha_2 = -\arcsin\left(\frac{l_{OA}}{l_{AB}} \sin \alpha_1\right). \quad (1.7)$$

В початковий момент часу $\angle ODC = 90^\circ$. Тому

$$l_{OD} = l_{OC} \sin\left(\frac{\pi}{Z}\right) \text{ і } \alpha_{10} = \gamma + \frac{\pi}{Z} - \frac{\pi}{2}. \quad (1.8)$$

Враховуючи, що

$$\angle D_0OD = \frac{\pi}{2} - \theta - \arcsin\left[\frac{l_{OC}}{l_{OD}} \sin\left(\frac{\pi}{Z} - \theta\right)\right],$$

отримаємо в поточний момент часу

$$\alpha_1 = \alpha_{10} + \angle D_0OD = \gamma + \frac{\pi}{Z} - \theta - \arcsin\left[\frac{l_{OC}}{l_{OD}} \sin\left(\frac{\pi}{Z} - \theta\right)\right]. \quad (1.9)$$

Для визначення α_4 розглянемо рівняння замкнутості контуру ODC :

$$\vec{l}_{OD} + \vec{l}_{DC} = \vec{l}_{OC}. \quad (1.10)$$

В проекціях на осі координат Ox рівняння (1.10) матиме вигляд:

$$\left. \begin{aligned} l_{OD} \cos(\alpha_1 - \gamma) + l_{DC} \cos \alpha_4 &= l_{OC}, \\ l_{OD} \sin(\alpha_1 - \gamma) + l_{DC} \sin \alpha_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Розв'язавши систему (1.11) відносно α_4 отримаємо:

$$\alpha_4 = \arctg\left[\frac{l_{OD} \sin(\alpha_1 - \gamma)}{l_{OD} \cos(\alpha_1 - \gamma) - l_{OC}}\right]. \quad (1.12)$$

Задаючи крок по α_1 або θ знаходимо значення α_4 , x_B , по яким будуємо відповідні графіки.

2. Визначення узагальнених швидкостей та прискорень ланок механізму.

Знайдемо залежності $v_B = v_B(\alpha_1)$; $a_B = a_B(\alpha_1)$; $\omega_4 = \omega_4(\alpha_1)$; $\varepsilon_4 = \varepsilon_4(\alpha_1)$. По графікам визначити їх максимальне по модулю значення.

Продиференціюємо за часом t рівняння (1.6). Отримаємо

$$\left. \begin{aligned} -l_{OA}\omega_1 \sin \alpha_1 - l_{AB}\omega_2 \sin \alpha_2 &= v_B, \\ l_{OA}\omega_1 \cos \alpha_1 + l_{AB}\omega_2 \cos \alpha_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Розв'язок системи (1.13) має вигляд:

$$\omega_2 = -\frac{l_{OA}\omega_1 \cos \alpha_1}{l_{AB} \cos \alpha_2} = -k_{\omega 2}\omega_1, \quad (1.14)$$

$$v_B = l_{OA}\omega_1 (\cos \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 - \sin \alpha_1) = k_v \omega_1, \quad (1.15)$$

де

$$k_{\omega 2} = \frac{l_{OA} \cos \alpha_1}{l_{AB} \cos \alpha_2}, \quad k_v = l_{OA} (\cos \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 - \sin \alpha_1). \quad (1.16)$$

Прискорення ε_2 і a_B знайдемо, якщо продиференціюємо за часом рівняння (1.14) і (1.15):

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = -k_{\varepsilon 2}\omega_1^2 - k_{\omega 2}\varepsilon_1, \quad (1.17)$$

$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = k_a \omega_1^2 + k_v \varepsilon_1, \quad (1.18)$$

де

$$k_{\varepsilon 2} = \frac{l_{OA} \sin \alpha_1 (l_{OA}^2 - l_{AB}^2)}{\sqrt{(l_{AB}^2 - l_{OA}^2 \sin^2 \alpha_1)^3}}, \quad (1.19)$$

$$k_a = -\frac{l_{OA}[l_{OA}l_{AB}^2 \cos 2\alpha_1 + l_{OA}^3 \sin^4 \alpha_1 + \cos \alpha_1 \sqrt{(l_{AB}^2 - l_{OA}^2 \sin^2 \alpha_1)^3}]}{\sqrt{(l_{AB}^2 - l_{OA}^2 \sin^2 \alpha_1)^3}}. \quad (1.20)$$

При знаходженні ω_4 і ε_4 використаємо залежність (1.12), отримаємо:

$$\omega_4 = \frac{d\alpha_4}{dt} = k_{\omega 4}\omega_1, \quad (1.21)$$

$$\varepsilon_4 = \frac{d\omega_4}{dt} = k_{\varepsilon 4}\omega_1^2 + k_{\omega 4}\varepsilon_1, \quad (1.22)$$

де

$$k_{\omega 4} = \frac{l_{OD}[l_{OD} - l_{OC} \cos(\alpha_1 - \gamma)]}{[l_{OC}^2 + l_{OD}^2 - 2l_{OD}l_{OC} \cos(\alpha_1 - \gamma)]}, \quad (1.23)$$

$$k_{\varepsilon 4} = \frac{l_{OD}l_{OC}(l_{OC}^2 - l_{OD}^2) \sin(\alpha_1 - \gamma)}{[l_{OC}^2 + l_{OD}^2 - 2l_{OD}l_{OC} \cos(\alpha_1 - \gamma)]^2}. \quad (1.24)$$

1.4.2 Динамічний аналіз механізма

3. Визначення зрівноважуючого моменту.

Визначити зрівноважуючий момент $M_{зр}$, який необхідно прикласти до кривошипа 1 для забезпечення його обертання з кутовою швидкістю $\omega_1=10$ 1/с під час однієї фази руху мальтійського хреста 4. Побудувати графік залежності $M_{зр}=M_{зр}(\alpha_1)$ і визначити $|M_{зр}|_{max}$.

Зрівноважуючим моментом, що прикладений до відповідної ланки, називають пару сил, робота якої на деякому переміщенні відповідної ланки дорівнює сумі робіт приведених сил і моментів на відповідних переміщеннях взятих з протилежним знаком. На основі теореми Жуковського принцип можливих переміщень перетворюється в принцип можливих потужностей. Сила пружності пружини змінює напрям під час деформації пружини і описується виразом:

$$F = -F_0 + c(x_{B0} - x_B), \quad (1.25)$$

де c – жорсткість пружини, Н/мм; F_0 – початкове зусилля пружини в момент входу цівки 6 в паз мальтійського хреста.

Ланки 1 і 4 здійснюють обертальний рух, тому миттєві потужності їх сил інерції мають вигляд:

$$P_1^{in} = -\varepsilon_1 J_1 \omega_1, \quad P_4^{in} = -\varepsilon_4 J_4 \omega_4. \quad (1.26)$$

Ланка 2 здійснює плоскопаралельний рух, тому миттєва потужність її сили інерції має вигляд:

$$P_2^{in} = -\varepsilon_2 J_2 \omega_2 - a_{C2} m_2 v_{C2}, \quad (1.27)$$

де v_{C2} , a_{C2} - відповідно швидкість та прискорення центра мас другої ланки (знаходимо з плану швидкостей та плану прискорень).

Ланка 3 здійснює поступальний рух, тому миттєва потужність її сили інерції має вигляд:

$$P_3^{in} = -a_B m_3 v_B. \quad (1.28)$$

Миттєва потужність сили пружності F :

$$P_F = [-F_0 + c(x_{B0} - x_B)]v_B. \quad (1.29)$$

Миттєва потужність моменту M_C :

$$P_{MC} = -M_C \omega_4. \quad (1.30)$$

Миттєва потужність зрівноважуючого моменту $M_{зр}$:

$$P_{зр} = M_{зр} \omega_1. \quad (1.31)$$

Миттєва потужність сил ваги має вигляд:

$$P_{GA} = -G_{OA} \cos \alpha_1 \frac{l_{OA}}{2} \omega_1, \quad P_{GD} = -G_{OD} \cos \angle COD \frac{l_{OD}}{2} \omega_1, \\ P_{G2} = -G_{AB} \cos \alpha_2 \frac{l_{AB}}{2} \omega_2, \quad P_{G4} = -G_4 \cos \left(\frac{\pi}{Z} - \theta \right) \frac{l_{CD0}}{2} \omega_4. \quad (1.32)$$

де

$$G_{OA} = m_{OA}g, \quad G_{OD} = m_{OD}g, \quad G_{AB} = m_{AB}g, \\ \cos \angle COD = \theta - \frac{\pi}{Z} + \arcsin \left[\frac{l_{OC}}{l_{OD}} \sin \left(\frac{\pi}{Z} - \theta \right) \right]. \quad (1.33)$$

Загальне рівняння динаміки (рівняння миттєвих потужностей) має вигляд:

$$\sum P_i + \sum P_i^{in} = 0. \quad (1.34)$$

де P_i – миттєва потужність всіх зовнішніх сил, прикладених до i -ої ланки механізму; P_i^{in} – миттєва потужність всіх сил інерції i -ої ланки механізму.

Підставляючи (1.26) – (1.32) в (1.34) матимемо:

$$M_{zp} = \frac{1}{\omega_1} \{ \varepsilon_1 J_1 \omega_1 + \varepsilon_4 J_4 \omega_4 + \varepsilon_2 J_2 \omega_2 + a_{C2} m_2 v_{C2} + a_B m_3 v_B + M_C \omega_4 + \\ + G_{OA} \cos \alpha_1 \frac{l_{OA}}{2} \omega_1 + G_{OD} \cos \angle COD \frac{l_{OD}}{2} \omega_1 + G_{AB} \cos \alpha_2 \frac{l_{AB}}{2} \omega_2 + \\ + G_4 \cos \left(\frac{\pi}{Z} - \theta \right) \frac{l_{CD_0}}{2} \omega_4 - [-F_0 + c(x_{B0} - x_B)] v_B \},$$

або після перетворень

$$M_{zp} = \varepsilon_1 J_1 + \varepsilon_4 J_4 k_{\omega 4} - \varepsilon_2 J_2 k_{\omega 2} + a_{C2} m_2 \frac{v_{C2}}{\omega_1} + a_B m_3 k_v + M_C k_{\omega 4} + \\ + G_{OA} \cos \alpha_1 \frac{l_{OA}}{2} + G_{OD} \cos \angle COD \frac{l_{OD}}{2} - G_{AB} \cos \alpha_2 \frac{l_{AB}}{2} k_{\omega 2} + \\ + G_4 \cos \left(\frac{\pi}{Z} - \theta \right) \frac{l_{CD_0}}{2} k_{\omega 4} - [-F_0 + c(x_{B0} - x_B)] k_v. \quad (1.35)$$

По результатам розрахунків будуватиметься графік M_{zp} , $kH \cdot m$.

4. Визначення приведенного моменту інерції J_{np} .

Потрібно побудувати графік залежності приведенного моменту інерції J_{np} від кута повороту α_1 ланки 1 та визначити $J_{np \max}$. При визначенні закону руху механізму зручно використовувати не дійсні маси ланок, а приведену масу, їм еквівалентну, умовно зосереджену на ланці приведення. Без обмеження загальності, можна вважати, що кінетична енергія приведеної маси рівна кінетичній енергії всього механізму.

Враховуючи, що ланки 1 і 4 здійснюють обертальний рух навколо нерухомих осей, ланка 2 здійснює плоскопаралельний рух, а повзун 3 – поступальний рух, кінетична енергія механізму має вигляд:

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + m_{AB} v_{C2}^2 + m_3 v_B^2 + J_4 \omega_4^2). \quad (1.36)$$

Приведений момент інерції має вигляд:

$$J_{np} = \frac{2T}{\omega_1^2} = J_1 + J_2 k_{\omega 2}^2 + m_{AB} \frac{v_{C2}^2}{\omega_1^2} + m_3 k_v^2 + J_4 k_{\omega 4}^2. \quad (1.37)$$

За формулою (1.37) будуємо графік залежності $J_{np} = J_{np}(\alpha_1)$ та визначаємо $J_{np \max}$.

5. Визначення приведенного моменту зовнішніх сил M_{np} .

Необхідно побудувати графік залежності приведенного моменту зовнішніх сил M_{np} від кута повороту ланки 1 і визначить $M_{np \max}$.

Приведений момент має визначатися з виразу:

$$M_{np} = -[F_0 + c(x_{B0} - x_B)]k_v + M_C k_{\omega 4}. \quad (1.38)$$

За формулою (1.38) будуємо графік залежності $M_{np} = M_{np}(\alpha_1)$ та визначаємо $M_{np \max}$.

6. Визначення закону руху ланки приведення.

Необхідно побудувати графік зміни кутової швидкості мальтійського хреста, якщо в початковий момент часу кутова швидкість кривошипа 1 $\omega_1(0)=0, \text{ рад/с}$.

При виборі ланки приведення кривошипа 1 диференціальне рівняння руху механізму матиме вигляд:

$$\ddot{\alpha}_1 J_{np} + \frac{\dot{\alpha}_1}{2} \frac{dJ_{np}}{d\alpha_1} = M_{np}. \quad (1.39)$$

З рівняння (1.37) знайдемо:

$$\frac{dJ_{np}}{d\alpha_1} = 2\dot{\alpha}_1 (J_2 k_{\omega 2} k_{\varepsilon 2} + m_3 k_v k_a + J_4 k_{\varepsilon 4}). \quad (1.40)$$

Підставивши (1.40) в (1.39) отримаємо:

$$\ddot{\alpha}_1 J_{np} + \dot{\alpha}_1^2 (J_2 k_{\omega 2} k_{\varepsilon 2} + m_3 k_v k_a + J_4 k_{\varepsilon 4}) = M_{np}. \quad (1.41)$$

Аналітичний розв'язок рівняння (1.41) отримати неможливо, тому використовуємо чисельний метод Рунге-Кутта.

В першу чергу обчислюємо параметри руху ланки приведення α_1 , $\dot{\alpha}_1$, $\ddot{\alpha}_1$, а переміщення, загальні швидкості і прискорення інших ланок визначаємо за відомим законом руху ланки приведення. По результатам обчислення будуємо графік залежності $\omega_4 = \omega_4(\alpha_1)$, з якого визначаємо $|\omega_4|_{\max}$, а також визначаємо час однієї фази руху мальтійського хреста.

При застосуванні метода Рунге-Кутта, диференціальне рівняння (1.41) перетворюється на два диференціальних рівняння 1-го порядку:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= \omega_1, \\ \dot{\omega}_1 &= f(\alpha_1, \omega_1), \end{aligned}$$

$$f(\alpha_1, \omega_1) = \frac{1}{J_{np}} \left(M_{np} - \frac{\omega_1}{2} \frac{dJ_{np}}{d\alpha_1} \right).$$

Задаючи крок інтегрування $\Delta t = H = 0,005$ с, знаходимо значення α_{1+i} і ω_{1+i} i -тому кроці інтегрування по формулам:

$$\alpha_{1+i} = \alpha_{1+i-1} + \Delta\alpha_{1+i}, \quad \omega_{1+i} = \omega_{1+i-1} + \Delta\omega_{1+i},$$

де

$$\Delta\alpha_{1+i} = (S_{1i} + 2S_{2i} + 2S_{3i} + S_{4i})/6, \quad \Delta\omega_{1+i} = (F_{1i} + 2F_{2i} + 2F_{3i} + F_{4i})/6,$$

$$S_{1i} = H \cdot \omega_{1i}, \quad F_{1i} = H \cdot f(\alpha_{1i}, \omega_{1i}),$$

$$S_{2i} = H \cdot (\omega_{1i} + 0.5F_{1i}), \quad F_{2i} = H \cdot f(\alpha_{1i} + 0.5S_{1i}, \omega_{1i}, F_{1i}),$$

$$S_{3i} = H \cdot (\omega_{1i} + 0.5F_{2i}), \quad F_{3i} = H \cdot f(\alpha_{1i} + 0.5S_{2i}, \omega_{1i}, F_{2i}),$$

$$S_{4i} = H \cdot (\omega_{1i} + F_{3i}), \quad F_{4i} = H \cdot f(\alpha_{1i} + 0.5S_{3i}, \omega_{1i}, F_{3i}).$$

Частина II. Розрахунки на міцність, жорсткість і стійкість елементів конструкції електричних мереж та електричних машин

2.1 Розрахунок на міцність проводів повітряних електричних мереж

Задача 1. Розрахунок на міцність проводів повітряних електричних мереж.

Багатожильний алюмінієвий дріт ($E=0,7 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha=20 \cdot 10^{-6}$ 1/с) ліній електропередач площею поперечного перерізу A , діаметром d та вагою одиниці довжини q , підвішують при температурі T_0 до опор, котрі знаходяться на одному рівні на відстані l .

Визначити:

1. яку стрілу провисання f_0 необхідно надати дроту, щоб напруження в найбільш небезпечному положенні дорівнювало допустимому;

2. висоту точок підвішування дроту, щоб відстань його найнижчої точки від землі була не менше $H=6$ м.

Розрахунки дроту виконати для таких випадків:

а) температура ожеледі $T_{ож}=-5$ °С; при цьому на дроті утворюється шар льоду завтовшки h , а також діє тиск вітру (горизонтальний) p .

б) мінімальна температура повітря (з врахуванням географічних умов) T_{min} .

в) максимальна температура повітря T_{max} .

Вихідні дані приведені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

№ рядка	$A, \text{мм}^2$	$d, \text{мм}$	$q, \text{Н/м}$	$[\sigma], \text{МПа}$	$l, \text{м}$	$h, \text{мм}$	$T_0, \text{°C}$	$T_{max}, \text{°C}$	$T_{min}, \text{°C}$	$p, \text{Па}$
1	70	10,9	1,9	78	110	11	17	41	-25	150
2	93,1	12,5	2,57	68	120	12	16	42	-26	160
3	117	14	3,21	64	130	13	15	43	-27	170
4	167	16,8	4,58	60	140	14	14	44	-28	180
5	183	17,6	5,03	56	150	15	13	45	-29	190
6	195	18,2	5,35	52	160	16	12	46	-30	200
7	208	18,7	5,72	50	170	17	11	47	-31	210
8	221	19,4	6,07	54	180	18	10	48	-32	220
9	248	20,4	6,87	48	190	19	9	49	-33	230
0	239	20,1	6,56	45	200	20	8	50	-34	240
	г	д	е	г	д	е	г	д	е	г

Короткі теоретичні відомості

В поперечних перерізах дротів повітряних електричних мереж діє лише осьова (поздовжня) сила розтягу. При розрахунку на міцність довгих гнучких дротів істотне значення має їх власна вага $q_{ел}$. Навантаження q може включати в себе також вагу льду q_l при обледенінні дротів та тиск вітру $q_в$:

$$q = \sqrt{(q_{ел} + q_l)^2 + q_в^2}. \quad (2.1.1)$$

Для спрощення розрахунків з достатньою точністю можна вважати, що навантаження, яке діє на підвішений дріт, рівномірно розподілене по всій довжині між точками його підвішування.

Величина f , відхилення дроту від лінії підвішування, виміряна посередині прольоту l , називається **стрілою провисання**.

Горизонтальна складова сили розтягу $T_{гор}$ в будь-якому поперечному перерізі дроту постійна і називається **горизонтальним натягом**. Найбільша сила розтягу T_{max} діє у найвищій точці підвішування дроту:

$$T_{max} = \sqrt{T_{гор}^2 + \left(\frac{ql}{2}\right)^2}. \quad (2.1.2)$$

З достатньою для практики точністю можна вважати, що сила розтягу з часом не змінюється, тобто

$$T_{max} \approx T_{гор}. \quad (2.1.3)$$

Посередині прольоту залежність між горизонтальним натягом $T_{гор}$ і стрілою провисання f має вигляд:

$$f = \frac{ql^2}{8T_{гор}} \quad \text{або} \quad T_{гор} = \frac{ql^2}{8f}. \quad (2.1.4)$$

Умову міцності можна записати у вигляді:

$$\sigma = \frac{T_{max}}{A} \approx \frac{T_{гор}}{A} \leq [\sigma] \quad \text{або} \quad \sigma = \frac{ql^2}{8Af} \leq [\sigma]. \quad (2.1.5)$$

Введемо позначення $q/A = \tilde{\gamma}$, тоді формулу (2.1.5) можна записати у вигляді:

$$\sigma = \frac{\tilde{\gamma}l^2}{8f} \leq [\sigma]. \quad (2.1.6)$$

В процесі експлуатації дріт зазнає впливу різних навантажень q та температур T . При зміні цих факторів змінюється напруження σ та стріла провисання дроту f . Залежність між напруженнями та стрілами провисання для станів m і n

$$\sigma_n - \frac{\tilde{\gamma}_n^2 l^2 E}{24\sigma_n^2} = \sigma_m - \frac{\tilde{\gamma}_m^2 l^2 E}{24\sigma_m^2} + \alpha E(T_m - T_n), \quad (2.1.7)$$

називають рівнянням стану дроту.

Напруження також можна виразити через стріли провисання:

$$\sigma_m = \frac{\tilde{\gamma}_m l^2}{8 f_m}, \quad \sigma_n = \frac{\tilde{\gamma}_n l^2}{8 f_n}. \quad (2.1.8)$$

Враховуючи (2.1.8) рівняння стану дроту матиме вигляд:

$$f_n^3 - \left[f_m^2 + \frac{3}{8} \alpha l^2 (T_n - T_m) - \frac{3}{64} \frac{\tilde{\gamma}_m l^4}{E f_m} \right] f_n - \frac{3}{64} \frac{\tilde{\gamma}_n l^4}{E} = 0. \quad (2.1.9)$$

Зауважимо, що кубічне рівняння, як наприклад рівняння (2.1.9), можна розв'язати графічним способом. Рівняння, яке має вигляд

$$f_n^3 - a f_n - b = 0$$

при графічному розв'язанні можна подати так

$$f_n^3 = a f_n + b, \quad (2.1.10)$$

де a та b – відомі числа.

У прямокутних координатах y, f_n будемо графіки

$$y = f_n^3 \text{ та } y = a f_n + b. \quad (2.1.11)$$

Точка перетину кубічної параболи з прямою лінією дає дійсний корінь рівняння, а отже, шукану величину f_n .

Проліт називають **критичним** ($l_{кр}$), якщо напруження в дроті однакове в обох станах, тобто як при найбільшому навантаженні (стан n : $T_n = T_{ож} = -5^0\text{C}$, $\tilde{\gamma}_n = \tilde{\gamma}_{\max}$, $\sigma_n = [\sigma]$), так і при найнижчій температурі (стан m : $T_m = T_{\min}$, $\tilde{\gamma}_m = \tilde{\gamma}_1$ – тільки власна вага, $\sigma_m = [\sigma]$).

$$l_{кр} = [\sigma] \sqrt{\frac{24\alpha(T_n - T_m)}{\tilde{\gamma}_{\max}^2 - \tilde{\gamma}_1^2}}. \quad (2.1.12)$$

Порівнюючи розрахунковий проліт з критичним, можна встановити, за яких умов у дроті діє найбільше напруження. Якщо $l < l_{кр}$, то найбільше напруження виникає при $T = T_{\min}$, $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1$; якщо $l > l_{кр}$, то найбільше напруження виникає при найбільшому навантаженні.

Приклад. Багатожильний мідний дріт перерізом $A=120 \text{ мм}^2$ підвішують при температурі $T_0=15^0\text{C}$ до опор, які розташовані на одному рівні на відстані $l=100 \text{ м}$.

Необхідно визначити:

а) яку стрілу провисання f_0 необхідно надати дроту, щоб напруження в найбільш небезпечному стані дорівнювало допустимому;

б) висоту точок підвішування дроту, щоб відстань його найнижчої точки від землі була не менша 6 м .

Розв'язок

Розрахунок дроту виконуємо для таких випадків:

1. температура $T_{ож} = -5$ °С, при цьому дріт крім власної ваги навантажений шаром льоду завтовшки 1 см, а також горизонтальним тиском вітру $p = 240$ Па;

2. температура $T_{min} = -40$ °С, вважаємо, що діє тільки власна вага дроту;

3. температура $T_{max} = -40$ °С, вважаємо, що діє тільки власна вага дроту.

Перші два випадки можуть бути небезпечними з погляду міцності дроту. У третьому випадку може утворитися найбільша стріла провисання, за якою необхідно визначити мінімальну висоту точок підвішування дроту.

Згідно з сортаментом дротів, багатожильний мідний дріт перерізом $A = 120$ мм² має діаметр $d = 1,42$ мм та вагу одиниці довжини $q_{вл} = 10,9$ Н/м. Модуль пружності матеріалу дроту $E = 1,3 \cdot 10^{11}$ Па, коефіцієнт лінійного температурного розширення $\alpha = 17 \cdot 10^{-6}$ 1/°С. Допустиме напруження дроту $[\sigma] = 80$ МПа.

Знайдемо навантаження q_{max} у першому випадку. Для визначення ваги льоду треба знайти внутрішній та зовнішній діаметри льодового покриву. Внутрішній діаметр дорівнює діаметру дроту, тобто $d = 1,42$ см; зовнішній діаметр D при товщині льодової оболонки 1 см $D = 3,42$ см.

Площа поперечного перерізу льодового покриття дроту:

$$A_l = \pi(D^2 - d^2) / 4 = 3,14(3,42^2 - 1,42^2) / 4 = 7,6 \text{ см}^2.$$

При питомій вазі льоду $\gamma_l = 9 \cdot 10^3$ Н/м³ навантаження від льоду на 1 м довжини дроту:

$$q_l = \gamma_l A_l = 9 \cdot 10^3 \cdot 7,6 \cdot 10^{-4} = 6,84 \text{ Н/м}.$$

Тиск вітру на 1 м довжини дроту з льодовим покриттям:

$$q_6 = pD = 240 \cdot 3,42 \cdot 10^{-2} = 8,21 \text{ Н/м}.$$

Повне навантаження на 1 м довжини обледенілого дроту:

$$q_{max} = \sqrt{(q_{вл} + q_l)^2 + q_6^2} = \sqrt{(10,9 + 6,84)^2 + 8,21^2} = 19,56 \text{ Н/м}.$$

З'ясуємо, в якому із перших двох станів дроту напруження в ньому буде найбільшим:

$$\tilde{\gamma}_{max} = \frac{q_{max}}{A} = \frac{19,56}{1,2 \cdot 10^{-4}} = 16,3 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3,$$

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{q_n}{A} = \frac{10,9}{1,2 \cdot 10^{-4}} = 9,08 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3.$$

За формулою (2.1.12) визначаємо довжину критичного прольоту:

$$l_{кр} = [\sigma] \sqrt{\frac{24\alpha(T_n - T_m)}{\tilde{\gamma}_{\max}^2 - \tilde{\gamma}_1^2}} = 80 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{24 \cdot 17 \cdot 10^{-6} [-5 - (-40)]}{(16,3^2 - 9,08^2) \cdot 10^8}} = 70,6 \text{ м.}$$

Оскільки дійсна довжина прольоту $l=100$ м більша, ніж довжина критичного прольоту, то найбільше напруження в проводі σ_{\max} буде при максимальному навантаженні ($q_{\max}=19,56$ Н/м і $T_{ож}=-5^{\circ}\text{C}$), тобто в першому стані. Взявши $\sigma_{\max}=[\sigma]$, знайдемо стрілу провисання дроту в цьому стані:

$$f_1 = \frac{q_{\max} l^2}{8A[\sigma]} = \frac{19,56 \cdot 100^2}{8 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} \cdot 80 \cdot 10^6} = 2,54 \text{ м.}$$

Визначимо, яку стрілу провисання треба надати дроту при підвішуванні. Для цього скористаємося залежністю (2.1.9), враховуючи, що $q_m=q_{\max}=19,56$ Н/м; $q_{вл}=10,9$ Н/м; $f_m=f_1=2,54$ м; $T_m=T_{ож}=-5^{\circ}\text{C}$; $T_n=T_0=15^{\circ}\text{C}$; $f_n=f_0$. Підставивши числові значення в рівняння (2.1.9), отримаємо:

$$f_0^3 - \left[2,54^2 + \frac{3}{8} 17 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 (15 + 5) - \frac{3 \cdot 10,9 \cdot 100^4}{64 \cdot 2,54 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} \cdot 1,3 \cdot 10^{11}} \right] f_0 - \frac{3 \cdot 19,56 \cdot 100^4}{64 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} \cdot 1,3 \cdot 10^{11}} = 0.$$

Виконавши розрахунки, маємо

$$f_0^3 - 5,41 f_0 - 3,28 = 0.$$

Розв'язавши рівняння, знайдемо $f_0 = 2,58$ м.

Визначимо тепер стрілу провисання дроту при $T_{\max}=40^{\circ}\text{C}$. Для цього також скористаємося залежністю (2.1.9), враховуючи, що $q_m=q_{\max}=19,56$ Н/м; $q_{вл}=10,9$ Н/м; $f_m=f_0=2,58$ м; $T_m=T_0=15^{\circ}\text{C}$; $f_n=f_3$.

Підставивши числові значення, матимемо:

$$f_3^3 - \left[2,58^2 + \frac{3}{8} 17 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 (40 - 15) - \frac{3 \cdot 10,9 \cdot 100^4}{64 \cdot 2,58 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} \cdot 1,3 \cdot 10^{11}} \right] f_3 - \frac{3 \cdot 19,56 \cdot 100^4}{64 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} \cdot 1,3 \cdot 10^{11}} = 0.$$

Виконавши розрахунки, маємо

$$f_3^3 - 7 f_3 - 3,28 = 0.$$

звідки знаходимо, що $f_3=2,85$ м.

Стріла провисання в третьому стані більша ніж у першому випадку. Очевидно, що вона більша за стрілу провисання, яку матиме дріт у другому випадку (при $T_{\min}=-40^{\circ}\text{C}$).

Для того, щоб найнижча точка дроту була на відстані не меншій, ніж 6 м від землі, треба, щоб точки підвішування розташовувалися не нижче, ніж $6+2,85=8,85$ м.

2.2 Кручення валу круглого поперечного перерізу

Задача 2. Кручення валу круглого поперечного перерізу.

До сталюого валу прикладені три відомих моменти: M_1 , M_2 , M_3 (рис. 2.1).

Використовуючи вихідні дані (табл. 2.2) необхідно визначити:

1) при якому значенні момента X кут повороту правого кінцевого перерізу вала дорівнює нулю;

2) для знайденого значення X побудувати епюру крутних моментів;

3) при заданому значенні $[\tau]$ визначити діаметр валу з урахуванням міцності і округлити його значення до найближчого, рівного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм;

4) побудувати епюру кутів закручування;

5) знайти найбільший відносний кут закручування (на 1 м).

Таблиця 2.2

№ рядка	Схема по рис. 2.1	Відстань, м			Моменти, Н·м			[τ], МПа
		a	b	c	M_1	M_2	M_3	
1	I	1,1	1,1	1,1	1100	1100	1100	35
2	II	1,2	1,2	1,2	1200	1200	1200	40
3	III	1,3	1,3	1,3	1300	1300	1300	45
4	IV	1,4	1,4	1,4	1400	1400	1400	50
5	V	1,5	1,5	1,5	1500	1500	1500	55
6	VI	1,6	1,6	1,6	1600	1600	1600	60
7	VII	1,7	1,7	1,7	1700	1700	1700	65
8	VIII	1,8	1,8	1,8	1800	1800	1800	70
9	IX	1,9	1,9	1,9	1900	1900	1900	75
0	X	2,0	2,0	2,0	2000	2000	2000	80
	е	г	д	е	г	д	е	г

Короткі теоретичні відомості

При навантаженні прямого бруса (валу) зовнішніми моментами, площини дії яких перпендикулярні його поздовжній осі, в поперечних перерізах бруса виникає тільки один внутрішній силовий фактор – крутний момент $T=M_{кр}$. Такий вид деформації називається крученням. При крученні відбувається поворот одного поперечного перерізу бруса відносно іншого на деякий кут φ – кут закручування.

Крутний момент в перерізі чисельно рівний алгебраїчній сумі зовнішніх (крутних) моментів, діючих на дану частину бруса (інша частина бруса відкинута). Крутний момент в перерізі вважається позитивним, якщо

зовнішній момент обертає відсічену частину проти годинникової стрілки, якщо дивитися на переріз із сторони відкинutoї частини бруса, і негативним – в протилежному випадку. По знайдених значенням крутних моментів будують епюру крутних моментів.

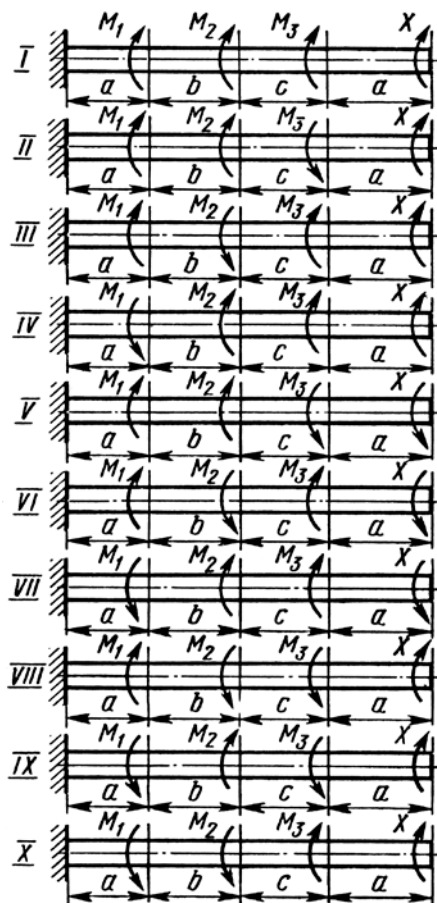


Рис. 2.1.

Умови міцності при крученні бруса круглого поперечного перерізу при статичному навантаженні мають вигляд:

$$\tau_{\max} = T / W_{\rho} \leq [\tau]. \quad (2.2.1)$$

де τ_{\max} – максимальне дотичне напруження в найбільш небезпечному перерізі бруса; T – крутний момент в небезпечному перерізі; W_{ρ} – полярний момент опору поперечного перерізу бруса; $[\tau]$ – допустиме дотичне напруження.

Умова жорсткості валу при крученні має вигляд:

$$\theta = \frac{T}{GJ_{\rho}} \leq [\theta]. \quad (2.2.2)$$

де θ – відносний кут закручування в радіанах на одиницю довжини валу; G – модуль пружності другого роду (модуль пружності при зсуві); J_{ρ} – полярний момент інерції; $[\theta]$ – допустимий відносний кут закручування.

Кут закручування φ валу на ділянці завдовжки l визначаємо за формулою:

$$\varphi = \frac{Tl}{GJ_{\rho}}. \quad (2.2.3)$$

По значеннях кутів закручування валу на всіх ділянках будемо епюри кутів закручування.

Приклад. До сталевого валу прикладені три зовнішніх момента, два з яких відомі: $M_1=1,3 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_2=2 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Відомі також відстані ділянок, до яких прикладені зовнішні моменти: $a=1 \text{ м}$; $b=1,5 \text{ м}$; $c=2 \text{ м}$. На рис. 2.2.а показана схема навантаження валу. Для моментів прийняті умовні позначки у вигляді двох кіл. Коло з точкою позначає силу, напрямлену на спостерігача, а коло зі знаком плюс – від спостерігача.

Необхідно:

1. встановити, при якому значенні невідомого зовнішнього моменту X кут повороту правого кінцевого перерізу валу дорівнює нулю;
2. побудувати епюру крутних моментів;
3. визначити діаметр валу з розрахунку на міцність при $[\tau]=50 \text{ МПа}$ і округлити його величину до найближчої більшої: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм;
4. побудувати епюру кутів закручування при $G=8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$;
5. знайти найбільший відносний кут закручування і перевірити виконання умови жорсткості при $[\theta]=2 \text{ град/м}$.

Розв'язок

1. Визначаємо значення невідомого зовнішнього моменту, при якому кут повороту правого кінцевого перерізу D , дорівнює нулю по відношенню до нерухомого перерізу A ($\varphi_{DA}=0$):

$$\varphi_{DA} = -\frac{1}{GJ_{\rho}} [M_1 a + M_2 (a+b) - X(a+b+c)] = 0,$$

звідки знаходимо

$$X = \frac{M_1 a + M_2 (a+b)}{a+b+c} = \frac{1,3 \cdot 1 + 2 \cdot (1+1,5)}{1+1,5+2} = 1,4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Додатне значення X означає, що напрямок невідомого зовнішнього моменту співпадає з обраним.

2. Крутні моменти на ділянках валу визначають методом перерізів.

Ділянка III: $T^{III} = X = 1,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

Ділянка II: $T^{II} = X - M_2 = 1,4 - 2 = -0,6 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

Ділянка I: $T^I = X - M_2 - M_1 = 1,4 - 2 - 1,3 = -1,9 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Будуємо епюру крутних моментів (рис. 2.2, б), яка показує зміну крутного моменту по довжині валу.

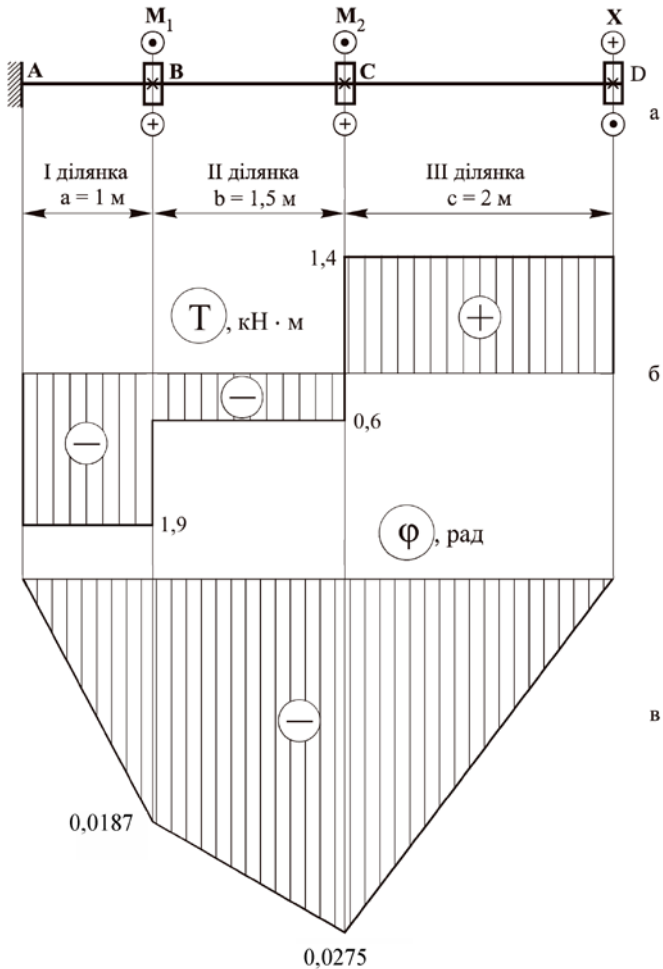


Рис. 2.2

3. З умови міцності (2.2.1) визначаємо полярний момент опору, а потім і діаметр валу, враховуючи, що для вала круглого поперечного перерізу $W_p = \pi \cdot d^3 / 16$. Діаметр валу визначається за формулою:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{\max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,9 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 50 \cdot 10^6}} = 0,0578 \text{ м.}$$

Приймаємо діаметр валу 60 мм.

4. Для визначення кутів закручування вала на кожній ділянці знаходимо спочатку полярний момент інерції поперечного перерізу

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 6^4}{32} = 127 \text{ см}^4 = 127 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

а потім жорсткість поперечного перерізу вала при крученні

$$GJ_p = 8 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \cdot 127 \cdot 10^{-8} = 101,8 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Визначаємо кут закручування.

На I ділянці кут закручування вала складає:

$$\varphi_{BA} = \frac{T^I a}{GJ_p} = -\frac{1,9 \cdot 1}{101,8} = -0,0187 \text{ рад.}$$

На II ділянці кут закручування вала складає:

$$\varphi_{CB} = \frac{T^{II} b}{GJ_p} = -\frac{0,6 \cdot 1,5}{101,8} = -0,0088 \text{ рад.}$$

На III ділянці кут закручування вала складає:

$$\varphi_{DC} = \frac{T^{III} c}{GJ_p} = \frac{1,4 \cdot 2}{101,8} = 0,0275 \text{ рад.}$$

Кут повороту перерізу D відносно перерізу A складає:

$$\varphi_{DA} = \varphi_{BA} + \varphi_{CB} + \varphi_{DC} = -0,0187 - 0,0088 + 0,0275 = 0 \text{ рад.}$$

Рівність нулю кута повороту правого кінцевого перерізу валу вказує на правильність розв'язку задачі. За отриманими даними будуємо епюру кутів закручування валу (рис. 2.2. в).

5. Найбільший відносний кут закручування валу має місце на I ділянці (тут діє максимальний крутний момент $T_{\max} = |-1,9| = 1,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

$$\theta_{\max} = \frac{T_{\max}}{GJ_p} = \frac{1,9}{101,8} = 0,0187 \text{ рад/м} = 1,87 \text{ град/м.}$$

Оскільки $\theta_{\max} = 1,87 < 2 = [\theta]$, то умова жорсткості виконується.

2.3 Розрахунок балок на міцність при згинанні

Задача 3. Розрахунок балок на міцність при згинанні.

Використовуючи вихідні дані (табл. 2.3), для заданої схеми балки (рис. 2.3) необхідно знайти вирази, що описують зміну Q та M для кожної ділянки у загальному вигляді, побудувати епюри Q і M , знайти M_{\max} і підібрати сталю балку двотаврового поперечного перерізу при $[\sigma]=160$ МПа.

Таблиця 2.3

№ рядка	Схема по рис. 2.3	$l=10a, \text{ м}$	Відстань в частках			$M, \text{ кН}\cdot\text{м}$	$F, \text{ кН}$	$q, \text{ кН/м}$
			$\frac{a_1}{a}$	$\frac{a_2}{a}$	$\frac{a_3}{a}$			
1	I	3	4	5	3	5	6	7
2	II	4	5	6	4	6	7	8
3	III	5	6	7	5	7	8	9
4	IV	6	7	8	6	8	9	10
5	V	7	8	3	7	9	10	12
6	VI	8	4	4	8	10	6	14
7	VII	9	5	5	3	6	7	15
8	VIII	10	6	6	4	8	8	16
9	IX	3	7	7	5	9	9	18
0	X	4	8	8	6	10	10	20
	e	e	г	д	e	г	д	e

Короткі теоретичні відомості

Згинання – це такий вид деформації, коли під дією зовнішніх сил відбувається викривлення подовжньої осі стержня (балки). Згинання називається чистим, якщо в поперечному перерізі балки виникає тільки один внутрішній силовий фактор – **згинаючий момент**.

Якщо від дії зовнішнього навантаження в поперечних перерізах балки виникають згинаючий момент і поперечна сила, то такий випадок зветься **плоским поперечним згинанням**.

В даній задачі розглядається пряме (платке) згинання, коли площина дії зовнішніх сил (силова площина) проходить через одну з головних осей поперечного перерізу балки.

Розв'язок задачі розпочинаємо з визначення опорних реакцій методами теоретичної механіки. Для балки на двох опорах, яка навантажена плоскою системою сил, використовують три рівняння рівноваги, два з яких є рівняннями моментів всіх зовнішніх сил відносно заданих опор.

Для перевірки правильності визначення реакцій опор складають четверте (додаткове) рівняння рівноваги (рівняння моментів або рівняння сил).

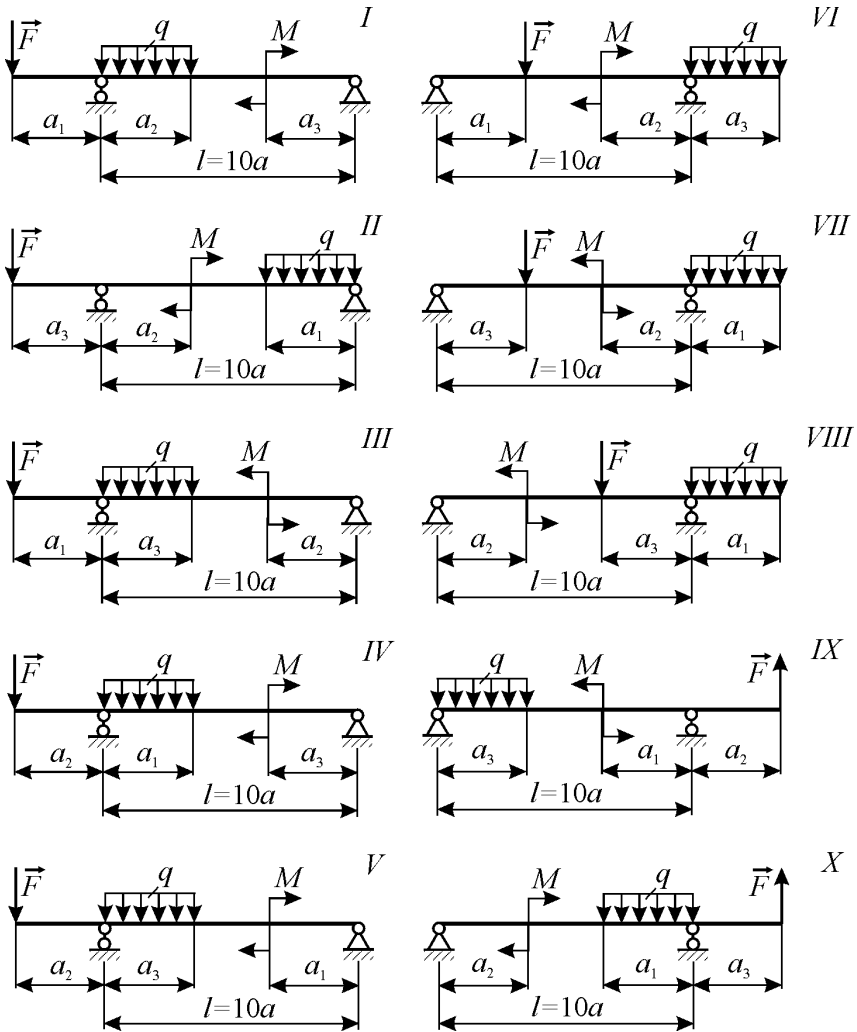


Рис. 2.3

Для визначення поперечної сили і згинаючого моменту у всіх поперечних перерізах балки використовують метод перерізів, на підставі якого:

1. поперечна сила Q в поперечному перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на площину перерізів всіх зовнішніх сил, які діють по один бік від перерізу;

2. згинаючий момент в поперечному перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів (обчислених щодо центру ваги перерізу) зовнішніх сил, які діють по один бік від даного перерізу.

Поперечна сила в перерізі балки вважається додатньою, якщо рівнодіюча зовнішніх сил зліва від перерізу напрямлена від низу до верху, а справа – зверху вниз. Згинаючий момент в перерізі балки вважається додатнім, якщо він згинає балку опуклістю вниз, від’ємним – якщо опуклістю вгору [2].

Поверхня в балці, волокна якої не зазнають повздовжньої деформації, називається **нейтральним шаром**. Лінія перетину нейтрального шару з поперечним перерізом називається **нейтральною лінією**.

Для забезпечення міцності балки при згинанні необхідно, щоб найбільші нормальні (розтягуючі і стискуючі) напруження в небезпечному перерізі (в перерізі, де згинаючий момент має найбільше значення по абсолютній величині) не перевищували відповідних допустимих напружень.

Для балок з пластичних матеріалів з поперечним перерізом, що симетричний відносно нейтральної лінії, умова міцності для нормальних напружень має вигляд:

$$\sigma_{\max} = M_{\max} / W_z \leq [\sigma]. \quad (2.3.1)$$

де W_z – осьовий момент опору поперечного перерізу балки, для прокатних профілів, який наводиться в таблицях сортаменту (див. додаток А); $[\sigma]$ – допустиме напруження на розтяг та стиск.

Приклад. Для заданої схеми балки необхідно знайти вирази, що описують зміну Q та M для кожної ділянки у загальному вигляді, побудувати епюри Q і M , знайти M_{\max} і підібрати сталю балку двотаврового поперечного перерізу при $[\sigma]=160 \text{ МПа}$. Вихідні дані: $l=10a=2 \text{ м}$; $a_1/a=7$; $a_2/a=8$; $M=6 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $F=12 \text{ кН}$; $q=10 \text{ кН/м}$.

Розв’язок

1. Складемо розрахункову схему балки в масштабі по довжині (рис. 2.4, а).

2. Визначимо опорні реакції з рівнянь рівноваги. Рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\sum M_A = 0: Y_B l - F(l - a_2) - qa_2(l - 0,5a_2) + M = 0,$$

$$\sum M_B = 0: -Y_A l + Fa_2 + 0,5qa_2^2 + M = 0.$$

З рівнянь рівноваги знаходимо:

$$Y_B = [F(l - a_2) + qa_2(l - 0,5a_2) - M] / l = \\ = [12(2 - 1,6) + 10 \cdot 1,6(2 - 0,5 \cdot 1,6) - 6] / 2 = 9 \text{ кН},$$

$$Y_A = (Fa_2 + 0,5qa_2^2 + M) / l = (12 \cdot 1,6 + 0,5 \cdot 10 \cdot 1,6^2 + 6) / 2 = 19 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum F_y = 0: Y_A + Y_B - F - qa_2 = 19 + 9 - 12 - 10 \cdot 1,6 = 0.$$

Перевірка виконується, тому розрахунки виконано вірно.

3. У відповідності з характером зовнішнього навантаження встановлюємо, що балка має три ділянки, для яких повинні бути складені аналітичні вирази зміни Q_y і M_Z .

Для першої ділянки: $0 \leq x_1 \leq l - a_2 = 2 - 1,6 = 0,4 \text{ м}$, тоді

$$Q_y^I = Y_A = 19 \text{ кН}, M_Z^I = Y_A x_1:$$

при $x_1 = 0$, $M_Z^I = 0$;

при $x_1 = 0,4 \text{ м}$, $M_Z^I = 19 \cdot 0,4 = 7,6 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Для другої ділянки: $0 \leq x_2 \leq a_1 - (l - a_2) = 1,4 - 0,4 = 1 \text{ м}$, тоді

$$Q_y^{II} = Y_A - F - qx_2, M_Z^{II} = Y_A(l - a_2 + x_2) - Fx_2 - qx_2^2 / 2:$$

при $x_2 = 0$, $Q_y^{II} = Y_A - F = 19 - 12 = 7 \text{ кН}$,

$M_Z^{II} = Y_A(l - a_2) = 19(2 - 1,6) = 7,6 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

при $x_2 = 1 \text{ м}$, $Q_y^{II} = Y_A - F - qx_2 = 19 - 12 - 10 \cdot 1 = -3 \text{ кН}$,

$M_Z^{II} = Y_A(l - a_2 + x_2) - Fx_2 - qx_2^2 / 2 = 19(0,4 + 1) - 12 \cdot 1 - 10 \cdot 1^2 / 2 = 9,6 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

На ділянці II при $Q_y^{II} = 0$ знаходимо $M_Z^{II}_{\max}$:

при $x_2 = x_2^*$, $Y_A - F - qx_2^* = 0$, звідки $x_2^* = (Y_A - F) / q = (19 - 12) / 10 = 0,7 \text{ м}$;

$M_Z^{II} = 19(0,4 + 0,7) - 12 \cdot 0,7 - 10 \cdot 0,7^2 / 2 = 10,05 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Для третьої ділянки: $0 \leq x_3 \leq l - a_1 = 2 - 1,4 = 0,6 \text{ м}$, тоді

$$Q_y^{III} = -Y_B + qx_3, M_Z^{III} = Y_B x_3 - qx_3^2 / 2:$$

при $x_3 = 0$, $Q_y^{III} = -9 \text{ кН}$, $M_Z^{III} = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

при $x_3 = 0,6 \text{ м}$, $Q_y^{III} = -Y_B + qx_3 = -9 + 10 \cdot 0,6 = -3 \text{ кН}$,

$M_Z^{III} = Y_B x_3 - qx_3^2 / 2 = 9 \cdot 0,6 - 10 \cdot 0,6^2 / 2 = 3,6 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Використовуючи знайдені значення і аналітичні залежності будуюмо епюри поперечних сил Q_y та згинаючих моментів M_Z (рис. 2.4, б, в).

З епюри M_Z видно, що максимальне значення згинаючого моменту дорівнює $M_{z \max} = 10,05 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

4. З умови міцності при згинанні знаходимо необхідний осьовий момент опору балки:

$$W_z \leq \frac{M_z}{[\sigma]} = \frac{10,05 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 62,8 \text{ м}^3 = 62,8 \text{ см}^3.$$

З сортаменту прокатної сталі, обираємо двутавр №14, у якого $W_x = W_z = 81,7 \text{ см}^3$ (Додаток А).

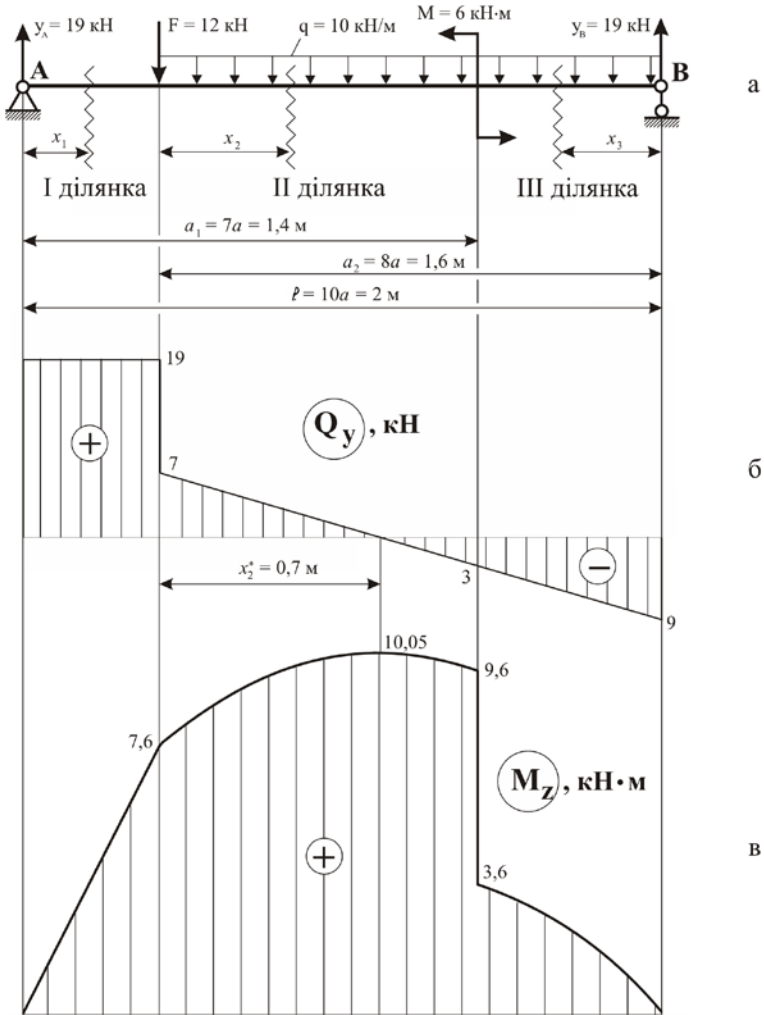


Рис. 2.4

2.4 Визначення переміщень в балках змінного перерізу при згинанні

Задача 4. Визначення переміщень в балках змінного перерізу при згинанні.

Використовуючи вихідні дані (табл. 2.4), необхідно визначити прогин вільного кінця балки змінного перерізу (рис. 2.5).

Таблиця 2.4

№ рядка	Схема по рис. 2.5	β	k
1	I	0.1	1.5
2	II	0.2	2
3	III	0.3	3
4	IV	0.4	4
5	V	0.5	5
6	VI	0.6	6
7	VII	0.7	7
8	VIII	0.8	8
9	IX	0.9	9
0	X	1.0	10
	е	г	д

Короткі теоретичні відомості

Для визначення переміщень в стержньових системах широко використовують метод Мору, за допомогою якого розглядають два стани пружної системи. В першому стані (дійсному або вантажному) пружна система навантажена заданим зовнішнім навантаженням, під впливом якого визначаються внутрішні силові фактори у всіх перерізах. В другому стані (допоміжному або одиничному) пружна система навантажена тільки одиничною безрозмірною зосередженою силою в тому перерізі, в якому необхідно визначити лінійне переміщення. Одиничну силу спрямовують вертикально, якщо необхідно знайти вертикальне переміщення заданого перерізу. Для другого стану також визначаються внутрішні силові фактори у всіх перерізах пружної системи.

Формула Мору (інтеграл Мору) має вигляд:

$$\Delta_{iF} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_i M_F dx}{EJ}, \quad (2.4.1)$$

де Δ_{iF} – переміщення i -го перерізу, що виникає від дії сил вантажного стану; \bar{M}_i – згинальний момент i -го перерізу одиничного стану; M_F – згинальний момент i -го перерізу вантажного стану; E – модуль пружності

першого роду; J – осьовий момент інерції поперечного перерізу i -ої ділянки.

Інтегрування проводиться по кожній ділянці, а потім результати інтегрування підсумовуються.

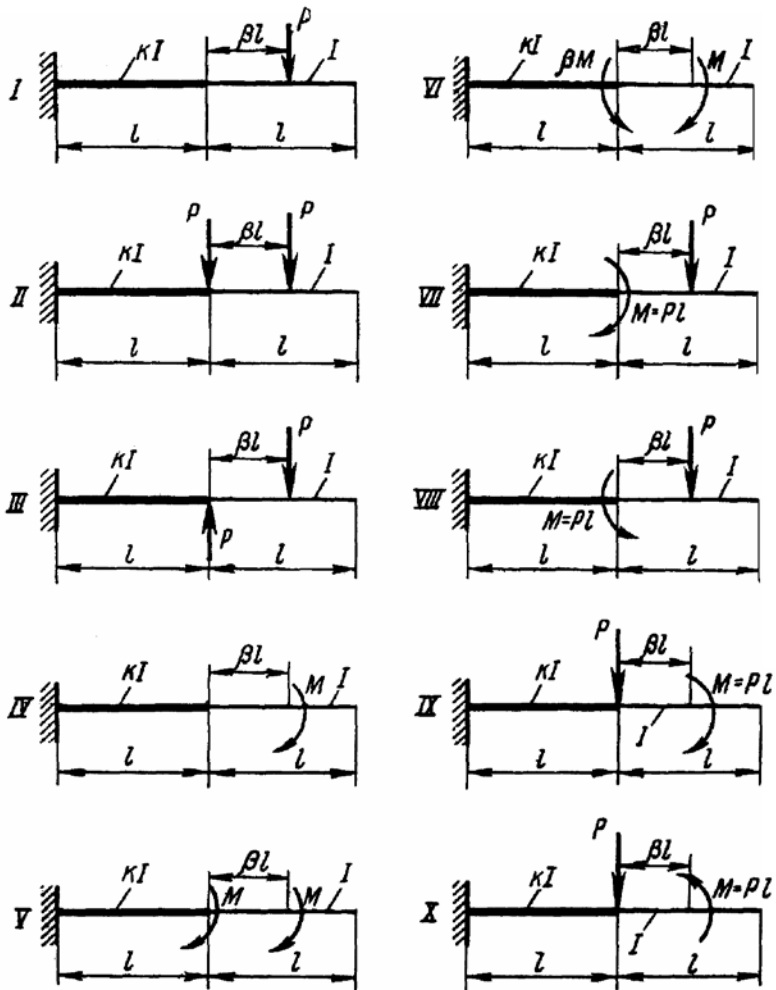


Рис. 2.5

Для визначення кута повороту перерізу пружної системи в другому стані прикладається одиничний безрозмірний зосереджений момент.

Замість безпосереднього обчислення інтеграла Мору користуються графоаналітичним методом (метод перемножування епюр) або правилом

Верещагіна. Це правило використовується для ділянок пружної системи з постійною жорсткістю поперечного перерізу, а також з обмеженням прямою лінією хоча б однієї з епюр згинаючих моментів, побудованих для двох станів пружної системи. Тоді формула Мору запишеться у вигляді формули

$$\Delta_{iF} = \sum \frac{\omega_i y_{Ci}}{EJ}, \quad (2.4.2)$$

яка і є аналітичним записом правила Верещагіна. В (2.4.1) ω_i - площа i -ої вантажної епюри, y_{Ci} - розташована під центром ваги i -ої вантажної епюри ордината прямолінійної одиничної епюри.

На кожній ділянці інтеграл, що шукається, дорівнює добутку площі ω_i вантажної епюри на розташовану під її центром ваги ординату y_{Ci} прямолінійної одиничної епюри. Якщо обидві епюри розташовуються по один бік від базової лінії системи, то переміщення співпадає з напрямком одиничної сили (результат обчислень береться зі знаком “+”). Якщо епюри розташовані по різні боки від базової лінії, то переміщення напрямлене у бік, протилежний напрямку одиничної сили (моменту).

Для полегшення обчислень можна використовувати готові таблиці множення епюр (наприклад [6], табл. VII.2 або додаток Б і В).

Приклад. Визначити переміщення вільного кінця балки (т. А) змінного перерізу при наступних даних: $F = qa$, $k=12$, $\beta=0,5$ (рис. 2.6, а).

Розв’язок

1. Будуємо епюру згинаючих моментів для вантажного стану від заданого зовнішнього навантаження.

Ділянка АВ:

$$0 \leq x_1 \leq 0,5a, M_z = -\frac{qx_1^2}{2};$$

$$\text{при } x_1=0,5a: M_z = -\frac{qx_1^2}{2} = -\frac{q(0,5a)^2}{2} = -0,125qa^2.$$

Ділянка ВС:

$$0 \leq x_2 \leq a, M_z = -q\beta a \left(\frac{\beta a}{2} + x_2 \right) + Fx_2;$$

$$\text{при } x_2=0: M_z = -0,125qa^2;$$

$$\text{при } x_2=a, M_z = -0,5qa \left(\frac{a}{4} + a \right) + qa^2 = 0,375qa^2.$$

Використовуючи отримані дані будуємо епюру згинаючого моменту для вантажного стану M_z (рис. 2.6, б).

Балка із заданим навантаженням

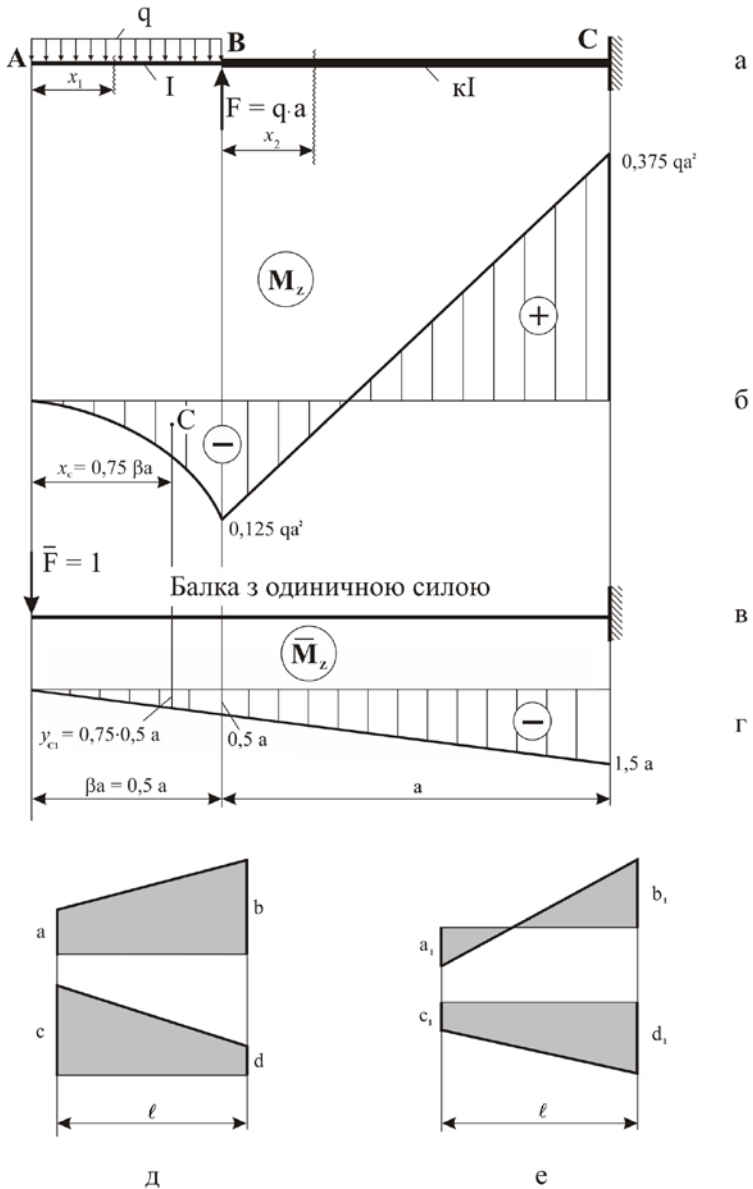


Рис. 2.6

2. Будуємо епюру згинаючих моментів для одиничного стану.

Для побудови схеми одиничного стану балки пружну систему (балку) навантажують в перерізі A одиничною зосередженою силою (рис. 2.6, в), направленою по вертикалі вниз (якщо результат отримаємо позитивний, то точка A дійсно рухається вниз). Епюра згинаючого моменту для одиничного стану представлена на рис. 2.6, г).

3. Визначаємо переміщення перерізу A використовуючи формулу (2.4.2) у вигляді:

$$\Delta_A = \frac{\omega_1 y_{C1}}{EJ} + \frac{\omega_2 y_{C2}}{EkJ},$$

де ω_1, ω_2 – площі відповідних епюр; y_{C1}, y_{C2} – ординати відповідних одиничних епюр.

На ділянці AB при множенні епюр використаємо формули для елементарних фігур, отримаємо:

$$\omega_1 = \frac{1}{3} \cdot 0,5a \cdot 0,125qa^2, \quad y_{C1} = 0,75 \cdot 0,5a;$$

$$\omega_1 y_{C1} = \frac{1}{3} \cdot 0,5a \cdot 0,125qa^2 \cdot 0,75 \cdot 0,5a = 0,0078qa^4.$$

На ділянці BC використаємо формулу для множення епюр у вигляді трапецій. Тоді

$$\text{для (рис. 4.2, д): } \omega y_C = \frac{l}{6} (2ac + 2bd + ad + cb);$$

$$\text{для (рис. 4.2, е): } \omega y_C = \frac{l}{6} (2a_1c_1 - 2b_1d_1 + a_1d_1 - c_1b_1).$$

Враховуючи, що

$$l = a, \quad a_1 = 0,125qa^2, \quad b_1 = 0,375qa^2, \quad c_1 = 0,5a, \quad d_1 = 1,5a,$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \omega_2 y_{C2} &= \frac{a}{6} (2 \cdot 0,125qa^2 \cdot 0,5a - 2 \cdot 0,375qa^2 \cdot 1,5a + \\ &+ 0,125qa^2 \cdot 1,5a - 0,375qa^2 \cdot 0,5a) = -0,1667qa^4. \end{aligned}$$

Остаточно

$$\Delta_A = 0,0078 \frac{qa^4}{EJ} - 0,1667 \frac{qa^4}{12EJ} = -0,0061 \frac{qa^4}{EJ}$$

Отриманий знак «-» вказує на те, що точка A (вільний кінець балки) рухається в напрямку протилежному напрямку одиничної сили, тобто вгору.

2.5 Розрахунок на міцність при крученні із згинанням

Задача 5. Розрахунок на міцність при крученні із згинанням.

Шків діаметром D_1 і з кутом нахилу віток ременя до горизонту α_1 робить n об/хв і передає потужність N кВт. Два інших шківів мають однаковий діаметр D_2 і однакові кути нахилу віток ременя до горизонту α_2 і кожний з них передає потужність $N/2$ (рис. 2.7).

Використовуючи вихідні дані (табл. 2.5), необхідно:

1. визначити моменти, прикладені до шківів;
2. побудувати епюру крутних моментів T ;
3. визначити зусилля t_1 і t_2 , що діють на шківів;
4. визначити сили, які тиснуть на вал;
5. визначити сили, які згинають вал в горизонтальній і вертикальній площинах (вагу шківів і вала не враховувати);

6. побудувати епюри згинаючих моментів в горизонтальній $M_{гор}$ і вертикальній $M_{вер}$ площинах;

7. побудувати епюру сумарних згинаючих моментів, використовуючи формулу $M_{зе} = \sqrt{M_{гор}^2 + M_{вер}^2}$;

8. за допомогою епюр T і $M_{зе}$ знайти небезпечний переріз і визначити максимальний розрахунковий момент використовуючи третю теорію міцності;

9. підібрати діаметр вала при $[\sigma]=70$ МПа і округлити його значення.

Таблиця 2.5

№ рядка	Схема по рис. 2.7	$N, \text{ кВт}$	$n, \text{ об/хв}$	a	b	c	D_1	D_2	a_1^0	a_2^0
				m						
1	I	10	100	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	10	10
2	II	20	200	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	20	20
3	III	30	300	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	30	30
4	IV	40	400	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	40	40
5	V	50	500	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	50	50
6	VI	60	600	1.6	1.6	1.6	0.6	0.6	60	60
7	VII	70	700	1.7	1.7	1.7	0.7	0.7	70	70
8	VIII	80	800	1.8	1.8	1.8	0.8	0.8	80	80
9	IX	90	900	1.9	1.9	1.9	0.9	0.9	90	90
0	X	100	1000	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0	0
	е	д	е	г	д	е	д	е	д	е

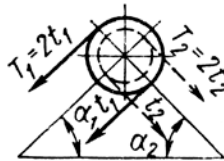
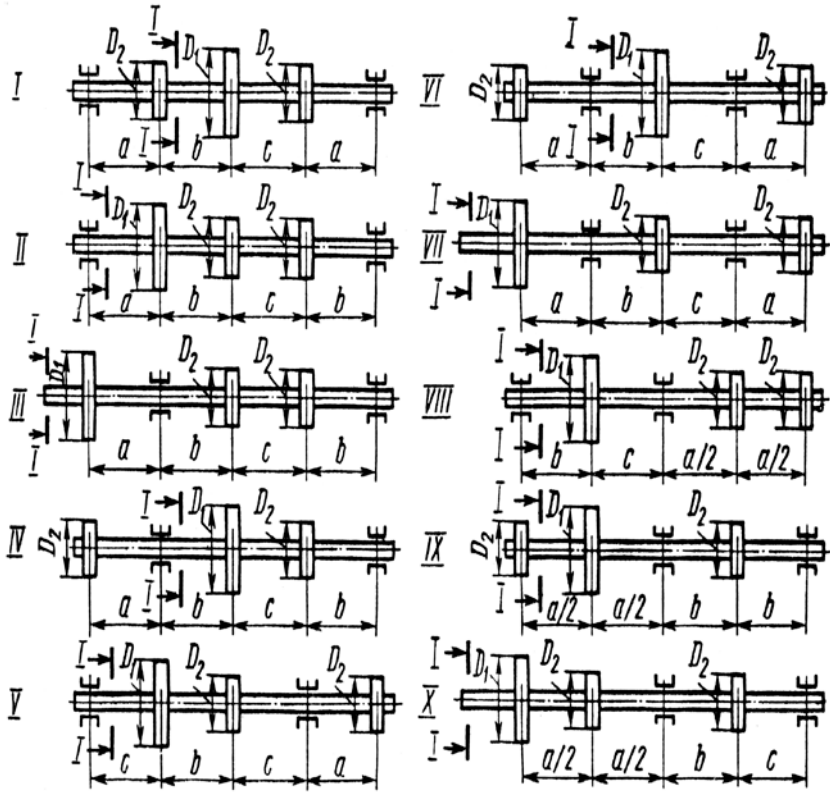


Рис. 2.7

Короткі теоретичні відомості

На кручення із згинанням працює велика кількість деталей, зокрема, вали різних машин. В поперечних перерізах при цьому виникають крутний момент T , згинальні моменти в двох взаємно перпендикулярних площинах M_z , M_y , а також поперечні сили, якими дуже часто нехтують. Користуючись принципом незалежності дії сил, визначають напруження, що виникають в поперечних перерізах вала (пружної системи) при крученні, і зокрема - при згинанні. При згинанні в поперечних перерізах

валу виникають нормальні напруження, що досягають найбільшого значення в крайніх волокнах валу (в точках самих віддалених від нейтральної лінії). Від кручення в поперечних перерізах виникають дотичні напруження, що досягають найбільшого значення в точках контура перерізу.

Нормальні напруження від згинання і дотичні напруження від кручення створюють двовісний напружений стан. Тому розрахунок на міцність проводиться із застосуванням теорій (гіпотез) міцності. Якщо вали виготовлені із сталі (пластичний матеріал), то застосовують третю або четверту гіпотезу міцності.

Спочатку для небезпечних точок поперечного перерізу (де одночасно діють найбільші напруження) визначають значення цих напружень:

$$\sigma = \frac{M}{W_z}, \quad \tau = \frac{T}{W_p} = \frac{T}{2W_z}. \quad (2.5.1)$$

Потім визначають головні напруження за формулою:

$$\sigma_{1,3} = \sigma_{\max, \min} = \frac{1}{2} \left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right). \quad (2.5.2)$$

Умова міцності за третьою гіпотезою (гіпотеза найбільших дотичних напружень):

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (2.5.3)$$

Підставляючи (2.5.1) та (2.5.2) в (2.5.3) отримаємо:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W_z^{\text{III}}} \leq [\sigma], \quad (2.5.4)$$

звідки отримуємо залежність для підбору перерізу (проектного розрахунку)

$$W_z^{\text{III}} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{[\sigma]}, \quad (2.5.5)$$

де сумарний згинаючий момент

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}.$$

Максимальний розрахунковий момент за третьою теорією міцності має вигляд:

$$M^{\text{III}} = \sqrt{M^2 + T^2}. \quad (2.5.6)$$

Умова міцності за четвертою гіпотезою міцності (гіпотеза питомої потенційної енергії зміни форми) має вигляд:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{\sqrt{M^2 + 0,75T^2}}{W_z^{\text{IV}}} \leq [\sigma], \quad (2.5.7)$$

звідки

$$W_z^{IV} = \frac{\sqrt{M^2 + 0,75T^2}}{[\sigma]} \quad (2.5.8)$$

Максимальний розрахунковий момент за четвертою теорією міцності має вигляд:

$$M^{IV} = \sqrt{M^2 + 0,75T^2} \quad (2.5.9)$$

За допомогою формул (2.5.5) або (2.5.8) знаходять осьовий момент опору W_z небезпечного поперечного перерізу.

Для матеріалів, що мають різну міцність на розтяг і стиск (деякі види легованої сталі, чавун, сплави), необхідно використовувати гіпотезу міцності Мора.

Приклад. Шків діаметром $D_1=1,2$ м і з кутом нахилу віток ременя до горизонту $\alpha_1=20^\circ$ (рис. 2.8, а, б) робить $n=3600$ об/хв і передає потужність $N=120$ кВт. Два інші шківів мають однаковий діаметр $D_2=0,6$ м і однакові кути нахилу віток ременя до горизонту $\alpha_2=60^\circ$ і кожний з них передає потужність $N/2=60$ кВт.

Використовуючи вихідні дані, необхідно:

1. визначити моменти, прикладені до шківів;
2. побудувати епюру крутних моментів T ;
3. визначити окружні зусилля t_1 і t_2 , діючі на шківів з діаметрами D_1 і D_2 ;
4. визначити сили тиску на вал;
5. визначити сили, що згинають вал в горизонтальній і вертикальній площині (вагу шківів і валу не враховувати);
6. побудувати епюри згинаючих моментів в горизонтальній M_y і вертикальній M_z площинах;
7. побудувати епюру сумарних згинаючих моментів, використовуючи формулу $M_{ze} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$;
8. за допомогою епюр T і M_{ze} знайти небезпечний переріз і визначити максимальний розрахунковий момент використовуючи третю теорію міцності;
9. підібрати діаметр вала при $[\sigma]=70$ МПа і округлити його значення.

Розв'язок

1. Визначаємо зовнішні крутні моменти, прикладені до шківів:

$$M_{кр} = \frac{N}{\omega} = \frac{30N}{\pi n} = 9,55 \frac{N}{n},$$

$$M_{кр1} = 9,55 \frac{120}{3600} = 0,318 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_{кр2} = M_{кр2} / 2 = 0,318 / 2 = 0,159 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

2. Визначаємо зовнішні крутні моменти в перерізах валу:

$$\text{на I і II ділянках: } T^I = M_{кр2} = 0,1595 \text{ кН}\cdot\text{м,}$$

$$\text{на III і IV ділянках: } T^{III} = M_{кр2} - M_{кр1} = 0,159 - 0,318 = -0,1595 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

3. Визначаємо окружні зусилля t_1 і t_2 діючі на шківів, вважаючи, що вітки ременів паралелі:

$$M_{кр1} = (2t_1 - t_1) \frac{D_1}{2}, \quad M_{кр2} = (2t_2 - t_2) \frac{D_2}{2},$$

звідки

$$t_1 = \frac{2M_{кр1}}{D_1} = \frac{2 \cdot 0,318}{1,2} = 0,53 \text{ кН}, \quad t_2 = \frac{2M_{кр2}}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,159}{0,6} = 0,53 \text{ кН.}$$

4. Знаючи t_1 і t_2 згідно з рис. 2.8, б) знаходимо сили тиску F_1 і F_2 , які передаються від шківів на вал:

$$F_1 = 3t_1 = F_2 = 3t_2 = 1,59 \text{ кН.}$$

5. Визначаємо сили, що згинають вал в горизонтальній та вертикальній площині:

- у вертикальній площині (пл. YOX):

$$F_{1y} = F_1 \sin \alpha_1 = 1,59 \cdot \sin 20^\circ = 0,544 \text{ кН,}$$

$$F_{2y} = F_2 \sin \alpha_2 = 1,59 \cdot \sin 60^\circ = 1,377 \text{ кН;}$$

- в горизонтальній площині (пл. ZOX):

$$F_{1z} = F_1 \cos \alpha_1 = 1,59 \cdot \cos 20^\circ = 1,494 \text{ кН,}$$

$$F_{2z} = F_2 \cos \alpha_2 = 1,59 \cdot \cos 60^\circ = 0,795 \text{ кН.}$$

6. Будуємо епюри згинаючих моментів в горизонтальній і вертикальній площинах.

6.1. Вертикальна площина. Для вертикальної площини розрахункова схема приведена на рис. 2.8, д. Визначаємо опорні реакції, що виникають у вертикальній площині, склавши рівняння рівноваги:

$$\sum M_B = 0: F_{2y}(a+b+c) - Y_A(b+c) + F_{1y}c - F_{2y}a = 0,$$

$$\sum M_A = 0: F_{2y}a - F_{1y}b + Y_B(b+c) - F_{2y}(a+b+c) = 0.$$

Розв'язуючи отриману систему рівнянь знайдемо:

$$Y_A = [F_{2y}(b+c) + F_{1y}c] / (b+c) =$$

$$= [1,377(1,2+1,6) + 0,544 \cdot 1,6] / (1,2+1,6) = 1,69 \text{ кН,}$$

$$Y_B = [F_{2y}(b+c) + F_{1y}b] / (b+c) =$$

$$= [1,377(1,2+1,6) + 0,544 \cdot 1,2] / (1,2+1,6) = 1,61 \text{ кН.}$$

Перевірка правильності визначення реакцій опор:

$$\begin{aligned}\sum F_{iy} = 0: Y_A + Y_B - F_{1y} - 2F_{2y} = \\ = 1,69 + 1,61 - 0,544 - 2 \cdot 1,377 = 0.\end{aligned}$$

Знаходимо значення згинаючих моментів на ділянках:

I ділянка $0 \leq x_1 \leq a = 1,3$ м, $M_z^I = -F_{2y}x_1$:

при $x_1 = 0$: $M_z^I = 0$;

при $x_1 = a$: $M_z^I = -1,377 \cdot 1,3 = -1,794$ кН·м.

II ділянка $0 \leq x_2 \leq b = 1,2$ м, $M_z^{II} = -F_{2y}(a + x_2) + Y_A x_2$:

при $x_2 = 0$: $M_z^{II} = -F_{2y}a = -1,377 \cdot 1,3 = -1,794$ кН·м;

при $x_2 = b$: $M_z^{II} = -1,377(1,3 + 1,2) + 1,69 \cdot 1,2 = -1,422$ кН·м.

III ділянка $0 \leq x_3 \leq c = 1,6$ м, $M_z^{III} = -F_{2y}(a + x_3) + Y_B x_3$;

при $x_3 = 0$: $M_z^{III} = -F_{2y}a = -1,377 \cdot 1,3 = -1,794$ кН·м;

при $x_3 = c$: $M_z^{III} = -1,377(1,3 + 1,6) + 1,61 \cdot 1,6 = -1,422$ кН·м.

IV ділянка $0 \leq x_4 \leq a = 1,3$ м, $M_z^{IV} = -F_{2y}x_4$:

при $x_4 = 0$: $M_z^{IV} = 0$;

при $x_4 = a$: $M_z^{IV} = -1,377 \cdot 1,3 = -1,794$ кН·м.

6.1. Горизонтальна площина. Для горизонтальної площини розрахункова схема зображена на (рис. 2.8, ж). Визначасмо опорні реакції, що виникають у вертикальній площині, склавши рівняння рівноваги:

$$\sum M_B = 0: -F_{2z}(a + b + c) - Z_A(b + c) + F_{1z}c + F_{2z}a = 0,$$

$$\sum M_A = 0: -F_{2z}a - F_{1z}b - Z_B(b + c) + F_{2z}(a + b + c) = 0.$$

Розв'язуючи отриману систему рівнянь знайдемо:

$$\begin{aligned}Z_A &= [-F_{2z}(b + c) + F_{1z}c] / (b + c) = \\ &= [-0,795(1,2 + 1,6) + 1,494 \cdot 1,6] / (1,2 + 1,6) = 0,0564 \text{ кН},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z_B &= [F_{2z}(b + c) - F_{1z}b] / (b + c) = \\ &= [0,795(1,2 + 1,6) - 1,494 \cdot 1,2] / (1,2 + 1,6) = 0,1564 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Перевірка правильності визначення реакцій опор:

$$\begin{aligned}\sum F_{iz} = 0: Z_A - Z_B - F_{1z} + 2F_{2z} = \\ = 0,0564 - 0,1564 - 1,494 + 2 \cdot 0,795 = 0.\end{aligned}$$

Знаходимо значення згинаючих моментів на ділянках:

I ділянка $0 \leq x_1 \leq a = 1,3$ м, $M_y^I = F_{2z}x_1$:

при $x_1 = 0$: $M_y^I = 0$;

при $x_1 = a$: $M_y^I = 0,795 \cdot 1,3 = 1,0335$ кН·м.

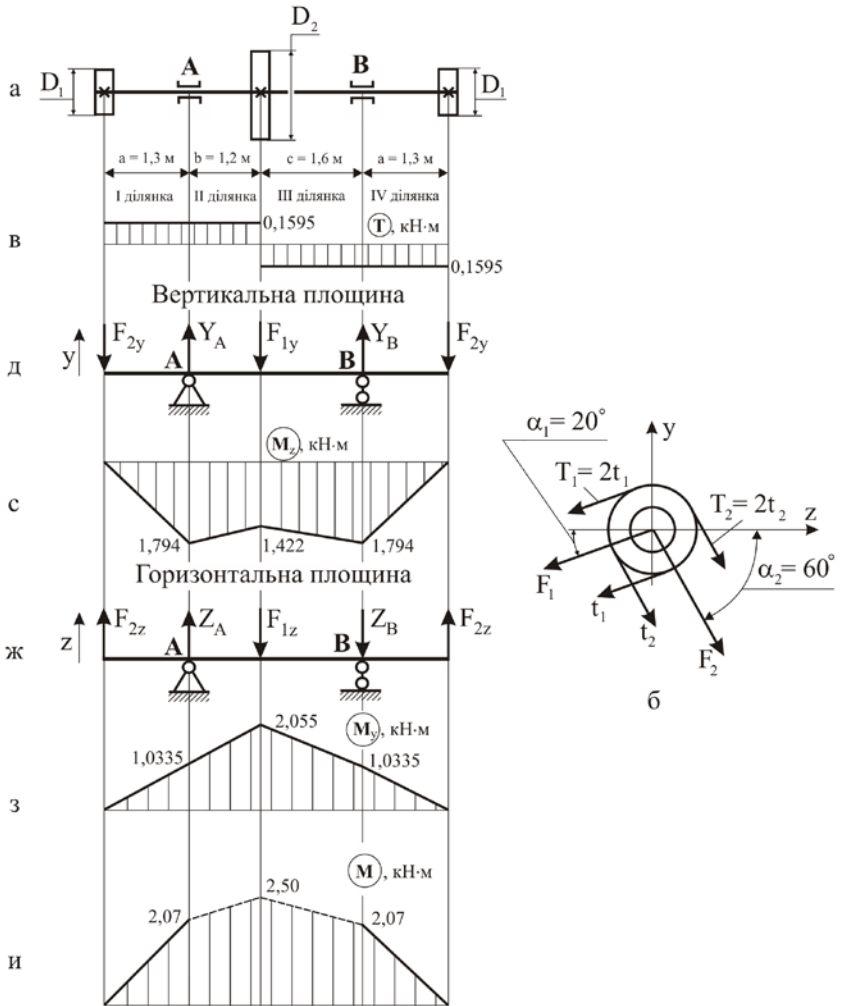


Рис. 2.8

II ділянка $0 \leq x_2 \leq b = 1,2\text{ м}$, $M_y^H = F_{2z}(a + x_2) + Z_A x_2$:
 при $x_2 = 0$: $M_y^H = F_{2z} a = 0,795 \cdot 1,3 = 1,0335\text{ кН}\cdot\text{м}$;
 при $x_2 = b$: $M_y^H = 0,795(1,3 + 1,2) + 0,0564 \cdot 1,2 = 2,055\text{ кН}\cdot\text{м}$.

III ділянка $0 \leq x_3 \leq c = 1,6$ м, $M_y^{III} = F_{2z}(a + x_3) - Z_B x_3$;

при $x_3 = 0$: $M_y^{III} = F_{2z} a = 0,795 \cdot 1,3 = 1,0335$ кН·м;

при $x_3 = c$: $M_y^{III} = 0,795(1,3 + 1,6) - 0,1564 \cdot 1,6 = 2,055$ кН·м.

IV ділянка $0 \leq x_4 \leq a = 1,3$ м, $M_y^{IV} = F_{2z} x_4$;

при $x_4 = 0$: $M_y^{IV} = 0$;

при $x_4 = a$: $M_y^{IV} = 0,795 \cdot 1,3 = 1,0335$ кН·м.

За отриманими значеннями згинаючих моментів будуюмо епюри в вертикальній M_z (рис. 2.8, е) та горизонтальній M_y (рис. 2.8, з) площинах.

7. Знаходимо значення сумарних згинаючих моментів на межах ділянок і будуюмо епюру M (рис. 2.8, и):

$$M_{x_1=0} = 0, \quad M_{x_4=0} = 0,$$

$$M_{x_1=a} = M_{x_4=a} = \sqrt{1,794^2 + 1,0335^2} = 2,07 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_{x_2=b} = M_{x_3=c} = \sqrt{1,422^2 + 2,055^2} = 2,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

8. За допомогою епюр T і M визначаємо небезпечні перерізи. В даному прикладі небезпечним є переріз, де діють одночасно найбільший крутний ($T=0,1595$ кН·м) і згинаючий ($M=2,5$ кН·м) моменти, отже, і найбільший приведений момент:

$$M^{III} = \sqrt{2,5^2 + 0,1595^2} = 2,505 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

9. Визначаємо необхідний найбільший момент опору валу:

$$W_z = \frac{M^{III}}{[\sigma]} = \frac{2,505 \cdot 10^3}{70 \cdot 10^6} = 35,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Для вала суцільного перерізу:

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32},$$

звідки

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W_z}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 35,8 \cdot 10^{-6}}{3,14}} = 7,14 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Округлюємо

$$d = 0,08 \text{ м} = 80 \text{ мм}.$$

2.6 Розрахунок сталевих стрижнів на стійкість

Задача 6. Розрахунок сталевих стрижнів на стійкість.


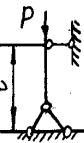
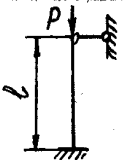

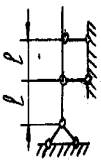
Стальний стрижень довжиною l стискається силою P .

Використовуючи вихідні дані (табл. 2.6, 2.7 та рис. 2.9), необхідно:

1. визначити розміри поперечного перерізу при допустимому напруженні на звичайний стиск $[\sigma]=160 \text{ МПа}$ (розрахунок виконувати послідовними наближеннями, попередньо задавшись коефіцієнтом $\varphi=0,5$);

2. знайти величину критичної сили і коефіцієнт запасу стійкості.

Таблиця 2.6

№ рядка	Схема по рис. 2.9	$P, \text{кН}$	$l, \text{м}$	Схема закріплення кінців стрижня
1	I	100	2,1	
2	II	200	2,2	
3	III	300	2,3	
4	IV	400	2,4	
5	V	500	2,5	
6	VI	600	2,6	
7	VII	700	2,7	
8	VIII	800	2,8	
9	IX	900	2,9	
0	X	1000	3,0	
	Г	Г	Д	Е

Таблиця 2.7

Варіанти схем закріплення кінців стрижня	I, II	III, IV, IX, X	V, VI	VII, VIII
Значення коефіцієнта μ	2	1	0,7	0,5

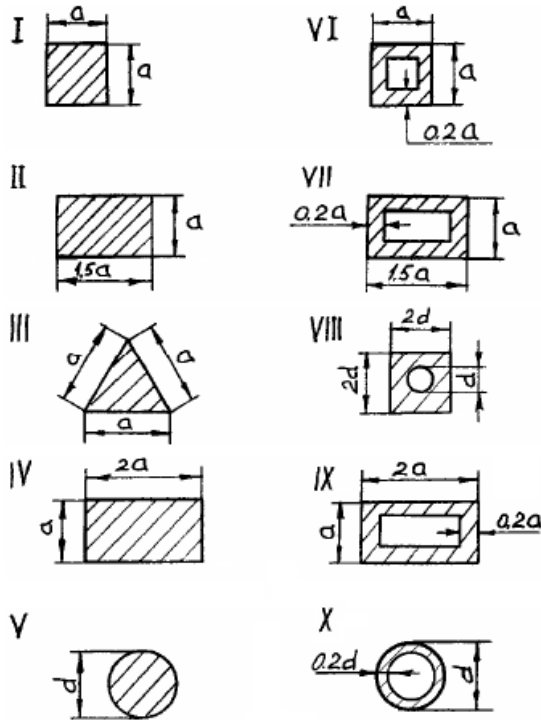


Рис. 2.9

Короткі теоретичні відомості

Сили, по досягненні яких пружна система переходить від стійкого стану до нестійкого, називаються **критичними** і для заданої конструкції є **граничними**. Робоче навантаження повинне складати деяку частину від критичного. Відношення критичного (граничного) навантаження до робочого називається запасом стійкості:

$$n_y = F_{кр} / F . \quad (2.6.1)$$

Для стиснутих стрижнів крім умови міцності повинна виконуватися також умова стійкості:

$$\sigma_y = \frac{F}{A} \leq [\sigma_y]. \quad (2.6.2)$$

Допустиме напруження при розрахунку на стійкість $[\sigma_y]$ виражають через основне допустиме напруження $[\sigma]$, що приймається при розрахунках на міцність:

$$[\sigma_y] = \varphi[\sigma], \quad (2.6.3)$$

де φ – коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження для стиснутих стрижнів (коефіцієнт поздовжнього згинання).

Коефіцієнт φ задається будівельними нормами і правилами для типових матеріалів і залежить від гнучкості стержня. **Гнучкістю** стрижня λ , називається величина, що дорівнює відношенню приведеної довжини стрижня μl до радіусу інерції i_{\min} поперечного переріза стрижня. Так як втрата стійкості відбувається в площині найменшої жорсткості, то у вираз гнучкості входить мінімальний радіус інерції i_{\min} поперечного перерізу:

$$\lambda = \mu l / i_{\min}. \quad (2.6.4)$$

В (2.6.4) значення коефіцієнта μ залежить від умови закріплення кінців стрижня і наведене в таблиці 2.7.

Мінімальний радіус інерції визначається за формулою:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}. \quad (2.6.5)$$

де A – площа поперечного перерізу; J_{\min} – мінімальний осьовий момент інерції поперечного перерізу.

Якщо поперечний переріз має більше двох осей симетрії (квадрат, коло, рівносторонній трикутник), то моменти інерції відносно будь-якої центральної осі рівні між собою:

- для квадрата із стороною a – $J_{\min} = a^4 / 12$;

- для кола діаметром d – $J_{\min} = \pi d^4 / 64$;

- для рівностороннього трикутника із стороною a – $J_{\min} = \frac{\sqrt{0,75}a^4}{48}$;

- для прямокутного поперечного перерізу із сторонами a і b ($a > b$) $J_{\min} = ab^2 / 12$ (менша сторона береться в кубі).

У перерізах з отвором момент інерції (аналогічно площа) обчислюється як різниця моментів інерції (площ) двох фігур: першої – по зовнішньому контуру, другої – по внутрішньому контуру.

Для визначення площі поперечного перерізу стрижня умову стійкості (2.6.2) запишемо у вигляді:

$$A \geq \frac{F}{\varphi[\sigma]}. \quad (2.6.6)$$

Значення φ необхідно задавати, так як невідома площа поперечного перерізу A . У першому наближенні приймають $\varphi_1=0,5$. Потім визначають A , J_{\min} , i_{\min} , λ і за таблицею 2.8 знаходять відповідне значення φ'_1 . У другому наближенні приймають $\varphi_2 = (\varphi + \varphi_1)/2$ і т. д. до тих пір, поки різниця між значеннями φ і φ'_1 не буде перевищувати 3% – 5%.

Таблиця 2.8 Значення коефіцієнта φ для сталі Ст. 5 (сталі 35)

λ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
φ	1.00	0.98	0.95	0.92	0.89	0.86	0.82	0.76	0.70	0.62	0.51
λ	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	
φ	0.43	0.37	0.33	0.29	0.26	0.24	0.21	0.19	0.17	0.16	

Для визначення критичного навантаження при $\lambda \geq 100$ використовують формула Ейлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{\mu^2 l^2}. \quad (2.6.7)$$

Коефіцієнт запасу стійкості визначають за формулою (2.6.1). При складанні таблиць коефіцієнтів передбачені значення $n_3 \approx 1,8$.

Приклад. Сталевий стрижень завдовжки $l=4$ м стискається силою $F=1500$ кН. Схема закріплення кінців стержня наведена на (рис. 2.10, а), а форма перерізу стрижня на (рис. 2.10, б).

Необхідно:

1. визначити розміри поперечного перерізу при допустимому напруженні на звичайний стиск $[\sigma]=160$ МПа (розрахунок виконувати послідовними наближеннями, попередньо задавшись коефіцієнтом $\varphi=0,5$);
2. знайти величину критичної сили і коефіцієнт запасу стійкості.

Розв'язок

Для даної схеми закріплення кінців стрижня $\mu=1$. Визначаємо геометричні характеристики для даної форми поперечного перерізу стрижня.

При $d=a$:

- площа

$$A = 2a \cdot 4a - 2 \frac{\pi d^2}{4} = 6,43a^2;$$

- мінімальний осьовий момент інерції

$$J_{\min} = J_y = \frac{4a \cdot (2a)^3}{12} - 2 \frac{\pi a^4}{64} = 2,568a^4;$$

- мінімальний радіус інерції:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{2,568a^4}{6,43a^2}} = 0,632a = \left\{ a = \sqrt{\frac{A}{6,43}} \right\} = 0,249\sqrt{A};$$

- гнучкість стрижня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 400}{0,632a} = \frac{632 \text{ см}}{a}.$$

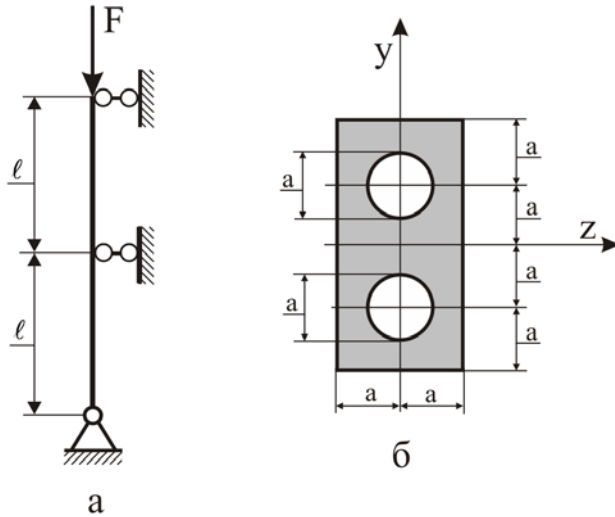


Рис. 2.10

В першому наближенні приймаємо $\varphi_1=0,5$ тоді

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1[\sigma]} = \frac{1500 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 187,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 187,5 \text{ см}^2,$$

$$a_1 = \sqrt{A_1 / 6,43} = 5,4 \text{ см}, \quad \lambda_1 = 632 / 5,4 = 117,2.$$

З табл. 2.8 знаходимо, що:

$$\text{при } \lambda=110 - \varphi=0,43;$$

$$\text{при } \lambda=120 - \varphi=0,37.$$

Отже, при $\lambda=117$ отримаємо

$$\varphi'_1 = 0,37 + \frac{(0,43 - 0,37)(120 - 117)}{(120 - 110)} = 0,388.$$

В другому наближенні приймаємо

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,388}{2} = 0,444,$$

тоді

$$A_2 = 211,6 \text{ см}^2, \quad a_2 = 5,73 \text{ см}, \quad \lambda_2 = 110,44, \quad \varphi_2' = 0,427.$$

В даному прикладі вже в другому наближенні отримаємо різницю:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_2'}{\varphi_2'} 100\% = \frac{0,443 - 0,427}{0,427} 100\% = 3,76\%.$$

Перевіряємо виконання умови стійкості (2.6.2):

$$\sigma_y = \frac{F}{A} = \frac{1500 \cdot 10^3}{211,6 \cdot 10^{-4}} = 70,89 \text{ МПа},$$

$$[\sigma_y] = \varphi_2' [\sigma] = 0,427 \cdot 160 = 68,32 \text{ МПа}.$$

Умова стійкості не виконується. Перенапруження при цьому складає

$$\frac{70,89 - 68,32}{68,32} 100\% = 3,76\%,$$

і не перевищує допустимих значень (3 – 5 %).

Приймаємо розмір $a = 58 \text{ мм} = 5,8 \text{ см}$ і визначаємо критичну силу за формулою Ейлера (2.6.7) оскільки $\lambda > 100$:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{\mu^2 l^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2,568 \cdot 5,73^4 \cdot 10^{-8}}{1^2 \cdot 4^2} = 3,412 \text{ МН}.$$

Коефіцієнт запасу стійкості визначаємо за формулою (2.6.1):

$$n_y = 3,412 / 1,5 = 2,27.$$

2.7 Розрахунок балки на міцність при ударних навантаженнях

Задача 7. Розрахунок балки на міцність при ударних навантаженнях.

На двотаврову балку, яка розташовується на двох жорстких опорах (рис. 2.11), з висоти h падає вантаж вагою P .

Використовуючи вихідні дані (табл. 2.9), необхідно:

1. знайти найбільше нормальне напруження в балці;
2. розв'язати аналогічну задачу при умові, що права опора замінена пружиною, піддатливість якої (просідання від вантажу вагою 1 кН) дорівнює α ;
3. порівняти отримані результати.

Вказівка. При наявності вказаної в пункті 2 пружини $\Delta'_{cm} = \Delta_{cm} + \beta \Delta_{np}$, де Δ_{cm} – прогин балки в тому перерізі, де прикладена сила P (при статичній дії цієї сили); Δ_{np} – просідання пружини від реакції, викликану силою P ; β – коефіцієнт, що встановлює залежність між просіданням пружини і переміщенням точки прикладення сили P , викликаним поворотом всієї балки навколо центра шарніра лівої опори як жорсткого цілого (коефіцієнт β знаходять із рівності трикутників).

Таблиця 2.9

№ рядка	Схема по рис. 2.11	№ двотавра	$l, \text{ м}$	$P, \text{ Н}$	$h, \text{ см}$	$10^3 \alpha, \text{ м/кН}$
1	I	20	2,1	1100	11	21
2	II	20а	2,2	1200	12	22
3	III	24	2,3	300	3	23
4	IV	24а	2,4	400	4	24
5	V	27	2,5	500	5	25
6	VI	27а	2,6	600	6	26
7	VII	30	2,7	700	7	27
8	VIII	30а	2,8	800	8	28
9	IX	33	2,9	900	9	29
0	X	36	3,0	1000	10	30
	е	д	е	г	д	е

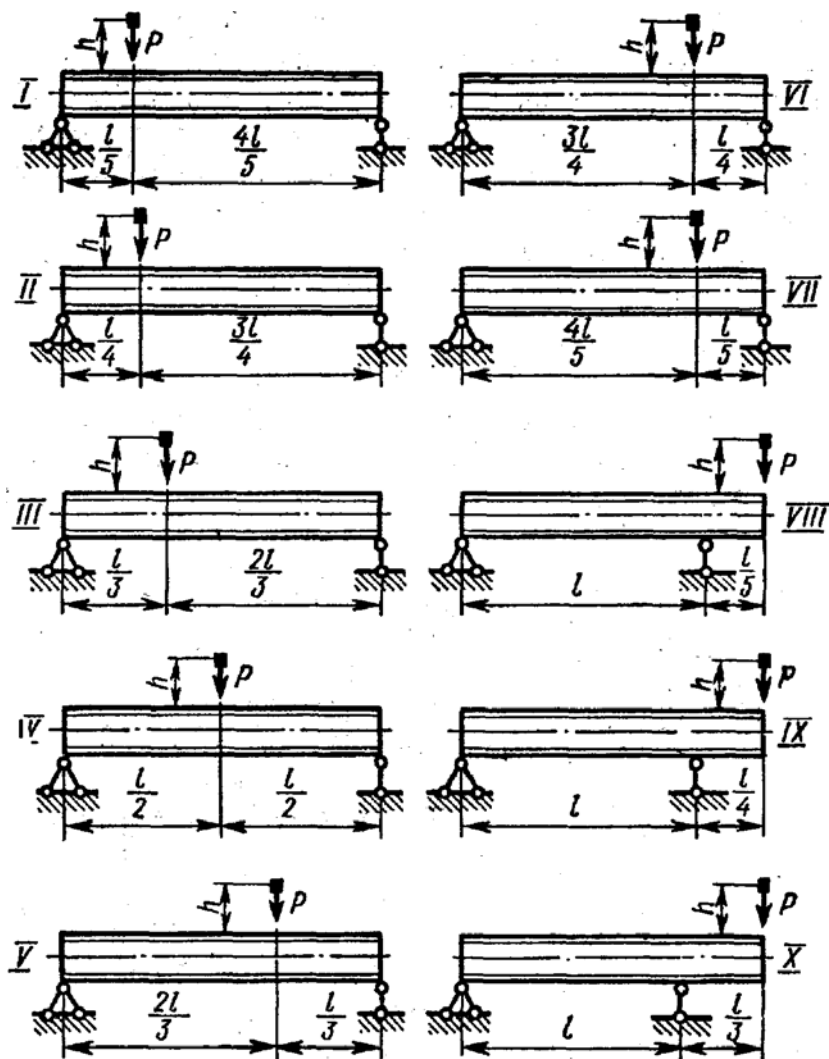


Рис. 2.11

Короткі теоретичні відомості

При ударі вантажа по нерухомому тілу можна визначити його швидкість в момент удару. Ця швидкість за дуже короткий проміжок часу впаде до нуля. При цьому виникає значна сила інерції вантажу, яка і визначає величину удару. Закон зміни швидкості вантажу, а отже, і силу інерції встановити важко. Тому використовують наближений закон

збереження енергії при певних припущеннях. Основним припущенням (гіпотезою) є, те, що епюра переміщень пружної системи (тіла) від вантажа при ударі (в будь-який момент часу) подібна епюрі переміщень, що виникають від цього ж вантажу, але діючого статично. Відношення переміщень від удару вантажем (динамічні переміщення) до переміщень від статично прикладеного вантажу (статичні переміщення) позначають коефіцієнтом динамічності – K_d . Таким чином, в наближеній теорії удару для випадків, коли маса пружного тіла мала (можна прийняти рівній нулю), коефіцієнт динамічності визначається по формулі:

$$K_d = \frac{\Delta_d}{\Delta_{cm}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}} . \quad (2.7.1)$$

де h – висота падіння вантажу.

При переході від деформації до напруження одержуємо, що

$$\sigma_d = K_d \sigma_{cm} . \quad (2.7.2)$$

З (2.7.1) видно, що коефіцієнт динамічності K_d , а отже, динамічні значення напружень і переміщень залежать від статичних переміщень – Δ_{cm} пружної системи (тіла, що ударяється). Чим більше статична деформація (за інших рівних умов), тим менше динамічні напруження. От чому для пом'якшення удару застосовують прокладки (гумові, пружинні), які дають великі деформації.

Приклад. На двотаврову балку №30, завдовжки $l=3$ м, що вільно лежить на двох жорстких опорах (рис. 2.12) з висоти $h=15$ см падає вантаж вагою $P=2$ кН. Між опорами відстань $l_1=2$ м.

Необхідно:

1. знайти найбільше нормальне напруження в балці;
2. розв'язати аналогічну задачу при умові, що права опора замінена пружиною, піддатливість якої (просідання від вантажу вагою 1 кН) дорівнює $\alpha=10$ мм/кН; ($10^3 \cdot \alpha=10$ м/кН);
3. порівняти отримані результати.

Розв'язок

1. Визначасмо коефіцієнт динамічності для балки на двох жорстких опорах. Для цього знаходимо значення статичного переміщення балки в точці C (переріз, де знаходиться вантаж при статичній дії). Переміщення Δ_{cm} – знаходимо графоаналітичним прийомом "способом перемноження епюр для вантажного і одиничного станів (див. задачу 2.4 формула (2.4.2.)). Епюри згинаючих моментів цих станів наведені відповідно на рис. 2.12, в, д.

Для балки двотаврового перерізу №30 з таблиць сортаменту (додаток А) знаходимо:

$$J_x = 7080 \text{ см}^4, W_x = 472 \text{ см}^3, E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа.}$$

Епюри перемножуємо окремо на двох ділянках. Для Δ_{cm} за правилом Верещагіна отримуємо (додаток В):

$$\Delta_{cm} = \Delta_C = \frac{1}{EJ_x} (\omega_1 y_{C1} + \omega_2 y_{C2}) = 0,0142.$$

Визначаємо коефіцієнт динамічності:

$$K_\delta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 15}{0,0142}} = 46,8.$$

Максимальний згинаючий момент при статичному навантаженні рівний $M_{\max} = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$ в опорі B . Отже, максимальні статичне і динамічне напруження відповідно рівні:

$$\sigma_{cm} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{2 \cdot 10^3}{472 \cdot 10^{-6}} = 4,24 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_\delta = K_\delta \sigma_{cm} = 46,8 \cdot 4,24 = 198,3 \text{ МПа.}$$

2. Знаходимо коефіцієнт динамічності для балки, у якої права опора замінена пружиною (рис. 2.12, ж). Від вантажу вагою $P = 2 \text{ кН}$ реакція $R_B = 3 \text{ кН}$.

Отже, осідання пружини

$$\Delta_{np} = \alpha R_B = 10 \cdot 3 = 30 \text{ мм.}$$

Величину P знаходимо з подібності трикутників ABB' і ACC' .

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CC'}{BB'} = \frac{\beta \Delta_{np}}{\Delta_{np}} = \beta = \frac{3}{2}.$$

Тоді

$$\Delta'_{cm} = 0,0142 + 1,5 \cdot 3 = 4,5142 \text{ см,}$$

$$K'_\delta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 15}{4,5142}} = 3,765,$$

$$\sigma'_\delta = K'_\delta \sigma_{cm} = 3,765 \cdot 4,24 = 15,963 \text{ МПа.}$$

3. При установці замість правої жорсткої опори пружини максимальні динамічні напруження зменшуються в

$$n = \frac{\sigma_\delta}{\sigma'_\delta} = \frac{198,3}{15,963} = 12,42 \text{ раз.}$$

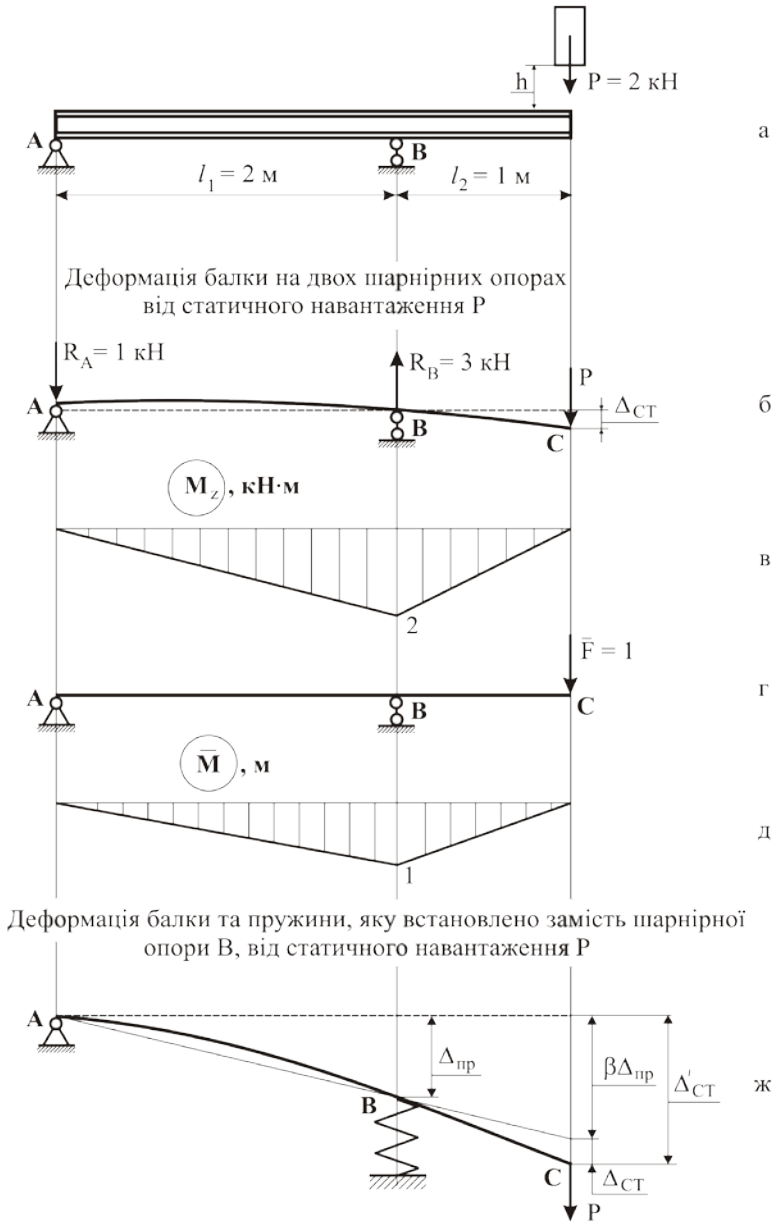
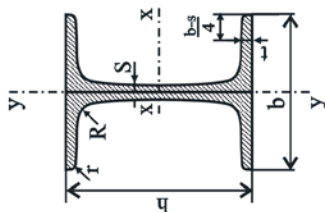


Рис. 2.12

Додаток А

Балки двотаврові. Сортамент (ГОСТ 8239-72)



- h – висота;
 b – ширина полиці;
 t – середня товщина полиці;
 s – товщина стінки;
 R – радіус внутрішнього закруглення;
- r – радіус закруглення полиці;
 J – момент інерції;
 i – радіус інерції;
 W – момент опору;
 S – статичний момент півперерізу;

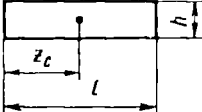
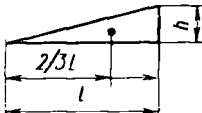
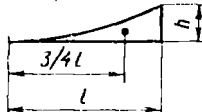
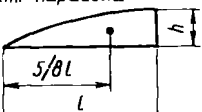
Таблиця А

Номер профіля	мм						Маса l м,	Довідкові величини для осей					
	h	b	s	t	R	r		$x-x$			$y-y$		
								J_x , $см^4$	W_x , $см^3$	i_x , $см$	S_x , $см^3$	J_y , $см^4$	W_y , $см^3$
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	9,46	12,0	11,50	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	11,50	14,7	13,70	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	13,70	17,4	184,0	46,8	41,9	11,50	1,55
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	21,00	26,8	184,0	104,0	115,0	23,10	2,07

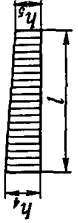

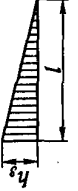
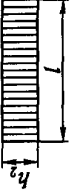

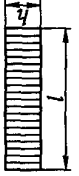
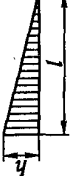
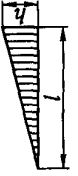
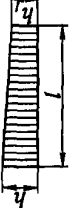
Продовження таблиці А															
20a	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	22,70	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	25,80	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
24a	240	125	6,6	9,8	10,5	4,0	37,5	29,40	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	33,90	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	39,20	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,96	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

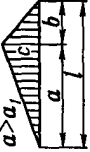
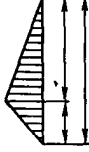


Додаток Б

Таблиця Б

Вид епюри	Площа епюри	Відстань від центра ваги, z_c
	hl	$\frac{l}{2}$
	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{2}{3}l$
<p><i>Квадрат. парабола</i></p> 	$\frac{1}{3}hl$	$\frac{3}{4}l$
<p><i>Квадрат. парабола</i></p> 	$\frac{2}{3}hl$	$\frac{5}{8}l$

Додаток В

M_k <hr style="width: 100%;"/> M_f		$\frac{h(h_4 + h_5)l}{2}$	$\frac{hl}{6}(2h_4 + h_5)$	$\frac{hl}{6}(h_4 + 2h_5)$	$\frac{l}{6}[h(2h_4 + h_5) + h_1(2h_5 + h_4)]$
		$\frac{c_1 h}{2}$	$\frac{h(l+b)c_1}{6}$	$\frac{h(a_1+b)c_1}{6}$	$\frac{c_1 h}{6}[h(l+b) + h_1(l+a_1)]$
		$\frac{hh_3 l}{2}$	$\frac{hh_3 l}{3}$	$\frac{hh_3 l}{6}$	$\frac{h_3 l}{6}(2h + h_1)$
		$hh_2 l$	$\frac{hh_2 l}{2}$	$\frac{hh_2 l}{2}$	$\frac{h_2(h+h_1)l}{2}$
					

 <p>$a > a_1$</p>	$\frac{ch_2l}{2}$	$\frac{ch_3(l+b)}{6}$	$\frac{cc_1l}{6} \left[2 - \frac{(b_1-b)^2}{b_1a} \right]$	$\frac{c}{6} [h_4(l+b) + h_5(l+a)]$
	$\frac{ch_2l}{2}$	$\frac{ch_3(l+b)}{6}$	$\frac{cc_1l}{6} \left[2 - \frac{(a_1-a)^2}{a_1b} \right]$	$\frac{c}{6} [h_4(l+b) + h_5(l+a)]$
<p>Квадрат. парабола</p> 	$\frac{2flh_2}{3}$	$\frac{flh_3}{3}$	$\frac{1}{3} c_1 f_1 (l^2 + a_1 b)$	$\frac{f_1 l}{3} (h_4 + h_5)$
<p>Квадрат. парабола</p> 	$\frac{f_1 l h_2}{3}$	$\frac{f_1 l h_3}{4}$	$\frac{c_1 f_1}{12} \left[l + b + \frac{b^2}{l} \right]$	$\frac{f_1 l}{12} [3h_4 + h_5]$

Література

1. *Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики.* – М.: “Высшая школа”, 1986. – 416 с.
2. **Соппротивление материалов.** / Под ред. Писаренко Г.С. – К.: “Высшая школа”, 1996. – 775 с.
3. **Прикладная механика:** Учебное пособие для вузов / Под ред. Заблонского К.И. – К.: “Высшая школа”, 1984. – 280 с.
4. **Прикладная механика:** Сборник задач / Под ред. Бардзиловского В.П. – К.: “Высшая школа”, 1986. – 190 с.
5. Соппротивление материалов. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников всех специальностей технических высших учебных заведений, кроме строительных / Под ред. А.В. Даркова, Б.Н. Кутукова – 14-е изд. – М.: “Высшая школа”, 1985. 55 с.
6. *Степин П.А. Соппротивление материалов.* – М.: “Высшая школа”, 1988. – 367 с.

Навчально-методичне видання

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

**методичні вказівки та завдання до індивідуальних завдань
для студентів механічних та електротехнічних спеціальностей**

Укладачі: В.В. Пирогов
Г.Б. Філімоніхін
Ю.А. Невдаха

Комп'ютерний набір
кафедра ДМ та ПМ
т. (0522) 390-547

Підп. до друку . Формат 60x84 1/16 (A5). Папір друк №3. Друк офсетний. Умов. друк.
арк. Ум.фарбо-відб. 3,33 Облік.-вид.арк. . Тираж 100 прим.
Зам.№

Центральноукраїнський національний технічний університет
25030, м. Кропивницький. пр. Університетський, 8