

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**ФАКУЛЬТЕТ ПРОЕКТУВАННЯ І ЕКСПЛУАТАЦІЇ МАШИН ТА
ЕЛЕКТРИФІКАЦІЇ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ**

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Частина II

**Індивідуальні завдання для здобувачів економічних
спеціальностей**

**КРОПИВНИЦЬКИЙ
2023**

Вища та прикладна математика. Ч. II: Індивідуальні завдання для здобувачів вищої освіти економічних спеціальностей / Укл.: Гуцул В.І., Якименко С.М., Філімоніхіна І.І. – Кропивницький: ЦНТУ, 2023. – 103 с.

Друга частина містить індивідуальні завдання по всім розділам курсу вищої математики, які вивчаються на економічних спеціальностях. Вказані завдання призначені для закріплення теоретичного матеріалу та для організації самостійної і індивідуальної роботи студентів. Орієнтовано на здобувачів вищої освіти економічних спеціальностей.

Затверджено на засіданні
кафедри вищої
математики та фізики.
Протокол №1 від 30.08.2023

© В.І.Гуцул,
С.М.Якименко,

І.І.Філімоніхіна, 2023
© ЦНТУ

ЗМІСТ

Індивідуальні завдання	4
Елементи лінійної алгебри.....	4
Елементи аналітичної геометрії	12
Комплексні числа.....	18
Вступ до математичного аналізу	21
Похідна і диференціал. Правила і методи диференціювання	29
Деякі застосування похідної	40
Невизначений інтеграл.....	44
Визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла	56
Диференціальне числення функції декількох змінних.....	65
Диференціальні рівняння	75
Теорія ймовірностей.....	87
Рекомендована література	102

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Елементи лінійної алгебри

Завдання 1. Знайти матрицю $C = 3 \cdot A^T - A \cdot B + 2 \cdot E$, де E - одинична матриця третього порядку.

$$1. A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -8 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 8 & 0 & 9 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 7 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & -5 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 8 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 \\ -7 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 5 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 7 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 5 & 3 & -1 \\ -6 & 7 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$11. A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$12. A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -8 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -9 \\ 2 & 1 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$14. A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 9 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -6 & -8 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 9 \\ -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$15. A = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \\ -1 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$16. A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -8 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -1 & 4 & 5 \\ 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$17. A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 1 & -8 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$18. A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & -7 & 8 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 9 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$19. A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 5 & -4 & 0 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 8 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$20. A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 5 & -7 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 6 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$21. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$22. A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -8 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -1 & 4 & 5 \\ 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$23. A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$24. A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & -4 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$25. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$26. A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$27. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -8 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -9 \\ 2 & 1 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$28. A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & -7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$29. A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$30. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити визначник, використовуючи:

а) метод трикутників;

б) розклад визначника за елементами рядка або стовпця;

в) властивості визначника (зведення визначника до трикутного вигляду).

$$1. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}. \quad 2. \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}. \quad 3. \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$4. \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}. \quad 5. \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}. \quad 6. \begin{vmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 0 & 7 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{array}{l}
7. \begin{vmatrix} -6 & 8 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad 8. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad 9. \begin{vmatrix} -8 & 2 & -4 \\ 7 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} \\
10. \begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad 11. \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad 12. \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -5 \end{vmatrix} \\
13. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad 14. \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad 15. \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\
16. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \quad 17. \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} \quad 18. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \\
19. \begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} \quad 20. \begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad 21. \begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\
22. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad 23. \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad 24. \begin{vmatrix} -5 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \\
25. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} \quad 26. \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad 27. \begin{vmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} \\
28. \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad 29. \begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad 30. \begin{vmatrix} -8 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}
\end{array}$$

Завдання 3. Перевірити на сумісність систему рівнянь і, у випадку сумісності, розв'язати її: а) за формулами Крамера; б) за допомогою

оберненої матриці (матричним методом); в) методом Гаусса;
 г) методом Жордана-Гаусса.

$$1. \begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=7, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3=6. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=3, \\ x_1+x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-3. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=12, \\ x_1+2x_2+4x_3=6, \\ 5x_1+x_2+2x_3=3. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=-4, \\ x_1+3x_2-x_3=11, \\ x_1-2x_2+2x_3=-7. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=12, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=6, \\ 2x_1-x_2-x_3=-9. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 8x_1+3x_2-6x_3=-4, \\ x_1+x_2-x_3=2, \\ 4x_1+x_2-3x_3=-5. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3=9, \\ x_1+x_2-x_3=-2, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=12. \end{cases} \quad 8. \begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=33, \\ 7x_1-5x_2=24, \\ 4x_1+2x_3=39. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=12, \\ 7x_1-5x_2+x_3=-33, \\ 4x_1+x_3=-7. \end{cases} \quad 10. \begin{cases} x_1+4x_2-x_3=8, \\ 5x_2+4x_3=-20, \\ 3x_1-2x_2+5x_3=-22. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=21, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=9, \\ 2x_1-x_2-x_3=10. \end{cases} \quad 12. \begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3=5, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=12, \\ x_1-2x_2+3x_3=-1. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 4x_1+x_2+4x_3=19, \\ 2x_1-x_2+2x_3=11, \\ x_1+x_2+2x_3=8. \end{cases} \quad 14. \begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=0, \\ 4x_1+2x_2+4x_3=6, \\ x_1+x_2+2x_3=4. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=8, \\ x_1+x_2+2x_3=11, \\ 4x_1+x_2+4x_3=22. \end{cases} \quad 16. \begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=-9, \\ x_1+5x_2+x_3=20, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=15. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases} \quad 18. \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases} \quad 20. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases} \quad 22. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases} \quad 24. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases} \quad 26. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19. \end{cases} \quad 28. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16, \\ x_1 + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ 3x_2 - 7x_3 = -6. \end{cases} \quad 30. \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10. \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти загальний розв'язок однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$1. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
3. \begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0, \\ 5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0. \end{cases} & 4. \begin{cases} 6x_1-9x_2+21x_3-3x_4-12x_5=0, \\ -4x_1+6x_2-14x_3+2x_4+8x_5=0, \\ 2x_1-3x_2+7x_3-x_4-4x_5=0. \end{cases} \\
5. \begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1-10x_2-3x_3+2x_4-x_5=0, \\ 4x_1+19x_2-4x_3-5x_4-x_5=0. \end{cases} & 6. \begin{cases} 5x_1-2x_2+3x_3-4x_4-x_5=0, \\ x_1+4x_2-3x_3+2x_4-5x_5=0, \\ 6x_1+2x_2-2x_4-6x_5=0. \end{cases} \\
7. \begin{cases} 12x_1-x_2+7x_3+11x_4-x_5=0, \\ 24x_1-2x_2+14x_3+22x_4-2x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=0. \end{cases} & 8. \begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5=0, \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4-5x_5=0, \\ x_1+3x_2-x_3-6x_4-x_5=0. \end{cases} \\
9. \begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_4-x_5=0, \\ x_1+5x_2-x_3+x_4+2x_5=0, \\ x_1+16x_2-6x_3+4x_4+7x_5=0. \end{cases} & 10. \begin{cases} 2x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3-2x_4=0, \\ 5x_1-3x_2-3x_3=0. \end{cases} \\
11. \begin{cases} 8x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2-2x_3+x_4-3x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3-2x_4+5x_5=0. \end{cases} & 12. \begin{cases} x_1+3x_2-x_3+12x_4-x_5=0, \\ 2x_1-2x_2+x_3-10x_4+x_5=0, \\ 3x_1+x_2+2x_4=0. \end{cases} \\
13. \begin{cases} 7x_1-14x_2+3x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1-2x_2+x_3-3x_4+7x_5=0, \\ 5x_1-10x_2+x_3+5x_4-13x_5=0. \end{cases} & 14. \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-5x_3-3x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-2x_2+3x_3+2x_4-x_5=0. \end{cases} \\
15. \begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4-2x_5=0, \\ x_1+2x_2+5x_3-2x_4-x_5=0. \end{cases} & 16. \begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3+x_4-x_5=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4+2x_5=0, \\ x_1-2x_2+5x_3-2x_4-3x_5=0. \end{cases} \\
17. \begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+10x_4-x_5=0, \\ x_1-x_2+3x_3-10x_4+x_5=0, \\ x_1+6x_2-9x_3+30x_4-3x_5=0. \end{cases} & 18. \begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+7x_4+5x_5=0, \\ x_1-2x_2+3x_3-5x_4-7x_5=0, \\ 3x_1-x_2-2x_3+2x_4-2x_5=0. \end{cases} \\
19. \begin{cases} 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0, \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0. \end{cases} & 20. \begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0, \\ x_1+11x_2-12x_3-34x_4-5x_5=0, \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0. \end{cases}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
21. \begin{cases} x_1+3x_2-5x_3+9x_4-5x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0. \end{cases} & 22. \begin{cases} 5x_1+2x_2-x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 3x_1+x_2-2x_3+3x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+3x_2-2x_3+4x_4+7x_5=0. \end{cases} \\
23. \begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3-x_4+4x_5=0, \\ 7x_1+5x_2-3x_3-2x_4+x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3-7x_5=0. \end{cases} & 24. \begin{cases} 6x_1+3x_2-2x_3+4x_4+7x_5=0, \\ 7x_1+4x_2-3x_3+2x_4+4x_5=0, \\ x_1+x_2-x_3-2x_4-3x_5=0. \end{cases} \\
25. \begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=0, \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=0, \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=0. \end{cases} & 26. \begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=0, \\ x_1+x_2+5x_3-5x_4+6x_5=0. \end{cases} \\
27. \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=0, \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=0, \\ x_1+2x_2+11x_3-6x_4+x_5=0. \end{cases} & 28. \begin{cases} 6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0. \end{cases} \\
29. \begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=0, \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+16x_3+x_4+6x_5=0. \end{cases} & 30. \begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0, \\ x_1-2x_2-3x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1-x_2+2x_3+3x_4=0. \end{cases}
\end{array}$$

Елементи аналітичної геометрії

Завдання 5. Довести, що вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} утворюють базис, і знайти координати вектора \vec{d} у цьому базисі.

- $\vec{a}(5, 4, 1)$, $\vec{b}(-3, 5, 2)$, $\vec{c}(2, -1, 3)$, $\vec{d}(7, 23, 4)$.
- $\vec{a}(2, -1, 4)$, $\vec{b}(-3, 0, -2)$, $\vec{c}(4, 5, -3)$, $\vec{d}(0, 11, -14)$.
- $\vec{a}(-1, 1, 2)$, $\vec{b}(2, -3, -5)$, $\vec{c}(-6, 3, -1)$, $\vec{d}(28, -19, -7)$.
- $\vec{a}(1, 3, 4)$, $\vec{b}(-2, 5, 0)$, $\vec{c}(3, -2, -4)$, $\vec{d}(13, -5, -4)$.
- $\vec{a}(1, -1, 1)$, $\vec{b}(-5, -3, 1)$, $\vec{c}(2, -1, 0)$, $\vec{d}(-15, -10, 5)$.
- $\vec{a}(3, 1, 2)$, $\vec{b}(-7, -2, -4)$, $\vec{c}(-4, 0, 3)$, $\vec{d}(16, 6, 15)$.

7. $\bar{a}(-3, 0, 1)$, $\bar{b}(2, 7, -3)$, $\bar{c}(-4, 3, 5)$, $\bar{d}(-16, 33, 13)$.
8. $\bar{a}(5, 1, 2)$, $\bar{b}(-2, 1, -3)$, $\bar{c}(4, -3, 5)$, $\bar{d}(15, -15, 24)$.
9. $\bar{a}(0, 2, -3)$, $\bar{b}(4, -3, -2)$, $\bar{c}(-5, 4, 0)$, $\bar{d}(-19, -5, -4)$.
10. $\bar{a}(3, -1, 2)$, $\bar{b}(-2, 3, 1)$, $\bar{c}(4, -5, -3)$, $\bar{d}(-3, 2, -3)$.
11. $\bar{a}(5, 3, 1)$, $\bar{b}(-1, 2, -3)$, $\bar{c}(3, -4, 2)$, $\bar{d}(-9, 34, -20)$.
12. $\bar{a}(3, 1, -3)$, $\bar{b}(-2, 4, 1)$, $\bar{c}(1, -2, 5)$, $\bar{d}(1, 12, -20)$.
13. $\bar{a}(6, 1, -3)$, $\bar{b}(-3, 2, 1)$, $\bar{c}(-1, -3, 4)$, $\bar{d}(15, 6, -17)$.
14. $\bar{a}(4, 2, 3)$, $\bar{b}(-3, 1, -8)$, $\bar{c}(2, -4, 5)$, $\bar{d}(-12, 14, -31)$.
15. $\bar{a}(-2, 1, 3)$, $\bar{b}(3, -6, 2)$, $\bar{c}(-5, -3, -1)$, $\bar{d}(31, -6, 22)$.
16. $\bar{a}(1, 3, 6)$, $\bar{b}(-3, 4, -5)$, $\bar{c}(1, -7, 2)$, $\bar{d}(-2, 17, 5)$.
17. $\bar{a}(7, 2, 1)$, $\bar{b}(5, 1, -2)$, $\bar{c}(-3, 4, 5)$, $\bar{d}(26, 11, 1)$.
18. $\bar{a}(3, 5, 4)$, $\bar{b}(-2, 7, -5)$, $\bar{c}(6, -2, 1)$, $\bar{d}(6, -9, 22)$.
19. $\bar{a}(5, 3, 2)$, $\bar{b}(2, -5, 1)$, $\bar{c}(-7, 4, -3)$, $\bar{d}(36, 1, 15)$.
20. $\bar{a}(11, 1, 2)$, $\bar{b}(-3, 3, 4)$, $\bar{c}(-4, -2, 7)$, $\bar{d}(-5, 11, -15)$.
21. $\bar{a}(9, 5, 3)$, $\bar{b}(-3, 2, 1)$, $\bar{c}(4, -7, 4)$, $\bar{d}(-10, -13, 8)$.
22. $\bar{a}(7, 2, 1)$, $\bar{b}(3, -5, 6)$, $\bar{c}(-4, 3, -4)$, $\bar{d}(-1, 18, -16)$.
23. $\bar{a}(1, 2, 3)$, $\bar{b}(-5, 3, -1)$, $\bar{c}(-6, 4, 5)$, $\bar{d}(-4, 11, 20)$.
24. $\bar{a}(-2, 5, 1)$, $\bar{b}(3, 2, -7)$, $\bar{c}(4, -3, 2)$, $\bar{d}(-4, 22, -13)$.
25. $\bar{a}(3, 1, 2)$, $\bar{b}(-4, 3, -1)$, $\bar{c}(2, 3, 4)$, $\bar{d}(14, 14, 20)$.
26. $\bar{a}(3, -1, 2)$, $\bar{b}(-2, 4, 1)$, $\bar{c}(4, -5, -1)$, $\bar{d}(-5, 11, 1)$.
27. $\bar{a}(4, 5, 1)$, $\bar{b}(1, 3, 1)$, $\bar{c}(-3, -6, 7)$, $\bar{d}(19, 33, 0)$.

28. $\bar{a}(1, -3, 1)$, $\bar{b}(-2, -4, 3)$, $\bar{c}(0, -2, 3)$, $\bar{d}(-8, -10, 13)$.

29. $\bar{a}(5, 7, -2)$, $\bar{b}(-3, 1, 3)$, $\bar{c}(1, -4, 6)$, $\bar{d}(14, 9, -1)$.

30. $\bar{a}(-1, 4, 3)$, $\bar{b}(3, 2, -4)$, $\bar{c}(-2, -7, 1)$, $\bar{d}(6, 20, -3)$.

Завдання 6. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(x_1, y_1, z_1)$,

$B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ і $D(x_4, y_4, z_4)$. Обчислити: а) координати векторів $\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{b} = \overline{AC}$, $\bar{c} = \overline{AD}$; б) вектор $\bar{d} = 2\bar{a} - 3\bar{b} + \bar{c}$;

в) скалярний добуток $\bar{a}\bar{b}$ та кут $\angle BAC$; г) векторний добуток $\bar{a} \times \bar{b}$

та площу трикутника ABC ; д) мішаний добуток $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ та об'єм піраміди $ABCD$.

1. $A(3, 4, 5)$, $B(1, 2, 1)$, $C(-2, -3, 6)$, $D(3, -6, -3)$.

2. $A(-7, -5, 6)$, $B(-2, 5, -3)$, $C(3, -2, 4)$, $D(1, 2, 2)$.

3. $A(1, 3, 1)$, $B(-1, 4, 6)$, $C(-2, -3, 4)$, $D(3, 4, -4)$.

4. $A(2, 4, 1)$, $B(-3, -2, 4)$, $C(3, 5, -2)$, $D(4, 2, -3)$.

5. $A(-5, -3, -4)$, $B(1, 4, 6)$, $C(3, 2, -2)$, $D(8, -2, 4)$.

6. $A(3, 4, 2)$, $B(-2, 3, -5)$, $C(4, -3, 6)$, $D(6, -5, 3)$.

7. $A(-4, 6, 3)$, $B(3, -5, 1)$, $C(2, 6, -4)$, $D(2, 4, -5)$.

8. $A(7, 5, 8)$, $B(-4, -5, 3)$, $C(2, -3, 5)$, $D(5, 1, -4)$.

9. $A(3, -2, 6)$, $B(-6, -2, 3)$, $C(1, 1, -4)$, $D(4, 6, -7)$.

10. $A(-5, -4, -3)$, $B(7, 3, -1)$, $C(6, -2, 0)$, $D(3, 2, -7)$.

11. $A(3, -5, -2)$, $B(-4, 2, 3)$, $C(1, 5, 7)$, $D(-2, -4, 5)$.

12. $A(7, 4, 9)$, $B(1, -2, -3)$, $C(-5, -3, 0)$, $D(1, -3, 4)$.

13. $A(-4, -7, 3)$, $B(-4, -5, 7)$, $C(2, -3, 3)$, $D(3, 2, 1)$.

14. $A(-4, -5, -3)$, $B(3, 1, 2)$, $C(5, 7, -6)$, $D(6, -1, 5)$.
15. $A(5, 2, 4)$, $B(-3, 5, -7)$, $C(1, -5, 8)$, $D(9, -3, 5)$.
16. $A(-6, 4, 5)$, $B(5, -7, 3)$, $C(4, 2, -8)$, $D(2, 8, -3)$.
17. $A(5, 3, 6)$, $B(-3, -4, 4)$, $C(5, -6, 8)$, $D(4, 0, -3)$.
18. $A(5, -4, 4)$, $B(-4, -6, 5)$, $C(3, 2, -7)$, $D(6, 2, -9)$.
19. $A(-7, -6, -5)$, $B(5, 1, -3)$, $C(8, -4, 0)$, $D(3, 4, -7)$.
20. $A(7, -1, -2)$, $B(1, 7, 8)$, $C(3, 7, 9)$, $D(-3, -5, 2)$.
21. $A(5, 2, 7)$, $B(7, -6, -9)$, $C(-7, -6, -3)$, $D(1, -5, 2)$.
22. $A(-2, -5, 1)$, $B(-6, -7, 9)$, $C(4, -5, 1)$, $D(2, 1, 4)$.
23. $A(-6, -3, 5)$, $B(5, 1, 7)$, $C(3, 5, -1)$, $D(4, -2, 9)$.
24. $A(7, 4, 2)$, $B(-5, 3, -9)$, $C(1, -5, 3)$, $D(7, -9, 1)$.
25. $A(-8, 2, 7)$, $B(3, -5, 9)$, $C(2, 4, -6)$, $D(4, 6, -5)$.
26. $A(4, 3, 1)$, $B(2, 7, 5)$, $C(-4, -2, 4)$, $D(2, -3, -5)$.
27. $A(-9, -7, 4)$, $B(-4, 3, -1)$, $C(5, -4, 2)$, $D(3, 4, 4)$.
28. $A(3, 5, 3)$, $B(-3, 2, 8)$, $C(-3, -2, 6)$, $D(7, 8, -2)$.
29. $A(4, 2, 3)$, $B(-5, -4, 2)$, $C(5, 7, -4)$, $D(6, 4, 7)$.
30. $A(-4, -2, -3)$, $B(2, 5, 7)$, $C(6, 3, -1)$, $D(6, -4, 1)$.

Завдання 7. Задано вершини трикутника ABC :

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$. Знайти:

- а) рівняння сторони AB ;
- б) рівняння висоти CH ;
- в) рівняння та довжину медіани AM ;
- г) точку N перетину медіани AM та висоти CH ;

д) рівняння прямої, яка проходить через точку N паралельно до сторони AB ;

е) відстань від точки C до прямої AB (довжину висоти CH).

1. $A(-2, 4)$, $B(3, 1)$, $C(10, 7)$.
2. $A(-3, -2)$, $B(14, 4)$, $C(6, 8)$.
3. $A(1, 7)$, $B(-3, -1)$, $C(11, -3)$.
4. $A(1, 0)$, $B(-1, 4)$, $C(9, 5)$.
5. $A(1, -2)$, $B(7, 1)$, $C(3, 7)$.
6. $A(-2, -3)$, $B(1, 6)$, $C(6, 1)$.
7. $A(-4, 2)$, $B(-6, 6)$, $C(6, 2)$.
8. $A(4, -3)$, $B(7, 3)$, $C(1, 10)$.
9. $A(4, -4)$, $B(8, 2)$, $C(3, 8)$.
10. $A(-3, -3)$, $B(5, -7)$, $C(7, 7)$.
11. $A(1, -6)$, $B(3, 4)$, $C(-3, 3)$.
12. $A(-4, 2)$, $B(8, -6)$, $C(2, 6)$.
13. $A(-5, 2)$, $B(0, -4)$, $C(-5, 7)$.
14. $A(4, -4)$, $B(6, 2)$, $C(-1, 8)$.
15. $A(-3, 8)$, $B(-6, 2)$, $C(0, -5)$.
16. $A(6, -9)$, $B(10, -1)$, $C(-4, 1)$.
17. $A(4, 1)$, $B(-3, -1)$, $C(7, -3)$.
18. $A(-4, 2)$, $B(6, -4)$, $C(4, 10)$.
19. $A(3, -1)$, $B(11, 3)$, $C(-6, 2)$.
20. $A(-7, -2)$, $B(-7, 4)$, $C(5, -5)$.
21. $A(-1, -4)$, $B(9, 6)$, $C(-5, 4)$.
22. $A(10, -2)$, $B(4, -5)$, $C(-3, 1)$.
23. $A(-3, -1)$, $B(4, -5)$, $C(8, 1)$.
24. $A(-2, -6)$, $B(-3, 5)$, $C(4, 0)$.
25. $A(-7, -2)$, $B(3,)$, $C(-4, 6)$.
26. $A(0, 2)$, $B(-7, -4)$, $C(3, 2)$.
27. $A(7, 0)$, $B(1, 4)$, $C(-8, -4)$.
28. $A(1, -3)$, $B(0, 7)$, $C(-2, 4)$.
29. $A(-5, 1)$, $B(8, -2)$, $C(1, 4)$.
30. $A(2, 5)$, $B(-3, 1)$, $C(0, 4)$.

Завдання 8. Задано чотири точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$,

$A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$. Знайти:

а) рівняння площини $A_1A_2A_3$;

б) рівняння площини, яка проходить через точку A_4 перпендикулярно до прямої A_1A_2 ;

в) рівняння прямої A_1A_2 ;

г) рівняння прямої A_4M перпендикулярної до площини $A_1A_2A_3$;

д) рівняння прямої A_3N паралельної до прямої A_1A_2 ;

е) синус кута між прямою A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$;

є) косинус кута між координатною площиною Oxy і площиною $A_1A_2A_3$.

1. $A_1(3, 1, 4)$, $A_2(-1, 6, 1)$, $A_3(-1, 1, 6)$, $A_4(0, 4, -1)$.

2. $A_1(3, -1, 2)$, $A_2(-1, 0, 1)$, $A_3(1, 7, 3)$, $A_4(8, 5, 8)$.

3. $A_1(3, 5, 4)$, $A_2(5, 8, 3)$, $A_3(1, 2, -2)$, $A_4(-1, 0, 2)$.

4. $A_1(2, 4, 3)$, $A_2(1, 1, 5)$, $A_3(4, 9, 3)$, $A_4(3, 6, 7)$.

5. $A_1(9, 5, 5)$, $A_2(-3, 7, 1)$, $A_3(5, 7, 8)$, $A_4(6, 9, 2)$.

6. $A_1(0, 7, 1)$, $A_2(2, -1, 5)$, $A_3(1, 6, 3)$, $A_4(3, -9, 8)$.

7. $A_1(5, 5, 4)$, $A_2(1, -1, 4)$, $A_3(3, 5, 1)$, $A_4(5, 8, -1)$.

8. $A_1(6, 1, 1)$, $A_2(4, 6, 6)$, $A_3(4, 2, 0)$, $A_4(1, 2, 6)$.

9. $A_1(7, 5, 3)$, $A_2(9, 4, 4)$, $A_3(4, 5, 7)$, $A_4(7, 9, 6)$.

10. $A_1(6, 8, 2)$, $A_2(5, 4, 7)$, $A_3(2, 4, 7)$, $A_4(7, 3, 7)$.

11. $A_1(4, 2, 5)$, $A_2(0, 7, 1)$, $A_3(0, 2, 7)$, $A_4(1, 5, 0)$.

12. $A_1(4, 4, 0)$, $A_2(7, 0, 2)$, $A_3(2, 8, 4)$, $A_4(9, 6, 9)$.

13. $A_1(4, 6, 5)$, $A_2(6, 9, 4)$, $A_3(2, 10, 10)$, $A_4(7, 5, 9)$.

14. $A_1(3, 5, 4)$, $A_2(8, 7, 4)$, $A_3(5, 10, 4)$, $A_4(4, 7, 8)$.

15. $A_1(10, 9, 6)$, $A_2(2, 8, 2)$, $A_3(9, 8, 9)$, $A_4(7, 10, 3)$.

16. $A_1(1, 8, 2)$, $A_2(5, 2, 6)$, $A_3(5, 7, 4)$, $A_4(4, 10, 9)$.

17. $A_1(6, 6, 5)$, $A_2(4, 9, 5)$, $A_3(4, 6, 11)$, $A_4(6, 9, 3)$.

18. $A_1(7, 2, 2)$, $A_2(-5, 7, -7)$, $A_3(5, -3, 1)$, $A_4(2, 3, 7)$.
19. $A_1(8, -6, 4)$, $A_2(10, 5, -5)$, $A_3(5, 6, -8)$, $A_4(8, 10, 7)$.
20. $A_1(1, -1, 3)$, $A_2(6, 5, 8)$, $A_3(3, 5, 8)$, $A_4(8, 4, 1)$.
21. $A_1(1, -2, 7)$, $A_2(4, 2, 10)$, $A_3(2, 3, 5)$, $A_4(5, 3, 7)$.
22. $A_1(4, 2, 10)$, $A_2(1, 2, 0)$, $A_3(3, 5, 7)$, $A_4(2, -3, 5)$.
23. $A_1(2, 3, 5)$, $A_2(5, 3, -7)$, $A_3(1, 2, 7)$, $A_4(4, 2, 0)$.
24. $A_1(5, 3, 7)$, $A_2(-2, 3, 5)$, $A_3(4, 2, 10)$, $A_4(1, 2, 7)$.
25. $A_1(4, 3, 5)$, $A_2(1, 9, 7)$, $A_3(0, 2, 0)$, $A_4(5, 3, 10)$.
26. $A_1(3, 2, 5)$, $A_2(4, 0, 6)$, $A_3(2, 6, 5)$, $A_4(6, 4, -1)$.
27. $A_1(2, 1, 6)$, $A_2(1, 4, 9)$, $A_3(2, -5, 8)$, $A_4(5, 4, 2)$.
28. $A_1(2, 1, 7)$, $A_2(3, 3, 6)$, $A_3(2, -3, 9)$, $A_4(1, 2, 5)$.
29. $A_1(2, -1, 7)$, $A_2(6, 3, 1)$, $A_3(3, 2, 8)$, $A_4(2, -3, 7)$.
30. $A_1(0, 4, 5)$, $A_2(3, -2, 1)$, $A_3(4, 5, 6)$, $A_4(3, 3, 2)$.

Комплексні числа

Завдання 9. Для двох заданих комплексних чисел $z_1 = x_1 + y_1i$ і

$z_2 = x_2 + y_2i$: а) знайти $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; z_1 / z_2 ; б) записати число

z_1 в тригонометричній та показниковій формі.

- 1) $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = -1 + 4i$. 2) $z_1 = -2$; $z_2 = i$.
- 3) $z_1 = 1$; $z_2 = i$. 4) $z_1 = i$; $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$.
- 5) $z_1 = -i$; $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$. 6) $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$; $z_2 = 1$.
- 7) $z_1 = 1 + i$; $z_2 = i$. 8) $z_1 = -1 + i$; $z_2 = -i$.
- 9) $z_1 = -1 + i$; $z_2 = i$. 10) $z_1 = -\sqrt{3} + i$; $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$.

- 11) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = -i$. 12) $z_1 = 3 - 2i$; $z_2 = i$.
- 13) $z_1 = -3 + 2i$; $z_2 = \sqrt{3} - i$. 14) $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = i$.
- 15) $z_1 = -3 - 2i$; $z_2 = -3 + 4i$. 16) $z_1 = \sqrt{3} - i$; $z_2 = 3 - 4i$.
- 17) $z_1 = 3 - 4i$; $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$. 18) $z_1 = -3 - 2i$; $z_2 = i + 1$.
- 19) $z_1 = -\sqrt{3} + i$; $z_2 = \sqrt{3} - i$. 20) $z_1 = -2 + i$; $z_2 = 5 - 12i$.
- 21) $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $z_2 = i$. 22) $z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$; $z_2 = -3 - 2i$.
- 23) $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = i$. 24) $z_1 = \frac{1-i}{1+i}$; $z_2 = 1$.
- 25) $z_1 = 5 - 12i$; $z_2 = 3 + 2i$. 26) $z_1 = -\sqrt{3} + i$; $z_2 = -3$.
- 27) $z_1 = -2 + i$; $z_2 = 3 + 2i$. 28) $z_1 = 3 - 3\sqrt{3}i$; $z_2 = \sqrt{3} - i$.
- 29) $z_1 = \sqrt{6} + \sqrt{2}i$; $z_2 = 1 - i$. 30) $z_1 = \sqrt{5} + \sqrt{15}i$; $z_2 = 3 + 2i$.

Завдання 10. Розв'язати рівняння на множині комплексних чисел.

- а) $\sqrt[5]{z} + \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 0$; б) $z^2 - 1 - i\sqrt{3} = 0$; в) $z^2 - 2z + 10 = 0$.
- а) $\sqrt[3]{z} - i\sqrt{3} - 1 = 0$; б) $z^2 + \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 0$; в) $z^2 + 4z + 5 = 0$.
- а) $\sqrt[7]{z} - 2i - 2 = 0$; б) $z^3 - i = 0$; в) $z^2 - 4z + 13 = 0$.
- а) $\sqrt[5]{z} - i + 1 = 0$; б) $z^4 + \sqrt{8} - 8i\sqrt{3} = 0$; в) $z^2 - 8z + 20 = 0$.
- а) $\sqrt[5]{z} - i\sqrt{12} - 2 = 0$; б) $z^2 - 3 - 3\sqrt{3}i = 0$; в) $z^2 + 6z + 12 = 0$.
- а) $\sqrt[5]{z} + 2i - 2 = 0$; б) $z^2 - i = 0$; в) $z^2 - 2z + 17 = 0$.
- а) $4\sqrt{z} - \sqrt{8} - \sqrt{8}i = 0$; б) $z^2 + 1 - i\sqrt{3} = 0$; в) $z^2 + 4z + 13 = 0$.
- а) $\sqrt[8]{z} - 3 - 3i = 0$; б) $z^4 + 1 = 0$; в) $z^2 + 8z + 25 = 0$.
- а) $4\sqrt{z} - \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 0$; б) $z^4 + 2 = 0$; в) $z^2 - 6z + 13 = 0$.

10. a) $\sqrt[3]{z} + 2 - 2i = 0$; б) $z^2 - 2 - i\sqrt{12} = 0$; в) $z^2 + 2z + 5 = 0$.
11. a) $\sqrt[5]{z} - 2 + i\sqrt{12} = 0$; б) $z^3 + 1 - i = 0$; в) $z^2 + 2z + 10 = 0$.
12. a) $\sqrt[3]{z} - \sqrt{3} - i = 0$; б) $z^3 + 2 - 2i = 0$; в) $z^2 - 4z + 8 = 0$.
13. a) $\sqrt[3]{z} - 1 + i = 0$; б) $z^2 - 8 - 8\sqrt{3}i = 0$; в) $z^2 - 8z + 17 = 0$.
14. a) $\sqrt[5]{z} + 2 + 2i = 0$; б) $z^2 - 3 + 3\sqrt{3}i = 0$; в) $z^2 + 6z + 13 = 0$.
15. a) $\sqrt[4]{z} - \sqrt{8} + \sqrt{8}i = 0$; б) $z^3 - 2i = 0$; в) $z^2 + 8z + 20 = 0$.
16. a) $\sqrt[3]{z} - 3 - 3\sqrt{3}i = 0$; б) $z^2 - 2 + i\sqrt{12} = 0$; в) $z^2 + 2z + 26 = 0$.
17. a) $\sqrt[5]{z} - 3 + 3i = 0$; б) $z^2 - 1 + i\sqrt{3} = 0$; в) $z^2 + 2z + 2 = 0$.
18. a) $\sqrt[3]{z} + 2 - i\sqrt{12} = 0$; б) $z^2 + 3 - 3\sqrt{3}i = 0$; в) $z^2 + 4z + 8 = 0$.
19. a) $\sqrt[3]{z} + i + \sqrt{3} = 0$; б) $z^3 - 5i = 0$; в) $z^2 - 8z + 25 = 0$.
20. a) $\sqrt[4]{z} + \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 0$; б) $z^2 - 8 - 8i\sqrt{3} = 0$; в) $z^2 - 6z + 10 = 0$.
21. a) $\sqrt[6]{z} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = 0$; б) $z^2 - 6 - 6\sqrt{3}i = 0$; в) $z^2 + 8z + 17 = 0$.
22. a) $\sqrt[3]{z} - 3 + 3\sqrt{3}i = 0$; б) $z^2 + 2 + i\sqrt{12} = 0$; в) $z^2 + 2z + 17 = 0$.
23. a) $\sqrt[5]{z} + \sqrt{8} - \sqrt{8}i = 0$; б) $z^2 + 3i = 0$; в) $z^2 - 2z + 26 = 0$.
24. a) $\sqrt[4]{z} + 3 - 3i = 0$; б) $z^2 + 3 + 3\sqrt{3}i = 0$; в) $z^2 - 4z + 5 = 0$.
25. a) $\sqrt[4]{z} + 2i + \sqrt{12} = 0$; б) $z^2 + 2 = 0$; в) $z^2 - 2z + 2 = 0$.
26. a) $\sqrt[6]{z} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 0$; б) $z^2 + 8 + 8\sqrt{3}i = 0$; в) $z^2 + 4z + 29 = 0$.
27. a) $\sqrt[3]{z} + 3 - 3\sqrt{3}i = 0$; б) $z^2 + 2 - i\sqrt{12} = 0$; в) $z^2 + 6z + 10 = 0$.
28. a) $\sqrt[4]{z} + 3 + 3i = 0$; б) $z^4 + 8 = 0$; в) $z^2 - 6z + 18 = 0$.
29. a) $\sqrt[3]{z} + \sqrt{8} - \sqrt{8}i = 0$; б) $z^2 + 1 + i\sqrt{3} = 0$; в) $z^2 - 2z + 5 = 0$.

30. а) $\sqrt[5]{z} - 2i - \sqrt{12} = 0$; б) $z^3 - 8i = 0$; в) $z^2 - 4z + 29 = 0$.

Вступ до математичного аналізу

Завдання 11. Знайти границі.

1. а) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 11x + 15}{3x^2 + 5x - 12}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x}$,

г) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$.

2. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 10}{x^3 - 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3 - 4x^2 + 5}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-3}$,

г) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}$.

3. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 7}{x^4 + 2x^3 + 1}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x}$,

г) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2}$.

4. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 - 8}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 4x}{2x^3 + 5}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{2-3x}$,

г) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x}$.

5. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - x^2 + x + 1}{x^4 + 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 28x}{5x^3 + 3x^2 + x - 1}$,

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x}$, г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^2}$.

6. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 1}{x^4 - 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{-5x}$,

- r) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$.
7. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 3}{5x^2 + 3x - 3}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + x^2 + x}{x^4 + 3x - 2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x}$,
- г) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}$, д) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.
8. а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x + 3}{5x^2 - 3x + 4}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4}$,
- г) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}$, д) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\pi - 2x}$.
9. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x}$,
- г) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^2}$.
10. а) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^3 + 64}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 10}{7x^3 + 2x + 1}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x} \right)^{2x+1}$,
- г) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \operatorname{tg} x}$.
11. а) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{4x^2 + 19x - 5}{2x^2 + 11x + 5}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 7}{2x^2 - x + 10}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+4} \right)^{3x+2}$,
- г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.
12. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x - 2}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x + 1}{x^4 - x^3 + 2x}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+2}$,

- r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{x^2}$.
13. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 7x + 5}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 9}{2x^2 - x + 4}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x-3}$,
- r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x \sin x}$.
14. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 9x + 10}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 7}{3x^2 + x + 1}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-3} \right)^{x-5}$,
- r) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}$.
15. a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{9x^2 + 17x - 2}{x^2 + 2x}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x - 2}{3x^3 - x - 4}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{2x}$,
- r) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - 2}{\sqrt{8-x} - 3}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}$.
16. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{18x^2 + 5x}{8 - 3x - 9x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{3x-1}$,
- r) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$.
17. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + 5x}{3x^2 + 7x}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 6x^2 + 2}{x^4 + 4x - 3}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x} \right)^{-3x}$,
- r) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{\sqrt{x+2} - 3}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 3x}{2x^2}$.
18. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^4 - 5x^2 + 1}{x^2 - 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 4x - 5}{4x^2 - 3x + 2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x+4}$,

- r) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$, д) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$.
19. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2+5x-1}{x^2-5x+6}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x+1} \right)^{4x-2}$,
- r) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}$.
20. a) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2-x-30}{x^3+125}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{3-2x}$,
- r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \right)$.
21. a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2+3x-28}{x^3-64}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3+4}{x^3-3x+2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-3x}{5-3x} \right)^x$,
- r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}$.
22. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{x^2-\frac{1}{4}}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{2-x} \right)^{3x}$,
- r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2-x}$.
23. a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2+3x-28}{x^2-4x}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+1} \right)^{2x}$,
- r) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 2x}{x \arcsin x}$.
24. a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2+11x+10}{x^2-5x+14}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x} \right)^{-2x}$,

- р) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}$.
25. а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 + x - 10}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{-x}$,
- р) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{3x} - x}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{4x^2}$.
26. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{4x^2 - 5x + 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 - 7}{3x^4 + 3x + 5}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x+5} \right)^{x+1}$,
- р) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^3 + x^2}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}$.
27. а) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 20x + 12}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 5x^2 - 3x^5}{x^5 + 6x + 8}$,
- в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2x}{3+2x} \right)^{-x}$, г) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{x^3 + 64}$, д) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{(\pi/2 - x)^2}$.
28. а) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 2x - 24}{2x^3 + 15x + 18}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 3}{2 + 2x - x^3}$,
- в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x+2} \right)^{x-2}$, г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{8+x} - 3}$, д) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$.
29. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 11x + 18}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 3x^2 + 2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{3-2x}$,
- р) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + x}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin x + \sin 7x}$.
30. а) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{7x^2 - 27x - 4}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4-2x}{1-2x} \right)^{x+1}$,
- р) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^3 - 8}$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}$.

Завдання 12. Знайти точки розриву функції $f(x)$ і встановити характер розриву. Зробити схематичний малюнок.

$$1. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1. \\ x^2+2, & -1 \leq x < 1. \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}}.$$

$$2. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0. \\ (x+1)^2, & 0 < x \leq 2. \\ -x+4, & x > 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 5^{\frac{1}{x-3}}.$$

$$3. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1. \\ x^2+1, & -1 < x \leq 1. \\ -x+3, & x > 1. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{x+7}{x-2}.$$

$$4. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0. \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2. \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{x-5}{x+3}.$$

$$5. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} -2(x+1), & x \leq -1. \\ (x+1)^3, & -1 < x < 0. \\ x, & x \geq 0. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}}.$$

$$6. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0. \\ x^2, & 0 < x \leq 2. \\ x+1, & x > 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 9^{\frac{1}{2-x}}.$$

$$7. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 1. \\ 2x, & 1 < x \leq 3. \\ x+2, & x > 3. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 2^{\frac{1}{x-5}}.$$

$$8. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0. \\ x+1, & 0 \leq x \leq 4. \\ 3+x, & x > 4. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 5^{\frac{1}{x-4}}.$$

$$9. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0. \\ 0, & 0 < x \leq 2. \\ x-2, & x > 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 6^{\frac{1}{x-3}}.$$

$$10. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0. \\ x, & 0 < x \leq 1. \\ 2+x, & x > 1. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 7^{\frac{1}{5-x}}.$$

$$11. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0. \\ x, & 0 \leq x \leq 2. \\ 0, & x > 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{x-3}{x+4}.$$

$$12. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \pi/2. \\ 0, & \pi/2 \leq x \leq \pi. \\ 2, & x \geq \pi. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{x+5}{x-2}.$$

$$13. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0. \\ x^2, & 0 < x < 2. \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 5^{\frac{2}{x-3}}.$$

$$14. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0. \\ x^2-1, & 0 \leq x < 1. \\ -x, & x \geq 1. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 4^{\frac{2}{x-1}}.$$

$$15. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0. \\ x^2+1, & 0 \leq x < 2. \\ x+1, & x \geq 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}.$$

$$16. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0. \\ 1, & 0 < x \leq 2. \\ x^2-2, & x > 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 8^{\frac{4}{x-2}}.$$

$$17. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0. \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi. \\ 3, & x \geq \pi. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 5^{\frac{4}{3-x}}.$$

$$18. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < -1. \\ x^2+1, & -1 \leq x \leq 2. \\ 2x, & x > 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{3x}{x-4}.$$

$$19. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0. \\ 2^x, & 0 < x \leq 2. \\ x+3, & x > 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{2x}{x^2-1}.$$

$$20. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} -x+2, & x \leq -2. \\ x^3, & -2 < x \leq 1. \\ 2, & x > 1. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 2^{\frac{3}{x+2}}.$$

$$21. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x \leq -1. \\ x^2-2, & -1 < x < 2. \\ x, & x \geq 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 4^{\frac{3}{x-2}}.$$

$$22. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1. \\ (x-2)^2, & 1 < x < 3. \\ -x+6, & x \geq 3. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 3^{\frac{2}{x+1}}.$$

$$23. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 1. \\ x^2, & 1 \leq x \leq 2. \\ -2x, & x > 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 5^{\frac{3}{x+4}}.$$

$$24. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -1. \\ x-1, & -1 \leq x \leq 3. \\ -x+5, & x > 3. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{x-4}{x+2}.$$

$$25. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x, & x < -2. \\ -x+1, & -2 \leq x \leq 1. \\ x^2-1, & x > 1. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{x-4}{x+3}.$$

$$26. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0. \\ -x^2+4, & 0 \leq x \leq 2. \\ x-2, & x \geq 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{x+5}{x-3}.$$

$$27. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1. \\ x^2 - 1, & -1 < x \leq 2. \\ 2x, & x > 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 3^{\frac{4}{1-x}}.$$

$$28. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0. \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi. \\ 1 - x, & x > \pi. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{4x}{x+5}.$$

$$29. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 2, & x < -1. \\ 1 - x, & -1 \leq x \leq 1. \\ \ln x, & x > 1. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = 6^{\frac{2}{4-x}}.$$

$$30. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0. \\ x^3, & 0 < x \leq 2. \\ x+4, & x > 2. \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{x+1}{x-2}.$$

Похідна і диференціал. Правила і методи диференціювання

Завдання 13. Знайти похідні функцій, використовуючи означення похідної.

- | | |
|---------------------------|-----------------------|
| 1. a) $y = x^2 - 15x$; | б) $y = 8x^3 - 8x$. |
| 2. a) $y = 2x^2 - 14x$; | б) $y = 9x^3 - 7x$. |
| 3. a) $y = 3x^2 - 13x$; | б) $y = 10x^2 - 6x$. |
| 4. a) $y = 4x^2 - 12x$; | б) $y = 11x^3 - 5x$. |
| 5. a) $y = 5x^2 - 11x$; | б) $y = 12x^3 - 4x$. |
| 6. a) $y = 6x^2 - 10x$; | б) $y = 13x^3 - 3x$. |
| 7. a) $y = 7x^2 - 9x$; | б) $y = 14x^3 - 2x$. |
| 8. a) $y = 8x^2 - 8x$; | б) $y = 15x^3 - x$. |
| 9. a) $y = 9x^2 - 7x$; | б) $y = x - 15x^3$. |
| 10. a) $y = 10x^2 - 6x$; | б) $y = 2x - 14x^3$. |
| 11. a) $y = 11x^2 - 5x$; | б) $y = 3x - 13x^3$. |
| 12. a) $y = 12x^2 - 4x$; | б) $y = 4x - 12x^3$. |
| 13. a) $y = 13x^2 - 3x$; | б) $y = 5x - 11x^3$. |

14. а) $y = 14x^2 - 2x$;

б) $y = 6x - 10x^3$.

15. а) $y = 15x^2 - x$;

б) $y = 7x - 9x^3$.

16. а) $y = x - 15x^2$;

б) $y = 8x - 8x^3$.

17. а) $y = 2x - 14x^2$;

б) $y = 9x - 7x^3$.

18. а) $y = 3x - 13x^2$;

б) $y = 10x - 6x^3$.

19. а) $y = 4x - 12x^2$;

б) $y = 11x - 5x^3$.

20. а) $y = 5x - 11x^2$;

б) $y = 12x - 4x^3$.

21. а) $y = 6x - 10x^2$;

б) $y = 13x - 3x^3$.

22. а) $y = 7x - 9x^2$;

б) $y = 14x - 2x^3$.

23. а) $y = 8x - 8x^2$;

б) $y = 15x - x^3$.

24. а) $y = 9x - 7x^2$;

б) $y = x^3 - 15x$.

25. а) $y = 10x - 6x^2$;

б) $y = 2x^3 - 14x$.

26. а) $y = 11x - 5x^2$;

б) $y = 3x^3 - 13x$.

27. а) $y = 12x - 4x^2$;

б) $y = 4x^3 - 12x$.

28. а) $y = 13x - 3x^2$;

б) $y = 5x^3 - 11x$.

29. а) $y = 14x - 2x^2$;

б) $y = 6x^3 - 10x$.

30. а) $y = 15x - x^2$;

б) $y = 7x^3 - 9x$.

Завдання 14. Знайти похідні першого порядку.

1. а) $y = x^3 - \frac{3}{x^2} + 2\sqrt{x^3}$;

б) $y = 5^x \ln x + \frac{x^4 + \sin x}{2 - \cos x}$;

в) $y = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^4(x^5 + 1)$;

г) $y = \arcsin^3(x^4 \sin x)$;

д) $x^4 + e^{3y} + \sin(x^2 + y^3) = 0$;

е) $x = \operatorname{tg}^2 t^3, y = 2t^2 - \cos^3 t$;

е) $y = (x^3 + 2)^{4 \sin x}$;

ж) $y = (\ln x + 5)^{\sqrt{x-3x}}$.

2. а) $y = x^7 - \frac{5}{x^3} + 4\sqrt{x^5}$;

б) $y = e^x \log_4 x + \frac{x^6 + 2 \cos x}{x^7 - 3 \sin x}$;

в) $y = 2 \arccos^4 x - 4^{x^2+3}$;

г) $y = \lg(x^4 + x \cos x)$;

- д) $\operatorname{ctg}(3x + y^4) - \ln(x^2 - y^5) = 0$; е) $x = \sqrt{t} + 2^t, y = \arccos^4 t$;
- е) $y = (2x^4 - \sqrt{x})^{\cos 2x}$; ж) $y = (\operatorname{tg}^2 x - 1)^{x^3 + 5x}$.
3. а) $y = x^8 - \frac{5}{x} + 7\sqrt[6]{x^5}$; б) $y = \sin x \arccos x - \frac{x^3 + x}{e^x + 4}$;
- в) $y = \log_3(x^4 + 2x) - \operatorname{tg}^3(x^2 - 1)$; г) $y = \operatorname{ctg}^2(x + x^2 \sin x)$;
- д) $\sqrt[3]{x^2 + y^5} - e^{3x} + 2 \operatorname{tg} y = 0$; е) $x = \lg(2t^5 - 1), y = t^2 \sin t$;
- е) $y = (3x^5 - \sqrt[3]{x})^{\operatorname{tg} 4x}$; ж) $y = (e^{2x} - 2\sqrt{x})^{x - 4x^4}$.
4. а) $y = x^5 - \frac{4}{x^2} + 3\sqrt[4]{x^5}$; б) $y = x^4 \operatorname{arctg} x + \frac{\arcsin x}{x - \arccos x}$;
- в) $y = e^{x^4 + 5x} - \log_6^2(x^7 + 3x)$; г) $y = \operatorname{tg}^9 \frac{1 - 2x}{3x + 1}$;
- д) $y^6 - \operatorname{tg}^3(5x + 2y) - 4^x = 0$; е) $x = \arcsin t^3, y = \sqrt{t} + \sin^7 t$;
- е) $y = (4x^6 - 3x)^{2 \operatorname{ctg} x}$; ж) $y = (\arcsin x + x)^{5x^2 + 3x}$.
5. а) $y = x^3 + \frac{5}{x^7} - 6\sqrt[3]{x^7}$; б) $y = x^5 \operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3 - \sin x}$;
- в) $y = 3^{x^2 + x} - \ln^4(x^4 + 1)$; г) $y = \log_3 \frac{4x + 1}{2 - 5x}$;
- д) $\cos^5 x - \lg y + 5\sqrt{x} y^4 = 0$; е) $x = \log_2(5t + 1), y = \sqrt{t} \cos^2 t$;
- е) $y = (5x^7 + 2x^2)^{\arcsin x}$; ж) $y = (3^x + 2x^4)^{2x^2 + 3\sqrt{x}}$.
6. а) $y = x^7 + \frac{9}{x^6} - 7\sqrt[3]{x^4}$; б) $y = \lg x \operatorname{tg} x + \frac{x^7 - e^x}{x^2 + 3}$;
- в) $y = \operatorname{arctg}(1 + x^2) + \arccos^3 x^2$; г) $y = 9^{x^2 + x^3 \sin x}$;
- д) $\lg(2x^3 - 3y^2) + 2\sqrt{x} + 3y^5 = 0$; е) $x = \operatorname{arctg}^2 t, y = e^{3t} - t \operatorname{ctg} t$;

- е) $y = (6x^8 - 5x^4)^{\arccos 2x}$; ж) $y = (2e^{3x} + x)^{x^4 + 6x^2}$.
7. а) $y = x^6 - \frac{3}{x^2} + 5\sqrt{x^2}$; б) $y = x^4 \log_3 x - \frac{1+x^4}{2^x + x^2}$;
- в) $y = e^{x^2 + 9x} - \sqrt{\ln(x^2 + 3)}$; г) $y = \operatorname{arctg} \frac{7x+1}{2-3x}$;
- д) $\sqrt[5]{y^3} + x^4 \sin y - 4\sqrt{5x+6y} = 0$; е) $x = 3^{2t} + 2t^4, y = \ln^2(t^4 + 1)$;
- е) $y = (7x^9 + 4x^3)^{3\operatorname{arctg} x}$; ж) $y = (4 \lg x + 3\sqrt{x})^{x^5 + 3x^2}$.
8. а) $y = x^7 + \frac{5}{x^4} - 6\sqrt[4]{x^7}$; б) $y = \sqrt{x} \sin x + \frac{x^2 - 2 \cos x}{x^3 + 1}$;
- в) $y = t g^4 x + \sqrt{\operatorname{ctg}(x^3 + 1)}$; г) $y = \log_5 \frac{7x+2}{x^2 + 5}$;
- д) $5^x - 3\sqrt{y+1} + 2 \cos(y^2 - 3x) = 0$; е) $x = \operatorname{arctg}^4 t, y = \sqrt{t} \lg(2t - 1)$;
- е) $y = (8x^{10} - 7x^7)^{\operatorname{arctg} 4x}$; ж) $y = (\ln x - 2x^3)^{3\sqrt{x+x^2}}$.
9. а) $y = x^9 - \frac{4}{x^3} + 7\sqrt{x^5}$; б) $y = \sqrt[3]{x} e^x + \frac{3 - 5 \sin x}{\cos x + x^2}$;
- в) $y = 7^{x^4 + 3x} - \operatorname{arctg}^7(x^5 + 4)$; г) $y = e^{\sin x + x^5 \cos x}$;
- д) $\operatorname{ctg}(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}) + 5x^5 - e^{4y} = 0$; е) $x = 7^{4t} - t, y = \log_3(2t^4 + 4)$;
- е) $y = (9x^{11} + 2x^3)^{5 \ln x}$; ж) $y = (\sin 3x + x^2)^{2x - x^3}$.
10. а) $y = 3x^2 - \frac{9}{x^5} + 2\sqrt[4]{x}$; б) $y = \sqrt{x^3} \arcsin x - \frac{x^4 + 9x}{x^2 + \operatorname{tg} x}$;
- в) $y = 4 \operatorname{ctg}^3 x + \sqrt{\operatorname{arctg} x^5}$; г) $y = \sin^5 \frac{4x+1}{5-6x}$;
- д) $y^5 \sin^3 x + \sqrt{x^4 + 5y^2} = 0$; е) $x = \arcsin t^3, y = 2\sqrt{1+t^2}$;

- е) $y = (10x^9 - 3x)^{\lg 4x}$; ж) $y = (\cos 5x - 2\sqrt{x})^{x^4+1}$.
11. а) $y = 2x^3 + \frac{3}{x^4} - 9\sqrt[5]{x^3}$; б) $y = x^4 e^x - \frac{x^4+5}{\lg x+2}$;
- в) $y = 5^{x^4-7x} + \ln^5(x^7+3x)$; г) $y = \cos^3(1+\sqrt{x}e^x)$;
- д) $9^{3x+4y} + 2\sin^5 x + x\sqrt{y} = 0$; е) $x = 2\sqrt[6]{t} + 3t, y = \lg^2(t^4+3)$;
- е) $y = (x^5 - 2\sqrt[3]{x})^{3\sin x}$; ж) $y = (5^x + 4x)^{2-3x}$.
12. а) $y = 5x^5 - \frac{2}{x^6} + 3\sqrt[8]{x^7}$; б) $y = \sqrt{x^9} \operatorname{tg} x + \frac{2x^3 - \lg x}{3+5x}$;
- в) $y = e^{3x+x^4} - \log_4^5(2+x^6)$; г) $y = \operatorname{tg}^4 \frac{6-7x}{8x-5}$;
- д) $2y^7 + \arccos^3 x - \sqrt{5x+3y} = 0$; е) $x = \log_7(5t+1), y = t^4 \sin t$;
- е) $y = (2x^6 + 7x)^{\cos 3x}$; ж) $y = (4e^{2x} - \sqrt[3]{x})^{2x^3+x}$.
13. а) $y = 3x^7 + \frac{9}{x^8} - 5\sqrt{x^2}$; б) $y = x^5 \arcsin x - \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$;
- в) $y = 2\sqrt{\sin x} + \operatorname{arctg}^6 x^4$; г) $y = \log_3(x^2 + 2xe^x)$;
- д) $5 \cos x - \sin^3(xy) + \sqrt[4]{y} = 0$; е) $x = \sqrt{t} \lg t, y = 3 \operatorname{arctg}^3 t$;
- е) $y = (3x^7 - 5x^2)^{4\operatorname{tg} x}$; ж) $y = (\arccos x + 2)^{\sqrt{x+3x}}$.
14. а) $y = 6x^9 - \frac{5}{x} + \sqrt{x^5}$; б) $y = x^8 \sin x - \frac{2x^3 + 3\sin x}{3x^2 - 7\cos x}$;
- в) $y = \arccos x^5 - \ln^3(x^4+5)$; г) $y = 3^{5x-\sqrt{x}\sin x}$;
- д) $\arcsin(x^3 - 2y^2) + 3\sqrt{x}y = 0$; е) $x = 3^{2t+1}, y = t^2 \ln^3 t$;
- е) $y = (4x^8 + 3\sqrt[4]{x})^{\operatorname{ctg} 5x}$; ж) $y = (3x + \arcsin x)^{2x^6}$.

15. а) $y = 5x^2 - \frac{8}{x^3} + \sqrt[3]{x}$; б) $y = x^5 \operatorname{arctg} x + \frac{4x + e^x}{1 + x^5}$;
- в) $y = \sin^5 x - 2 \operatorname{tg}^7(x^9 + 5)$; г) $y = \log_8 \frac{9x - 3}{2 + \cos x}$;
- д) $2 \log_5(4y^2 + x^3) - 3x + 5\sqrt{y} = 0$; е) $x = \arcsin^4 t, y = 2\sqrt{t} + \cos^8 t$;
- е) $y = (5x^9 - 2x^4)^{\arcsin 9x}$; ж) $y = (2 \ln x + x^2)^{3x+1}$.
16. а) $y = 5x^2 + \frac{4}{x} + \sqrt[3]{x^4}$; б) $y = 7^x \lg x - \frac{x^2 - \cos x}{3 + \sin x}$;
- в) $y = \operatorname{ctg}^8 x + 3 \operatorname{tg}^5(x^6 + 3)$; г) $y = \arccos^4(x^5 \cos x)$;
- д) $e^{5y-x} + 3 \operatorname{tg} x + x \ln y = 0$; е) $x = 3t \operatorname{arctg} t^2, y = \lg(t^4 + 9)$;
- е) $y = (6x^{10} + 2\sqrt[5]{x})^{5 \arccos x}$; ж) $y = (\sqrt{x} - 5 \lg x)^{4+3x}$.
17. а) $y = x^8 - \frac{6}{x^4} + 5\sqrt[5]{x^3}$; б) $y = 5^x \log_2 x - \frac{x^7 - 3 \sin x}{x^8 + 4 \cos x}$;
- в) $y = 4 \arcsin^6 x - e^{\sin^2 x}$; г) $y = \ln(x^6 - 4x^2 \sin x)$;
- д) $2x^5 - e^{4y} - 3 \cos(x^4 + 2y^2) = 0$; е) $x = 4 \operatorname{ctg}^3 t^2, y = 3t^3 + 2 \sin^5 t$;
- е) $y = (7x - 5\sqrt{x})^{\operatorname{arctg} 4x}$; ж) $y = (2 \sin 6x + 7)^{4x-5}$.
18. а) $y = x^9 - \frac{7}{x^2} + 5\sqrt[5]{x^6}$; б) $y = \cos x \arcsin x + \frac{2x^2 - x}{4^x + 1}$;
- в) $y = \log_5(x - 3x^5) + \operatorname{ctg}^5(x^3 + 1)$; г) $y = \operatorname{tg}^5(x^2 - x \cos x)$;
- д) $3 \operatorname{tg} t(x^4 + 5y) + \lg(x^5 - y^2) = 0$; е) $x = \sqrt[3]{t^2} + 3^t, y = 2 \arcsin^3 t$;
- е) $y = (8x^2 + 3x)^{4 \operatorname{arctg} x}$; ж) $y = (9x + \cos 3x)^{x^3 - x}$.
19. а) $y = x^6 + \frac{5}{x^3} - 4\sqrt[6]{x^7}$; б) $y = 2x^5 \operatorname{arctg} x - \frac{\arccos x}{\arcsin x - x^2}$;

- в) $y = 3e^{x^5-4x} + \log_4^2(x^8 - 4x)$; г) $y = \operatorname{ctg}^4 \frac{2x+3}{4-5x}$;
 д) $\sqrt[4]{x^5 + y^2} - 2e^{6x} + 3\operatorname{ctg} y = 0$; е) $x = \ln(3t^4 + 1), y = t^3 \cos t$;
 е) $y = (9x^3 - 5x)^{4\ln x}$; ж) $y = (3\operatorname{tg} x - 8x)^{2x+7}$.
20. а) $y = x^8 - \frac{6}{x^5} + 5\sqrt[4]{x^3}$; б) $y = \ln x \operatorname{ctg} x - \frac{x^5 - 3e^x}{2 + x^4}$;
 в) $y = \operatorname{arctg}(x^2 - 4) + 2 \arcsin^5 x^3$; г) $y = 7^{2x^3 - x^2 \cos x}$;
 д) $6y^5 + 5\operatorname{tg}^2(7x + 4y) - 5^x = 0$; е) $x = \arccos t^5, y = \sqrt[4]{t} - \sin^6 t$;
 е) $y = (10x^4 - \sqrt[6]{x})^{\lg 5x}$; ж) $y = (5x^4 + \operatorname{ctg} x)^{x^5 - \sqrt{x}}$.
21. а) $y = x^7 + \frac{2}{x^4} - 8\sqrt{x^5}$; б) $y = 2x^5 \log_6 x + \frac{x^5 + 4}{5^x + x^5}$;
 в) $y = 4e^{x^5-7x} + 2\sqrt{\lg(x^3 + 4)}$; г) $y = \operatorname{arctg} \frac{9x-4}{5-8x}$;
 д) $5\sin^4 x + \ln y + 3\sqrt{y}x^3 = 0$; е) $x = \log_5(3t+1), y = t^2 \sqrt{\sin t}$;
 е) $y = (x^5 + 6x^3)^{4\sin x}$; ж) $y = (\arccos x - 2\sqrt{x})^{5x+x^2}$.
22. а) $y = 4x^8 - \frac{3}{x^5} + 5\sqrt[7]{x^4}$; б) $y = 2\sqrt{x} \cos x - \frac{x^3 + 3\sin x}{2 - x^4}$;
 в) $y = \operatorname{ctg}^4 x - 4\sqrt{\operatorname{tg}(x^4 + 2)}$; г) $y = \log_7 \frac{8x+4}{x^2+6}$;
 д) $2\ln(3x^2 + 5y^4) - 3\sqrt{y} + 5x^4 = 0$; е) $x = \operatorname{arctg}^9 t, y = t^2 \operatorname{tg} t$;
 е) $y = (2x^6 - \sqrt[3]{x})^{\cos 8x}$; ж) $y = (4x - 2 \arcsin x)^{x^3 - 8x}$.
23. а) $y = x^{10} + \frac{5}{x^4} - 6\sqrt[5]{x^6}$; б) $y = 5\sqrt[3]{x} 3^x - \frac{3 \cos x - 5}{\sin x + x^3}$;

в) $y = 9^{x^5 - 4x} + 2 \operatorname{arctg}^6(x^4 + 7)$; г) $y = e^{2 \cos x - x^4 \sin x}$;
 д) $\sqrt[4]{y^5} - 3x^3 + 5\sqrt{3x^3 + 4y^5} = 0$; е) $x = 2^{3t} + 5t^3, y = \lg^3(t^2 + 4)$;
 е) $y = (3x^7 + 7x^3)^{5 \operatorname{tg} x}$; ж) $y = (\operatorname{arctg} x + x^6)^{\sqrt{x+4x}}$.

24. а) $y = 4x^3 + \frac{5}{x^6} - 3\sqrt{x^7}$; б) $y = \sqrt[3]{x^2} \arccos x + \frac{2x^3 + 5x}{x^4 - \operatorname{ctg} x}$;
 в) $y = 5 \operatorname{tg}^5 x - 2\sqrt{\operatorname{arctg} x^4}$; г) $y = \cos^4 \frac{5x-2}{3-4x}$;
 д) $3x + 2\sqrt{y+4} - \sin(x^2 + 3y^3) = 0$; е) $x = \operatorname{arctg} t^5, y = t^5 \ln(5t+1)$;
 е) $y = (4x^8 - 4\sqrt{x})^{\operatorname{ctg} 3x}$; ж) $y = (2x - 3 \operatorname{arctg} x)^{x^2 + 5x^5}$.

25. а) $y = 3x^4 - \frac{2}{x^5} + 4\sqrt[3]{x^5}$; б) $y = 4x^7 e^x + \frac{x^3 - 4}{\ln x + 2}$;
 в) $y = 3^{x^2 + 5x} - \lg^6(x^9 - 4x)$; г) $y = \sin^4(5\sqrt[3]{x}e^x + 3)$;
 д) $2 \operatorname{tg}(\sqrt{y} - 3\sqrt[5]{x}) - 4x^4 + 2e^{5y} = 0$; е) $x = 4^{7t} + 2t, y = \log_2(3t^3 + 8)$;
 е) $y = (5x^9 + 3x^2)^{7 \arcsin x}$; ж) $y = (7^x + 2\sqrt{x})^{3x^4 + x}$.

26. а) $y = 7x^6 + \frac{3}{x^7} - 4\sqrt[4]{x^8}$; б) $y = \sqrt{x^5} \operatorname{ctg} x - \frac{4x^4 + 2 \ln x}{1 - 4x}$;
 в) $y = 5e^{4x+x^5} + 2 \log_8^3(4+x^2)$; г) $y = \operatorname{ctg}^5 \frac{4-9x}{5x-4}$;
 д) $2y^7 \cos^2 x - 5\sqrt{y^4 + x^3} = 0$; е) $x = \arccos t^4, y = 3\sqrt{3+4t^2}$;
 е) $y = (6x - 5\sqrt{x})^{\arccos 9x}$; ж) $y = (x^3 + e^x)^{x^5 - 3x^4}$.

27. а) $y = 6x^8 - \frac{5}{x^9} + 4\sqrt{x^9}$; б) $y = 4x^7 \arccos x + \frac{2 \operatorname{arctg} x}{9+x^2}$;
 в) $y = 3\sqrt{\cos x} - 4 \operatorname{arctg}^5 x^6$; г) $y = \log_4(x^4 + 5x^3 e^x)$;

д) $7^{4x-3y} + 5\cos^4 x + \sqrt{x}y^3 = 0$; е) $x = 3\sqrt[5]{t^2} - 4t, y = \ln^3(t^5 + 2)$;
 е) $y = (7x^2 + 5x)^{4\operatorname{arctg} x}$; ж) $y = (2\lg x + 3)^{2x-\sqrt{x}}$.

28. а) $y = 5x^{10} - \frac{3}{x} + \sqrt[5]{x^2}$; б) $y = 2x^5 \cos x + \frac{3x^2 - 4\cos x}{5\sin x - 7x^3}$;
 в) $y = \arcsin x^4 + 2\lg^4(x^3 + 9)$; г) $y = 5^{3x+\sqrt{x}\cos x}$;
 д) $3y^8 + 4\arcsin^2 x - 5\sqrt{3x+5y} = 0$; е) $x = 2\sin t^2, y = \lg^3(t^2 + 3)$;
 е) $y = (8x^3 + 3\sqrt[3]{x})^{\operatorname{arctg} 5x}$; ж) $y = (9x + 2\lg x)^{x^4+4x}$.

29. а) $y = 6x^3 + \frac{9}{x^4} - 2\sqrt[3]{x^7}$; б) $y = x^4 \operatorname{arctg} x - \frac{3e^x + 5}{2-x^2}$;
 в) $y = \cos^4 x + 3\operatorname{ctg}^9(x^7 + 3)$; г) $y = \log_5 \frac{2+3x}{1+\sin x}$;
 д) $3\sin x + 5\cos^2(xy) - 2\sqrt[3]{y} = 0$; е) $x = t^2 \ln t, y = 9\operatorname{arctg}^4 t$;
 е) $y = (9x^4 - 7x)^{\lg x}$; ж) $y = (x^2 + 3\sin x)^{4x^5+x}$.

30. а) $y = 2x^7 - \frac{3}{x^5} - \sqrt[4]{x^5}$; б) $y = \sqrt{x} \ln x + \frac{x^2 + 3x}{x^3 - \cos x}$;
 в) $y = \log_5(x^4 + \sqrt[3]{x} \sin x)$; г) $y = \sqrt{\arcsin(x^2 \cos x)}$;
 д) $\arccos(x^2 + y^5) + 2\sqrt{y}x^4 = 0$; е) $x = 5^{4t}, y = \sqrt[3]{t^2} \lg^5 t$;
 е) $y = (10x^5 + \sqrt[8]{x})^{\lg 3x}$; ж) $y = (7\cos 8x + 2x)^{3x^8-5x}$.

Завдання 15. Знайти похідні другого порядку.

1. а) $y = 4e^{5x} - 3\sin^2 x$; б) $x = 5\sqrt{t} + \cos t, y = \arcsin t$.
 2. а) $y = 2\cos^3 x + 5^{4x}$; б) $x = 3t^4 - 4\sin t, y = \arccos t$.

3. a) $y = \log_4(x^4 + 1) + 2\sqrt{x}$; б) $x = \sqrt[3]{t} - 5 \operatorname{tg} t, \quad y = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} t$.
4. a) $y = 8x^3 + 3 \ln^4 x$; б) $x = 2 \operatorname{ctg} t + 9, \quad y = \operatorname{ar} \operatorname{ctg} t$.
5. a) $y = 3 \operatorname{arcsin}(x^4 + 5) - e^{2x}$; б) $x = 2 \operatorname{tg} t, \quad y = 4t^3 + 3^{4t}$.
6. a) $y = 5 \operatorname{arccos}^4 x + 3\sqrt[3]{x^2}$; б) $x = \log_5 t, \quad y = \sqrt{t} + 2e^{3t}$.
7. a) $y = 6 \operatorname{ar} \operatorname{ctg}(1 - x^3) + 5x$; б) $x = 4 \ln t, \quad y = 2 \sin t + \sqrt{t}$.
8. a) $y = 4x^4 - 3 \operatorname{ar} \operatorname{ctg}^5 x$; б) $x = 4^{\sin t}, \quad y = t^5 + 5\sqrt[3]{t}$.
9. a) $y = e^{\cos t} - 5x^7$; б) $x = 3 \lg t, \quad y = 2 \operatorname{tg} t + 3t^4$.
10. a) $y = 4\sqrt[5]{x} - 5^{\operatorname{tg} x}$; б) $x = \operatorname{arcsin} t, \quad y = 9t^2 + 2^t$.
11. a) $y = \log_5(x^3 + 5) - 4x^5$; б) $x = \operatorname{arccos} t, \quad y = 3t^4 - 2 \cos t$.
12. a) $y = \log_8^5 x - 2\sqrt[6]{x}$; б) $x = \operatorname{ar} \operatorname{ctg} t, \quad y = 2 \ln t + t^5$.
13. a) $y = 5x^6 + 3 \ln(x^5 + 5)$; б) $x = \operatorname{ar} \operatorname{ctg} t, \quad y = 5 \lg t - 4\sqrt{t}$.
14. a) $y = 3 \lg^5 x - 2x^9$; б) $x = \operatorname{arcsin} t, \quad y = 7t^2 - \ln t$.
15. a) $y = 5^{\sin x} + 2\sqrt[5]{x}$; б) $x = \operatorname{arcsin} t, \quad y = 7t^2 - \ln t$.
16. a) $y = \cos(x^3 - x) - 3x$; б) $x = \sqrt{t} + 7 \operatorname{ctg} t, \quad y = 2 \log_4 t$.
17. a) $y = 2 \operatorname{tg}^3 x - 5e^{4x}$; б) $x = 3 \sin t - 4\sqrt[3]{t}, \quad y = \operatorname{ar} \operatorname{ctg} t$.
18. a) $y = 4^{5x} - 3 \operatorname{ctg}^2 x$; б) $x = 7 \cos t - 6t^3, \quad y = \operatorname{ar} \operatorname{ctg} t$.
19. a) $y = 3\sqrt[3]{x} + 2 \log_5(x^2 + 2)$; б) $x = 4 \operatorname{ctg} t + \sqrt{t}, \quad y = \operatorname{arccos} t$.
20. a) $y = 5 \lg^4 x - 7x^2$; б) $x = 8t + 3 \operatorname{tg} t, \quad y = \operatorname{arcsin} t$.
21. a) $y = 2e^{3x} + 5 \operatorname{arccos} x^3$; б) $x = 3 \operatorname{ctg} t, \quad y = 4^{6t} + 5t^2$.
22. a) $y = 5\sqrt[4]{x^3} + 2 \operatorname{arcsin}^5 x$; б) $x = 4 \log_9 t, \quad y = 5e^{2t} + t^4$.

23. а) $y = 6x^2 - 5 \operatorname{arctg}(x^4 + 4)$; б) $x = 51gt, \quad y = \sqrt[5]{t} - 3 \cos t$.
24. а) $y = 2 \operatorname{arctg}^7 x + 9x^2$; б) $x = 5^{\cos t}, \quad y = 7\sqrt[4]{t} + 2t^4$.
25. а) $y = 3x^5 + 2e^{\sin x}$; б) $x = 61gt, \quad y = 5t^3 - 8 \operatorname{ctg} t$.
26. а) $y = 4^{\operatorname{ctg} x} - 2x^6$; б) $x = 2 \arccos t + \sqrt{t}, \quad y = 4t + 1$.
27. а) $y = 8 \log_4(2 + x^4) - 7x^5$; б) $x = 3 \arcsin t + t^2, \quad y = 2 - 5t$.
28. а) $y = \log_3^8 x + 4x^9$; б) $x = 3 \operatorname{arctg} t - 2\sqrt{t}, \quad y = 3^{2t}$;
29. а) $y = 21g(x^4 + 1) - 6\sqrt[6]{x}$; б) $x = 5 \operatorname{arctg} t + 2t, \quad y = e^{5t}$.
30. а) $y = 9x^3 - 5 \ln^2 x$; б) $x = 4^{\sin t} + t^4, \quad y = 2 \operatorname{tg} t$.

Завдання 16. Знайти диференціал функції і наближено обчислити її значення у заданій точці x .

1. $y = \arcsin(x^2 - 1), \quad x = 0,96$. 2. $y = \sqrt{x^3 + 1}, \quad x = 2,05$.
3. $y = \arccos(9 - x^2), \quad x = 2,94$. 4. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2}, \quad x = 5,05$.
5. $y = \operatorname{arctg}(3x^2 - 26), \quad x = 2,96$. 6. $y = \sqrt[4]{x^2 + 7}, \quad x = 3,03$.
7. $y = \operatorname{arctg}(17 - x^2), \quad x = 3,98$. 8. $y = \ln(x^3 - 7), \quad x = 2,06$.
9. $y = \arcsin(x^2 - 1), \quad x = 0,96$. 10. $y = \operatorname{arctg}(x^5 + 5x), \quad x = 0,04$.
11. $y = e^{x^2 - 5x}, \quad x = 4,97$. 12. $y = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right), \quad x = 0,02$.
13. $y = e^{\sin 2x}, \quad x = -0,06$. 14. $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right), \quad x = 0,05$.
15. $y = \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), \quad x = -0,04$. 16. $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right), \quad x = 0,03$.
17. $y = \sqrt{x^3 + 3x^2 + 10}, \quad x = 2,98$. 18. $y = \arcsin(x^4 - x^3), \quad x = 1,06$.

19. $y = \sqrt[3]{3x^3 + 5x}$, $x = 0,95$. 20. $y = \arccos(x^3 - x^2)$, $x = 1,04$.
21. $y = \sqrt[4]{3x^2 + x + 1}$, $x = 4,97$. 22. $y = \arctg(4x^3 - 3x)$, $x = 1,02$.
23. $y = e^{x^4 - 5x}$, $x = -0,06$. 24. $y = \text{arcctg}(x^4 - 15)$, $x = 2,05$.
25. $y = \arctg(x^2 - 3x)$, $x = 2,94$. 26. $y = \ln(x^2 - 15)$, $x = 4,05$.
27. $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$, $x = -0,04$. 28. $y = \text{arcctg}(x^5 - x^4)$, $x = 1,03$.
29. $y = e^{\sin 5x}$, $x = -0,02$. 30. $y = \text{tg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$, $x = 0,06$.

Деякі застосування похідної

Завдання 17. Записати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = f(x)$

в точці з абсцисою x_0 .

1. $y = x^3 - 2x$, $x_0 = 1$. 2. $y = \sqrt{x^3 + 2x + 4}$, $x_0 = 0$.
3. $y = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$. 4. $y = \cos^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.
5. $y = e^{x^2 + 3x}$, $x_0 = 0$. 6. $y = \lg(3x^2 + 2x + 10)$, $x_0 = 0$.
7. $y = (2x - 3)^5$, $x_0 = 2$. 8. $y = \sqrt[3]{x^2 + 3x + 4}$, $x_0 = 1$.
9. $y = \text{tg}^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$. 10. $y = \text{ctg}^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
11. $y = 2^{x^2 + x}$, $x_0 = 1$. 12. $y = \log_4(x^2 + 3x + 4)$, $x_0 = 0$.
13. $y = (3x - 7)^4$, $x_0 = 3$. 14. $y = \sqrt[4]{2x^2 - x + 1}$, $x_0 = 3$.
15. $y = \text{arctg}^2 x$, $x_0 = 1$. 16. $y = \text{arcctg}^2 x$, $x_0 = 1$.

17. $y = \arcsin^2 x, \quad x_0 = \frac{1}{2}.$

18. $y = \arccos^2 x, \quad x_0 = \frac{1}{2}.$

19. $y = (5x - 4)^4, \quad x_0 = 1.$

20. $y = \sqrt{3x^3 + 1}, \quad x_0 = 2.$

21. $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right), \quad x_0 = 0.$

22. $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), \quad x_0 = 0.$

23. $y = e^{x^3 - 2x + 1}, \quad x_0 = 1.$

24. $y = \log_2(x^2 - 2x - 1), \quad x_0 = 3.$

25. $y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right), \quad x_0 = 0.$

26. $y = \operatorname{ctg}\left(4x + \frac{\pi}{4}\right), \quad x_0 = 0.$

27. $y = \sqrt[3]{3x^2 + x + 13}, \quad x_0 = 2.$

28. $y = \sqrt[4]{x^3 + x^2 + 1}, \quad x_0 = 4.$

29. $y = (2 - 3x)^5, \quad x_0 = 1.$

30. $y = e^{2x^3 + 3x - 5}, \quad x_0 = 1.$

Завдання 18. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя.

1. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x^2 + 5x}};$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 5x - 1}{\sin^2 3x}.$

2. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x + \pi/2)}{\sqrt{x^2 + 4x}};$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(x^2 + 3x).$

3. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(7x + 1)}{x^2 + 3x + 5};$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{\operatorname{tg} 2x - 2x}.$

4. а) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x - 1}{\cos^3 x};$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + x) \operatorname{ctg} x.$

5. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\sqrt{2x^2 + 7x}};$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x^2}).$

6. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(4x + \pi/2)}{\sqrt{x^3 + 8x}};$

б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x} - \cos x - 1}{\cos^2 x}.$

$$7. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^3 x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{\arctg x^2}.$$

$$8. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x - \sin 2x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 1)e^{-3x}.$$

$$9. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(3x - 5)}{x - 2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{\cos x - 1} \right).$$

$$10. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lg(4x - 3)}{x - 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x + x - \pi}{(x - \pi)^2}.$$

$$11. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x+1}}{2x + 5};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{\sin \pi x + \pi x - \pi}.$$

$$12. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{4x+3}}{9x + 7};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{3}{\ln(x+1)} \right).$$

$$13. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x^2 + 5x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg^2 x}{x^2 + \sin x - x}.$$

$$14. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x^3 - 3x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 3x + 1) - 3x}{\sin^2 x}.$$

$$15. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x - 1}{x - \frac{\pi}{2}};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2 - 5x + 3}.$$

$$16. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - 1}{x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{4x} + 3x}{2x + e^{5x}}.$$

$$17. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 4x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{3x} - 3x \ln 4 - 1}{\sin^2 5x}.$$

$$18. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - e^{-x}};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{e^{4x} - 4x - 1}.$$

$$19. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 4x}{\sin x + 5x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - \text{tg} 5x}{\sin 4x - 4x}.$$

$$20. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{\ln(3x+1)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} x \lg(5x^2 + x).$$

$$21. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2^{3x}}{\arcsin 4x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \ln\left(1 - \frac{\pi}{2} + x\right) \operatorname{tg} x$$

$$22. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{5^x - 5};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(3 \operatorname{tg} x - \frac{1}{x - \pi/2} \right).$$

$$23. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln(3x^2 - 2)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sin x - 1}{\sin^2 x}.$$

$$24. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{\lg(x^2 - 3)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - xe^x}{x \operatorname{arctg} x}.$$

$$25. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x + 3}{e^{5x} + 4x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{\cos x} - \cos x - 1}{\cos^2 x}.$$

$$26. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 7x}{5x + 3^x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin x} - \frac{5}{x^2} \right).$$

$$27. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2^{3x}}{\sin 4x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 5x}{\sin 6x - 6x}.$$

$$28. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2^x - 8};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \pi x + x}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

$$29. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_2 x - 1}{x^2 - 8x + 12};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4}{\ln(x+1)} - \frac{3}{x^3} \right).$$

$$30. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 4x}{\arcsin x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sin x + x^3 - x}.$$

Завдання 19. Для вказаних функцій знайти інтервали монотонності і точки екстремумів:

$$1. y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x.$$

$$2. y = x^3 - 5x^2 - 8x.$$

3. $y = -x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x.$

5. $y = 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 10x.$

7. $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 15x.$

9. $y = \frac{1}{3}x^3 - 16x + 5.$

11. $y = -x^3 - x^2 + 8x.$

13. $y = -\frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 6x.$

15. $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x.$

17. $y = -\frac{5}{3}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 12x.$

19. $y = 3x^3 + \frac{13}{2}x^2 - 10x.$

21. $y = -\frac{5}{2}x^3 - x^2 + 3x.$

23. $y = -\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x.$

25. $y = \frac{4}{3}x^3 - \frac{13}{2}x^2 - 12x.$

27. $y = 8x^3 + x^2 - 2x.$

29. $y = -x^3 - 5x^2 + 8x.$

4. $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x.$

6. $y = -3x^3 + \frac{13}{2}x^2 - 4x.$

8. $y = x^3 - \frac{11}{2}x^2 - 4x.$

10. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2.$

12. $y = \frac{4}{3}x^3 - \frac{13}{2}x^2 + 3x.$

14. $y = -2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x.$

16. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x.$

18. $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x.$

20. $y = -2x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 2x.$

22. $y = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 10x.$

24. $y = -\frac{5}{3}x^3 - 6x^2 + 9x.$

26. $y = 5x^3 - 2x^2 + 3x.$

28. $y = \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x.$

30. $y = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5x.$

Невизначений інтеграл

Завдання 20. Знайти інтеграли, користуючись таблицею інтегралів і найпростішими правилами інтегрування.

1. а) $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + 5^x \right) dx;$ б) $\int \left(x^5 - \frac{3}{x^4} - 4x\sqrt{x} \right) dx;$

- в) $\int (\sin(3x+1) + 2e^{5x}) dx$; г) $\int \left(\frac{2}{4+9x^2} - (1-3x)^5 \right) dx$;
- д) $\int 3x^2 e^{x^3} dx$; е) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$.
2. а) $\int \left(\frac{4}{x^2-16} + \frac{3}{\sin^2 x} - 3^x \right) dx$; б) $\int \left(x^3 - x^2 \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x^7} \right) dx$;
- в) $\int (\cos(1-2x) + (5x+1)^9) dx$; г) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} + 3e^{2x+1} \right) dx$;
- д) $\int 4x^3 \sin x^4 dx$; е) $\int \left(x^2 e^{x^3+1} + \frac{\ln^2 x}{x} \right) dx$.
3. а) $\int \left(\frac{2}{x^2+3} - \frac{5}{\sin^2 x} + \sin x \right) dx$; б) $\int \left((2+\sqrt{x})^3 + \frac{1}{x^4} \right) dx$;
- в) $\int (\cos(1-3x) + 2^{5x}) dx$; г) $\int \left(\frac{2}{9+4x^2} - \frac{5}{\cos^2 3x} \right) dx$;
- д) $\int 5x^4 \sin x^5 dx$; е) $\int \left(x(5x^2+2)^8 - \frac{\operatorname{tg}^5 x}{\cos^2 x} \right) dx$.
4. а) $\int \left(\frac{5}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{2}{\sin^2 x} + 7^x \right) dx$; б) $\int \left(3x^2 - x^4 \sqrt{x} - \frac{2}{x^3} \right) dx$;
- в) $\int \left(e^{4x+1} + \frac{3}{\cos^2 3x} \right) dx$; г) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{2-9x^2}} + \sin(1-5x) \right) dx$;
- д) $\int 7x^6 (3+x^7)^5 dx$; е) $\int \left(x^2 \cos x^3 + \frac{3}{x \ln^5 x} \right) dx$.
5. а) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-4}} + \frac{3}{\cos^2 x} + e^x \right) dx$; б) $\int \left((2+\sqrt[3]{x})^2 + \frac{2}{x^5} \right) dx$;

- в) $\int \left((3+5x)^9 - 4^{1-2x} \right) dx$;
 г) $\int \left(\frac{2}{1+9x^2} - \frac{3}{2-4x} \right) dx$;
- д) $\int 6x^5 \sin(x^6 + 5) dx$;
 е) $\int \left(\frac{x}{\sqrt{9-4x^2}} + \frac{\operatorname{ctg}^6 x}{\sin^2 x} \right) dx$.
6. а) $\int \left(\frac{2}{x} - 3\sin x + 2 \cdot 5^x \right) dx$;
 б) $\int \left(x^3 - \sqrt{x^3} + \frac{4}{x^9} \right) dx$;
- в) $\int \left(e^{3x-1} + \frac{3}{\sin^2(1-2x)} \right) dx$;
 г) $\int \left(\frac{3}{5+16x^2} - \cos(5x+3) \right) dx$;
- д) $\int 3x^2 e^{x^3} dx$;
 е) $\int \left(\frac{x}{5x^2-4} + \frac{e^x}{1+e^{2x}} \right) dx$.
7. а) $\int \left(2\cos x - \frac{2}{\sin^2 x} + 4e^x \right) dx$;
 б) $\int \left((3-\sqrt{x})^3 + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$;
- в) $\int \left(\frac{4}{3x+2} - \sin(1-4x) \right) dx$;
 г) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{9x^2+5}} - 4^{1-3x} \right) dx$;
- д) $\int \left(5x^4 (3+x^5)^7 \right) dx$;
 е) $\int \left(\frac{3}{x \ln^5 x} + \frac{x^2}{\cos^2 x^3} \right) dx$.
8. а) $\int \left(\frac{1}{4+x^2} - 3e^x + \frac{4}{x} \right) dx$;
 б) $\int \left((2x^2+1)^3 - \frac{4}{x^5} \right) dx$;
- в) $\int \left(\sin(3x+1) - 3(1-4x)^8 \right) dx$;
 г) $\int \left(\frac{5}{4x^2-9} - 3^{2-5x} \right) dx$;
- д) $\int 7x^6 \cos x^7 dx$;
 е) $\int \left(\frac{x^4}{\sin^2(1+2x^5)} - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} \right) dx$.
9. а) $\int \left(3\sin x + 4^x - \frac{2}{x^2+1} \right) dx$;
 б) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \right)^2 dx$;

$$\begin{array}{ll}
\text{в)} \int \left(\frac{2}{\cos^2(4x+1)} - \frac{3}{1-5x} \right) dx; & \text{г)} \int \left(\frac{3}{\sqrt{1-25x^2}} + (3+4x)^4 \right) dx; \\
\text{д)} \int \frac{5x^4}{3+x^2} dx; & \text{е)} \int \left(x^3 \cos(1-2x^4) + \frac{\operatorname{ctg}^4 x}{\sin^2 x} \right) dx. \\
10. \text{ а)} \int \left(5 \cdot 3^x - 2 \cos x + \frac{4}{\sqrt{9-x^2}} \right) dx; & \text{б)} \int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} \right)^3 dx; \\
\text{в)} \int \left(e^{2x+3} - \frac{3}{\sin^2(1-2x)} \right) dx; & \text{г)} \int \left(3 \sin x + 4^x - \frac{2}{x^2+1} \right) dx; \\
\text{д)} \int 9x^8(1+x^9)^5 dx; & \text{е)} \int \left(\frac{2^x}{3+2^x} + \frac{x^3}{\cos^2(x^4+1)} \right) dx. \\
11. \text{ а)} \int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sin^2 x} - 4^x \right) dx; & \text{б)} \int \left(\frac{5}{x^3} - x^6 + 2x^2 \cdot \sqrt{x} \right) dx; \\
\text{в)} \int (\cos(4x-3) + 3e^{3x}) dx; & \text{г)} \int \left(\frac{5}{4x^2+9} + (5x-3)^4 \right) dx; \\
\text{д)} \int 4x^3 e^x dx; & \text{е)} \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx. \\
12. \text{ а)} \int \left(5^x - \frac{2}{x^4-4} + \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx; & \text{б)} \int \left(x \cdot \sqrt{x} + 2x^4 + \frac{3}{x^6} \right) dx; \\
\text{в)} \int \left((2-7x)^5 + 3 \sin(3+4x) \right) dx; & \text{г)} \int \left(e^{2+5x} - \frac{2}{\sqrt{1-9x^2}} \right) dx; \\
\text{д)} \int 5x^4 \cos x^5 dx; & \text{е)} \int \left(x^3 e^{x^4} - \frac{2}{x \ln^4 x} \right) dx. \\
13. \text{ а)} \int \left(\frac{3}{\cos^2 x} + \frac{4}{5+x^2} - 5 \sin x \right) dx; & \text{б)} \int \left(\left(3 - \sqrt[3]{x} \right)^2 - \frac{3}{x^2} \right) dx;
\end{array}$$

$$\text{в) } \int (5^{2x} - 3\sin(2-5x)) dx;$$

$$\text{г) } \int \left(\frac{3}{\sin^2 4x} + \frac{7}{4+9x^2} \right) dx;$$

$$\text{д) } \int 6x^5 \cos x^6 dx;$$

$$\text{е) } \int \left(\frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} + x^2 (3x^3 + 5)^9 \right) dx.$$

$$14. \text{ а) } \int \left(5^x + \frac{3}{\cos^2 x} - \frac{6}{\sqrt{5+x^2}} \right) dx;$$

$$\text{б) } \int \left(x\sqrt[5]{x} + 5x^3 - \frac{3}{x^7} \right) dx;$$

$$\text{в) } \int \left(\frac{4}{\sin^2 2x} - 5e^{2-3x} \right) dx;$$

$$\text{г) } \int \left(\frac{5}{\sqrt{3-4x^2}} + 3\cos 6x \right) dx;$$

$$\text{д) } \int 8x^7 (5+x^8)^5 dx;$$

$$\text{е) } \int \left(\frac{2}{x \ln^3 x} + 3x^3 \sin x^4 \right) dx.$$

$$15. \text{ а) } \int \left(3e^x + \frac{4}{\sin^2 x} - \frac{5}{\sqrt{x^2-9}} \right) dx;$$

$$\text{б) } \int \left(\frac{1}{x^6} - (1+\sqrt{x})^3 \right) dx;$$

$$\text{в) } \int (5^{2-3x} + (2-x)^7) dx;$$

$$\text{г) } \int \left(\frac{5}{3-5x} + \frac{4}{1+16x^2} \right) dx;$$

$$\text{д) } \int 7x^6 \cos(3+x^7) dx;$$

$$\text{е) } \int \left(\frac{2 \operatorname{ctg}^5 x}{\sin^2 x} - \frac{3x}{\sqrt{4-9x^2}} \right) dx.$$

$$16. \text{ а) } \int \left(5\cos x + \frac{3}{x} - 5 \cdot 2^x \right) dx;$$

$$\text{б) } \int \left(\sqrt[4]{x^3} + 3x^4 - \frac{2}{x^7} \right) dx;$$

$$\text{в) } \int \left(\frac{2}{\cos^2(3-4x)} + e^{2+5x} \right) dx;$$

$$\text{г) } \int \left(2\sin(3-8x) + \frac{5}{3+9x^2} \right) dx;$$

$$\text{д) } \int 5x^3 e^{x^4} dx;$$

$$\text{е) } \int \left(\frac{x^4}{3x^5+1} + \frac{e^x}{e^{2x}-4} \right) dx.$$

$$17. \text{ а) } \int \left(5e^x - 3\sin x + \frac{6}{\cos^2 x} \right) dx;$$

$$\text{б) } \int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + (2-\sqrt[6]{x})^2 \right) dx;$$

$$\begin{array}{ll}
\text{в)} \int \left(2 \cos(3-5x) + \frac{5}{3+4x} \right) dx ; & \text{г)} \int \left(5^{6x-5} + \frac{3}{\sqrt{4x^2+3}} \right) dx ; \\
\text{д)} \int 6x^5(2+x^6)^9 dx ; & \text{е)} \int \left(\frac{x^3}{\sin^2 x^4} - \frac{5}{x \ln^3 x} \right) dx . \\
18. \text{ а)} \int \left(\frac{3}{x} + 2e^x - \frac{5}{9+x^2} \right) dx ; & \text{б)} \int \left(\frac{5}{x^6} - (3x^3-2)^2 \right) dx ; \\
\text{в)} \int \left((2+3x)^9 + \cos(1-5x) \right) dx ; & \text{г)} \int \left(5^{5-2x} + \frac{3}{9x^2-25} \right) dx ; \\
\text{д)} \int 8x^7(5+x^8)^5 dx ; & \text{е)} \int \left(\frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{x^5}{\cos^2(3-2x^6)} \right) dx . \\
19. \text{ а)} \int \left(5^x - 4 \cos x + \frac{6}{x^2+4} \right) dx ; & \text{б)} \int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^3} \right)^2 dx ; \\
\text{в)} \int \left(\frac{5}{2-3x} + \frac{4}{\sin^2(2+5x)} \right) dx ; & \text{г)} \int \left((4-9x)^4 + \frac{2}{\sqrt{1-9x^2}} \right) dx ; \\
\text{д)} \int \frac{6x^5}{4+x^6} dx ; & \text{е)} \int \left(\frac{5 \operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x} - 2x^4 \sin x^5 \right) dx . \\
20. \text{ а)} \int \left(3 \sin x + \frac{5}{\sqrt{4-x^2}} + 3 \cdot 6^x \right) dx ; & \text{б)} \int \left(\frac{1}{x^2} - \sqrt[3]{x} \right)^3 dx ; \\
\text{в)} \int \left(\frac{2}{\cos^2(3+4x)} + e^{2-5x} \right) dx ; & \text{г)} \int \left(\frac{3}{\sqrt{2+9x}} - \frac{5}{\sqrt{16x^2+11}} \right) dx ; \\
\text{д)} \int 10x^9(3+x^{10})^4 dx ; & \text{е)} \int \left(\frac{x^4}{\sin^2(x^5+3)} - \frac{5 \cdot 3^x}{3^{2x}+1} \right) dx . \\
21. \text{ а)} \int \left(2^x + \frac{3}{9+x^2} - \frac{2}{\cos^2 x} \right) dx ; & \text{б)} \int \left(\frac{5}{x^6} - x^4 \sqrt{x} + 2x^3 \right) dx ;
\end{array}$$

в) $\int \left(\frac{3}{2+5x} - 2\sin(1-6x) \right) dx;$	г) $\int \left((2-7x)^7 + \frac{3}{9-16x^2} \right) dx;$
д) $\int 5x^4 3^x dx;$	е) $\int \left(x^3(1+x^4)^5 - \cos^5 x \sin x \right) dx.$
22. а) $\int \left(\frac{5}{x^2+36} - 4^x + \frac{5}{\sin^2 x} \right) dx;$	б) $\int \left(\frac{3}{x^2} - x^3\sqrt{x} + 2x^4 \right) dx;$
в) $\int \left((3-5x)^8 + 2\cos 3x \right) dx;$	г) $\int \left(x^4 \cdot 5^{x^5} + \frac{6x^3}{2+x^4} \right) dx;$
д) $\int 7x^6 \sin x^7 dx;$	е) $\int \left(x^7 e^{x^8+2} - \frac{2}{x \ln^7 x} \right) dx.$
23. а) $\int \left(3\sin x + \frac{5}{x^2+4} - \frac{3}{\sin^2 x} \right) dx;$	б) $\int \left(\frac{3}{x^9} - (4-\sqrt[3]{x})^2 \right) dx;$
в) $\int (3^{6x} - 2\cos(2-5x)) dx;$	г) $\int \left(\frac{3}{\cos^2 4x} + \frac{5}{4x^2-25} \right) dx;$
д) $\int 8x^7 \sin x^8 dx;$	е) $\int \left(4x^5 e^{1+x^6} - \frac{3}{\operatorname{tg}^5 x \cos^2 x} \right) dx.$
24. а) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x^2-9}} + 5^x + \frac{3}{\sin^2 x} \right) dx;$	б) $\int \left(\frac{1}{x^6} - x^5\sqrt{x} + 5x^4 \right) dx;$
в) $\int \left(\frac{3}{\cos^2 5x} - 2^{3x+2} \right) dx;$	г) $\int \left(\frac{5}{\sqrt{4x^2+11}} - 3\sin 2x \right) dx;$
д) $\int 9x^8 (5-2x^9)^4 dx;$	е) $\int \left(x^6 \cos(2x^7-3) + \frac{5 \ln^5 x}{x} \right) dx.$
25. а) $\int \left(3e^x + \frac{5}{\cos^2 x} - \frac{2}{x^2-9} \right) dx;$	б) $\int \left(\frac{3}{x^4} + (3-\sqrt[5]{x})^2 \right) dx;$
в) $\int (2^{3-5x} + 5(2+3x)^5) dx;$	г) $\int \left(\frac{3}{4x^2-1} + \frac{2}{5+6x} \right) dx;$

$$\begin{array}{ll} \text{д)} \int 8x^7 \sin(3-x^8) dx; & \text{е)} \int \left(\frac{x^5}{\sqrt{5+3x^6}} - \frac{3 \operatorname{tg}^5 x}{\sin^2 x} \right) dx. \\ \\ 26. \text{ а)} \int \left(3 \cdot 4^x - 5 \sin x + \frac{3}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx; & \text{б)} \int \left(\sqrt[4]{x} + 2x^3 - \frac{5}{x^5} \right) dx; \\ \text{в)} \int \left(3^{2x+1} - \frac{5}{\sin^2(3x-2)} \right) dx; & \text{г)} \int \left(2 \cos(5+2x) - \frac{4}{3+4x^2} \right) dx; \\ \text{д)} \int 5x^4 e^{x^5} dx; & \text{е)} \int \left(\frac{4^x}{2+4^{2x}} - \frac{5x^3}{2x^4-7} \right) dx. \\ \\ 27. \text{ а)} \int \left(\frac{5}{\sin^2 x} + 3 \cdot 6^x - 4 \cos x \right) dx; & \text{б)} \int \left(\frac{3}{\sqrt[4]{x}} - \left(2 + \sqrt[3]{x} \right)^3 \right) dx; \\ \text{в)} \int \left(2 \sin(5x+1) - \frac{5}{3x+2} \right) dx; & \text{г)} \int \left(5^{2x-3} - \frac{4}{\sqrt{25x^2+3}} \right) dx; \\ \text{д)} \int 8x^7 (x^8-2)^5 dx; & \text{е)} \int \left(\frac{2x^4}{\cos^2 x^5} - \frac{5 \ln^3 x}{x} \right) dx. \\ \\ 28. \text{ а)} \int \left(\frac{3}{x} - 5 \cdot 3^x + \frac{4}{x^2+16} \right) dx; & \text{б)} \int \left(\frac{3}{x^8} - 2(x^4+2)^3 \right) dx; \\ \text{в)} \int \left(2(5-3x)^7 - 5 \sin(1-5x) \right) dx; & \text{г)} \int \left(5^{4x-7} + \frac{3}{16x^2+9} \right) dx; \\ \text{д)} \int 10x^9 \cos x^{10} dx; & \text{е)} \int \left(\frac{3}{\operatorname{tg}^5 x \cos^2 x} - \frac{2x^6}{\sin^2 x^7} \right) dx. \\ \\ 29. \text{ а)} \int \left(5^x - \frac{3}{x^2-36} - 5 \sin x \right) dx; & \text{б)} \int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^2} \right)^2 dx; \\ \text{в)} \int \left(\frac{4}{3x+5} - \frac{3}{\cos^2(7x-1)} \right) dx; & \text{г)} \int \left((1-5x)^4 + \frac{2}{\sqrt{36x^2+5}} \right) dx; \end{array}$$

$$д) \int \frac{9x^8}{2+x^9} dx;$$

$$е) \int \left(\frac{3 \operatorname{tg}^7 x}{\sin^2 x} - 2x^5 \cos x^6 \right) dx.$$

$$30. а) \int \left(5 \cos x - 4 \cdot 8^x + \frac{2}{\sqrt{x^2 - 3}} \right) dx;$$

$$б) \int \left(\frac{2}{x} - \sqrt[3]{x} \right)^2 dx;$$

$$в) \int \left(\frac{5}{\sin^2(3x+1)} - 5^{6x+1} \right) dx;$$

$$г) \int \left(\frac{4}{\sqrt{2-9x}} + \frac{3}{\sqrt{4+25x^2}} \right) dx;$$

$$д) \int 4x^3(2-3x^4)^7 dx;$$

$$е) \int \left(\frac{x^5}{\cos^2 x^6} + \frac{3^x}{3^{2x} - 49} \right) dx.$$

Завдання 21. Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами.

$$1. а) \int x e^{2x} dx;$$

$$б) \int (x^2 + 1) \cos x dx.$$

$$2. а) \int x \sin 3x dx;$$

$$б) \int x^2 e^{2x} dx.$$

$$3. а) \int (2x+1) \cos x dx;$$

$$б) \int x^2 \cdot 3^x dx.$$

$$4. а) \int x \cdot 2^x dx;$$

$$б) \int x^2 \sin 3x dx.$$

$$5. а) \int (1-3x) \cdot 4^x dx;$$

$$б) \int x^2 \cos 2x dx.$$

$$6. а) \int x^3 \ln 2x dx;$$

$$б) \int (1+x^2) e^x dx.$$

$$7. а) \int x^2 \log_3 x dx;$$

$$б) \int (2-x^2) \sin x dx.$$

$$8. а) \int x^5 \ln 3x dx;$$

$$б) \int (4+x^2) \cos x dx.$$

$$9. а) \int x \cdot 5^{2x} dx;$$

$$б) \int x^2 \sin 5x dx.$$

10. a) $\int (1 + 3x) \cos 2x dx$; б) $\int x^2 e^{1-4x} dx$.
11. a) $\int (2 - 5x) \sin x dx$; б) $\int (2 + 3x^2) e^x dx$.
12. a) $\int x e^{5x} dx$; б) $\int (1 - 2x^2) \cos 2x dx$.
13. a) $\int (2 + 3x) \sin 2x dx$; б) $\int (5 - x^2) e^{3x} dx$.
14. a) $\int (1 - 2x) \cos 4x dx$; б) $\int x^2 \cdot 4^x dx$.
15. a) $\int x \cdot 7^x dx$; б) $\int (5 + x^2) \sin 4x dx$.
16. a) $\int (2 + 5x) \cdot 3^x dx$; б) $\int x^2 \cos 5x dx$.
17. a) $\int x^2 \ln 3x dx$; б) $\int (x^2 + 5) e^{3x} dx$.
18. a) $\int x^6 \log_4 2x dx$; б) $\int (3 + x^2) \sin 2x dx$.
19. a) $\int x^6 \ln 2x dx$; б) $\int x^2 \cos 6x dx$.
20. a) $\int x \cdot 7^{2x} dx$; б) $\int x^2 \sin 7x dx$.
21. a) $\int (2 + 4x) \cos 3x dx$; б) $\int (1 - 4x^2) e^x dx$.
22. a) $\int (2 - 3x) \sin 5x dx$; б) $\int (1 + 4x^2) e^{2x} dx$.
23. a) $\int (5 + 2x) \cdot 6^x dx$; б) $\int (2 + x^2) \sin 3x dx$.
24. a) $\int (3 - 2x) \cos 4x dx$; б) $\int (1 + 2x^2) e^{4x} dx$.
25. a) $\int (2 + x) \sin 4x dx$; б) $\int x^2 \cdot 5^x dx$.

26. а) $\int x \cdot 9^x dx$;

б) $\int (1-7x^2) \cos 2x dx$.

27. а) $\int (3+4x) \cdot 5^x dx$;

б) $\int (2+3x^2) \sin 2x dx$.

28. а) $\int x^{10} \ln 2x dx$;

б) $\int (x^2+3)e^{4x} dx$.

29. а) $\int x^2 \lg x dx$;

б) $\int (4-5x^2) \cos 3x dx$.

30. а) $\int x^7 \ln 5x dx$;

б) $\int x^2 \sin 6x dx$.

Завдання 22. Знайти інтеграли від функцій, що містять квадратний тричлен.

1. а) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

б) $\int \frac{x+2}{\sqrt{4x^2-2x-4}} dx$.

2. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x+20}}$;

б) $\int \frac{4x+3}{x^2-3x+4} dx$.

3. а) $\int \frac{dx}{9x^2-6x+2}$;

б) $\int \frac{3x-4}{\sqrt{4x^2-12x+10}} dx$.

4. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+25}}$;

б) $\int \frac{2x-3}{x^2-10x+26} dx$.

5. а) $\int \frac{dx}{5x^2+10x+1}$;

б) $\int \frac{3x-2}{\sqrt{6x-x^2-5}} dx$.

6. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-12x+27}}$;

б) $\int \frac{5x-4}{2x^2-12x+20} dx$.

7. а) $\int \frac{dx}{x^2+5x+2}$;

б) $\int \frac{4x+5}{\sqrt{x^2+8x+32}} dx$.

8. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+5}}$;

б) $\int \frac{3x-2}{4x^2+24x-3} dx$.

9. a) $\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 4}$; б) $\int \frac{6x - 5}{\sqrt{x^2 - 10x + 34}} dx$.
10. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 2x - x^2}}$; б) $\int \frac{9x + 1}{3x^2 - 6x + 2} dx$.
11. a) $\int \frac{dx}{5x^2 - 10x + 3}$; б) $\int \frac{4x - 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx$.
12. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 14x + 40}}$; б) $\int \frac{5x + 2}{2x^2 - 12x + 3} dx$.
13. a) $\int \frac{dx}{3x^2 + 42x + 1}$; б) $\int \frac{5x - 4}{\sqrt{x^2 + 10x + 29}} dx$.
14. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 12x + 32}}$; б) $\int \frac{4x + 1}{4x^2 + 16x + 3} dx$.
15. a) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 5}$; б) $\int \frac{9x - 2}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx$.
16. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 24x + 1}}$; б) $\int \frac{7x - 4}{x^2 - 5x + 2} dx$.
17. a) $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$; б) $\int \frac{x + 1}{\sqrt{4x^2 + 2x + 4}} dx$.
18. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 8x + 16}}$; б) $\int \frac{3x + 4}{x^2 + 3x - 4} dx$.
19. a) $\int \frac{dx}{9x^2 + 6x + 1}$; б) $\int \frac{4x - 3}{\sqrt{4x^2 + 12x + 8}} dx$.
20. a) $\int \frac{dx}{5x^2 - 10x - 1}$; б) $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{-6x - x^2 - 5}} dx$.
21. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4x + 2}}$; б) $\int \frac{4x - 5}{2x^2 + 12x + 10} dx$.

22. a) $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 1}$;	б) $\int \frac{5x + 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 32}} dx$.
23. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16x + 17}}$;	б) $\int \frac{2x - 3}{4x^2 - 24x - 2} dx$.
24. a) $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 3}$;	б) $\int \frac{5x - 6}{\sqrt{x^2 + 10x + 34}} dx$.
25. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 20}}$;	б) $\int \frac{9x - 2}{3x^2 - 18x - 1} dx$.
26. a) $\int \frac{dx}{5x^2 + 10x + 2}$;	б) $\int \frac{4x - 3}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} dx$.
27. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 2x - x^2}}$;	б) $\int \frac{2x + 5}{2x^2 + 12x + 1} dx$.
28. a) $\int \frac{dx}{3x^2 - 42x - 1}$;	б) $\int \frac{4x - 5}{\sqrt{x^2 - 10x + 29}} dx$.
29. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16x + 65}}$;	б) $\int \frac{x + 4}{4x^2 - 16x + 1} dx$.
30. a) $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$;	б) $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - 18x + 80}} dx$.

Визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла

Завдання 23. Обчислити визначені інтеграли.

1. a) $\int_0^1 x^6 (1 + x^7)^5 dx$;	б) $\int_0^1 x \cdot 2^x dx$.
2. a) $\int_0^1 \left(\frac{2}{1 + 9x^2} + \frac{3}{2 - 4x} \right) dx$;	б) $\int_0^{\pi/4} x^2 \cos 2x dx$.

$$3. \text{ a) } \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx;$$

$$\text{б) } \int_1^2 x^3 \ln 2x dx .$$

$$4. \text{ a) } \int_0^1 x^4 (x^5 - 1) dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/4} (2 - x^2) \sin x dx .$$

$$5. \text{ a) } \int_0^1 5^{2x+1} dx;$$

$$\text{б) } \int_1^2 x^5 \ln 3x dx .$$

$$6. \text{ a) } \int_0^1 \frac{x^4}{3+x^5} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 x \cdot 5^{2x} dx .$$

$$7. \text{ a) } \int_0^1 x^8 (1+x^9)^5 dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 x^2 e^{2x} dx .$$

$$8. \text{ a) } \int_0^1 x^3 e^x dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/3} (2-5x) \sin x dx .$$

$$9. \text{ a) } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 x e^{5x} dx .$$

$$10. \text{ a) } \int_0^1 \frac{dx}{1+2x};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/4} (2+3x) \sin 2x dx .$$

$$11. \text{ a) } \int_0^1 x^7 (1+x^8)^5 dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 x^2 \cdot 4^x dx .$$

$$12. \text{ a) } \int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^2};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/4} x \sin 4x dx .$$

$$13. \text{ a) } \int_0^1 x^3 e^{x^4} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/5} x \cos 5x dx .$$

$$14. \text{ a) } \int_0^1 x^5 (x^6 - 1)^9 dx ;$$

$$\text{б) } \int_0^2 x^2 \ln 3x dx .$$

$$15. \text{ a) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx ;$$

$$\text{б) } \int_1^2 x^3 \log_4 2x dx .$$

$$16. \text{ a) } \int_0^1 \frac{x^5}{4 + x^6} dx ;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/6} x \cos 6x dx .$$

$$17. \text{ a) } \int_0^1 x^9 (2 + x^{10})^4 dx ;$$

$$\text{б) } \int_0^1 x \cdot 7^{2x} dx .$$

$$18. \text{ a) } \int_0^1 x^4 \cdot 3^{x^5} dx ;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/3} (1 + 3x) \cos 3x dx .$$

$$19. \text{ a) } \int_0^1 \sqrt{4 + 5x} dx ;$$

$$\text{б) } \int_0^1 x^2 e^{3x} dx .$$

$$20. \text{ a) } \int_0^1 \sqrt[3]{1 + 7x} dx ;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/3} (2 + x) \sin 3x dx .$$

$$21. \text{ a) } \int_0^1 x^8 (x^9 - 1)^7 dx ;$$

$$\text{б) } \int_0^1 (1 + 2x) e^{4x} dx .$$

$$22. \text{ a) } \int_0^1 \sqrt[4]{1 - x} dx ;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/3} (2 + x) \sin 3x dx .$$

$$23. \text{ a) } \int_0^1 x^4 \cdot e^{x^5} dx ;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/3} (1 - 7x) \cos 2x dx .$$

$$24. \text{ a) } \int_0^1 x^7 (x^8 - 1)^5 dx ;$$

$$\text{б) } \int_0^1 (3 + 4x) \cdot 5^x dx .$$

$$25. \text{ a) } \int_0^{\frac{\pi}{5}} \sin 5x dx ;$$

$$\text{б) } \int_1^2 x^9 \ln 2x dx .$$

$$26. \text{ a) } \int_0^1 \frac{x^8}{2+x^9} dx ;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/3} (4-5x) \cos 3x dx .$$

$$27. \text{ a) } \int_0^1 x^3 (2-3x^4)^5 dx ;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/6} x \sin 6x dx .$$

$$28. \text{ a) } \int_0^1 x^2 \cdot 2^{x^3} dx ;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} (2x+1) \cos x dx .$$

$$29. \text{ a) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+3x}} ;$$

$$\text{б) } \int_0^1 (1+3x) e^{2x} dx .$$

$$30. \text{ a) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+7x}} ;$$

$$\text{б) } \int_1^2 x^2 \ln 3x dx .$$

Завдання 24. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями:

$$1. \text{ a) } y = \sqrt{x}, y = 2-x, y = 0 ;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases} .$$

$$2. \text{ a) } y = \sqrt{x}, y = \sqrt{-x}, y = 1 ;$$

$$\text{б) } \rho = 2 \cos \varphi, \rho = \cos \varphi .$$

$$3. \text{ a) } y = e^x, y = 1-x, x = 1 ;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), y = 0, 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$4. \text{ a) } y = \ln x, y = 1-x, y = 1 ;$$

$$\text{б) } \rho = 3 \sin 3\varphi .$$

$$5. \text{ a) } y = -\sqrt{x}, y = -\frac{1}{2}x ;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} .$$

$$6. \text{ a) } y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{2}x ;$$

$$\text{б) } \rho = 2(1 + \cos \varphi) .$$

7. a) $y = \frac{1}{x}, y = x, y = 2$; б) $\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$.
8. a) $y = \frac{1}{x}, y = x, x = 2$; б) $\rho = 6 \cos \varphi$.
9. a) $y = e^x, y = 1 - x, y = e$; б) $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases}$.
10. a) $y = x^3, y = 2 - x, y = 0$; б) $\rho = 3(1 - \cos \varphi)$.
11. a) $y = x^2, y = x + 2$; б) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, y = 0, 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$
12. a) $y = x^2, y = x + 6$; б) $\rho = 2 \sin \varphi, \rho = \sin \varphi$.
13. a) $y = x^3, y = -x, y = 1$; б) $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.
14. a) $y = x^2, y = x, x = 2$; б) $\rho = 4 \cos 3\varphi$.
15. a) $y = -x^2, y = x - 2$; б) $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$.
16. a) $y = -x^3, y = -x^2$; б) $\rho = 4(1 + \cos \varphi)$.
17. a) $y = \sqrt{x}, y = 2 - x, y = 0$; б) $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$.
18. a) $y = 2^x, y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = 2$; б) $\rho = 6 \sin 4\varphi$.
19. a) $y = x^3, y = -x, x = -1$; б) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), y = 0, 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$
20. a) $y = 3^x, y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, y = 3$; б) $\rho = 6(1 - \cos \varphi)$.

21. а) $y = x^3, y = -x, y = -1$; б) $\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$.
22. а) $y = \frac{1}{x^2}, y = x, y = 4$; б) $\rho = 4 \cos \varphi, \rho = 2 \cos \varphi$.
23. а) и $y = -x^3, y = x, x = 1$; б) $\begin{cases} x = 9 \cos t \\ y = 9 \sin t \end{cases}$.
24. а) $y = \frac{1}{x^2}, y = -x, y = 4$; б) $\rho = 4 \sin 2\varphi$.
25. а) $y = -x^3, y = x, x = -1$; б) $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 8 \sin^3 t \end{cases}$.
26. а) $y = e^x, y = \left(\frac{1}{e}\right)^x, y = e$; б) $\rho = 8 \cos 2\varphi$.
27. а) $y = \frac{1}{x^3}, y = x, y = 8$; б) $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), y = 0, 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$
28. а) $y = -x^3, y = x, y = 1$; б) $\rho = 4(1 + \cos \varphi)$.
29. а) $y = \frac{1}{x^3}, y = x, y = -8$; б) $\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.
30. а) $y = -x^3, y = x, y = -1$; б) $\rho = 4 \sin \varphi, \rho = 2 \sin \varphi$.

Завдання 25. Обчислити невласні інтеграли (або показати, що вони розбігаються).

1. а) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}}$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 2x - 8}$.
2. а) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$.

$$3. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 8};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}.$$

$$4. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 5x + 4};$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^3 - 1}.$$

$$5. \text{ a) } \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^2 \frac{x dx}{(x^2 - 4)^2}.$$

$$6. \text{ a) } \int_{-\infty}^0 x^2 e^{x^3} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 8}}.$$

$$7. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 - \sin x}.$$

$$8. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\ln x} dx}{x};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 - \cos x}.$$

$$9. \text{ a) } \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^4 - 16}.$$

$$10. \text{ a) } \int_1^{\infty} x^{-3} \sin x^{-2} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 3}{x^5} dx.$$

$$11. \text{ a) } \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln^5 x}};$$

$$\text{б) } \int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}.$$

$$12. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{(3x^2 + 6x) dx}{x^3 + 3x^2 + 2};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \text{tg } x dx.$$

$$13. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 34};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \text{ctg } x dx.$$

$$14. \text{ a) } \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 - 8x + 12};$$

$$\text{б) } \int_0^3 \frac{(x^2 - 1)dx}{x^3 - 3x - 18}.$$

$$15. \text{ a) } \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^4 \frac{x^2 dx}{(x^3 - 64)^2}.$$

$$16. \text{ a) } \int_{-\infty}^0 x^6 e^{x^7} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 8x + 12}}.$$

$$17. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 14}};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 - \sin 2x}.$$

$$18. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[5]{\ln x}}{x} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 - \cos 2x}.$$

$$19. \text{ a) } \int_0^{\infty} x e^{-4x} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^2 \frac{(x^3 - 1)dx}{x^4 - 4x - 8}.$$

$$20. \text{ a) } \int_1^{\infty} x^{-4} \cos x^{-3} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x^3 + 4x + 1}{x^4} dx.$$

$$21. \text{ a) } \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^4 \sqrt{\ln^3 x}};$$

$$\text{б) } \int_0^4 \frac{dx}{x^2 + 2x - 24}.$$

$$22. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{(5x^4 + 1)dx}{x^5 + x};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x (1 - \operatorname{tg} x)}.$$

$$23. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 10x + 50};$$

$$\text{б) } \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x (1 - \operatorname{ctg} x)}.$$

$$24. \text{ a) } \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 - 6x + 5};$$

$$\text{б) } \int_{-2}^0 \frac{x^2 dx}{x^3 + 8}.$$

$$25. \text{ a) } \int_0^{\infty} x^4 e^{-x^5} dx;$$

$$26. \text{ a) } \int_{-\infty}^0 x^4 e^{x^5} dx;$$

$$27. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 8x + 80}};$$

$$28. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{\sqrt[4]{\ln^3 x}}{x} dx;$$

$$29. \text{ a) } \int_0^{\infty} x e^{-6x} dx;$$

$$30. \text{ a) } \int_1^{\infty} x^{-5} \sin x^{-4} dx;$$

$$\text{б) } \int_{-3}^0 \frac{xdx}{x^2 - 9}.$$

$$\text{б) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 5}}.$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{1 - \sin 3x}.$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{1 - \cos 3x}.$$

$$\text{б) } \int_0^3 \frac{(x^3 - 2x)dx}{x^4 - 4x^2 - 45}.$$

$$\text{б) } \int_{-2}^0 \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^5} dx.$$

Диференціальне числення функції декількох змінних

Завдання 26. Для даних функцій вказати область визначення та побудувати її на координатній площині.

$$1) z = x^2 - y + \frac{\ln x}{\sqrt{x+y-1}}.$$

$$2) z = 5^x - \ln(x^2 + y^2 - 16).$$

$$3) z = \sqrt{2x-3y} + \lg\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1\right).$$

$$4) z = e^x - \log_x\left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} - 1\right).$$

$$5) z = \sqrt{x} + y^3 + e^{\sqrt{2x+y+6}}.$$

$$6) z = \cos y - \lg(y - x^2 + 5x - 6).$$

$$7) z = xy - \sqrt{x-5y} + \frac{6}{\sqrt{4x+y-8}}.$$

$$8) z = 5 - x^2 + 3y^2 + \log_{x-3y+6} x.$$

$$9) z = 3x + \arcsin(2x + 5y - 9).$$

$$10) z = e^{xy} - \arccos(x^2 + y^2).$$

$$11) z = \sqrt{x} + \ln(y-1) - x^2.$$

$$12) z = \frac{\ln y}{\sqrt{2y+3x-6}} + \sqrt[3]{x}.$$

$$13) z = \lg x - \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1}.$$

$$14) z = 3y + \arcsin y - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$15) z = e^x - \log_{x-5y-10} x.$$

$$16) z = \sqrt{x^2 + y^2 - 25} - \ln(x - y).$$

$$17) z = y^5 - \arccos x + \sqrt{y}.$$

$$18) z = xy - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}} + \log_x y.$$

$$19) z = \sin x - \frac{2}{\sqrt{4x^2 - 9y^2 - 36}}.$$

$$20) z = \arcsin x - \arcsin y.$$

$$21) z = y^2 + \sqrt{x-3y-9} - \ln x.$$

$$22) z = 1 - \lg(x^2 + 5y^2 + 1) - \frac{1}{\sqrt{y-1}}.$$

$$23) z = \arcsin x - \sqrt{4x+3y-12}.$$

$$24) z = e^{\sqrt{x^2+y^2}} - \log_x(y-5).$$

$$25) z = \operatorname{tg} y + \sqrt[4]{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} - 1}.$$

$$26) z = x^2 + \frac{\sqrt{x+y}}{\lg(x^2 + y^2 - 25)}.$$

$$27) z = y^3 + \log_x(3x + 5y - 15).$$

$$28) z = \sin y + \sqrt[4]{x - 3y + 6} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$29) z = e^{\sqrt{x}} + \arcsin y.$$

$$30) z = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\sqrt{4x^2 + y^2 - 4}}.$$

Завдання 27. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ та повний диференціал функції dz .

$$1) z = e^{x^3 + y^2} + xy - \sqrt{x}.$$

$$2) z = 3\cos^3(3x + 2y) - \ln x.$$

$$3) z = \arcsin^2(x^2 + y^3) + 3^y.$$

$$4) z = \frac{xy}{x^2 + y^2} - x^3 + \sqrt{y}.$$

$$5) z = xe^{xy} + \ln(3x + 4y).$$

$$6) z = \sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{ctg}(xy) + 2y.$$

$$7) z = \sqrt{y} + \operatorname{tg}(x + y) - x^3.$$

$$8) z = xe^{xy} + 3y^2 - \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

$$9) z = 5x^2 + 3y^2 - \operatorname{ctg}(x - y).$$

$$10) z = \frac{x}{x^2 + y^3} - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{y^2}.$$

$$11) z = \arctg^2 x + e^y - \sin^3(xy).$$

$$12) z = (x^2 + y^3)^5 - \lg x + 5y.$$

$$13) z = 5x - 3y^2 + \cos^2(x^3 + y).$$

$$14) z = y^4 - 3^{x+y} - \sin \frac{x}{y}.$$

$$15) z = 5x^2 - 4y^5 + \frac{1}{\operatorname{tg}(xy)}.$$

$$16) z = x^4 + \cos^2 y - \ln(x + y).$$

$$17) z = \lg(x^2 - y) + \sqrt{x} + 5y^2.$$

$$18) z = \sqrt[5]{y^4} + 3^x - (2x + 3y)^{10}.$$

$$19) z = \sqrt{x^2 + y^3} - x^4 + e^{2y}.$$

$$20) z = 2y - \cos^2 x + \frac{1}{x + 3y}.$$

$$21) z = \arccos(x^2 - y^5) + 3y^4.$$

$$22) z = (y^2 + 5x)^6 - \frac{1}{x^3}.$$

$$23) z = \frac{1}{y} + x^4 - \sqrt[3]{4x - 3y}.$$

$$24) z = 6x^7 - \sqrt{y} + \ln(x + y).$$

$$25) z = \operatorname{tg}(xy) + 3x^3 + y^2.$$

$$26) z = x^5 + \sqrt[4]{y^3} - \ln(x^2 - \sqrt{y}).$$

27) $z = \sqrt[3]{x+6y^2} + e^{x+y} - x.$

28) $z = 2x^4 - 5\sqrt[3]{y^2} + \frac{1}{\sqrt{x+y}}.$

29) $z = 5x - \frac{1}{\sqrt[3]{y}} + \sin^3(xy).$

30) $z = \ln(x^2 + y^2) + \sqrt{x}.$

Завдання 28. Обчислити наближено за допомогою диференціалу значення функції z при вказаних значеннях аргументів x та y .

1) $z = \sqrt{x^3 + y^2}; \quad x = 2,05; \quad y = 0,98.$

2) $z = \sqrt[3]{x^4 + y^3}; \quad x = 0,07; \quad y = 0,95.$

3) $z = x^{2y}; \quad x = 1,04; \quad y = 2,94.$

4) $z = \arctg(x^2 + y^4); \quad x = 0,95; \quad y = 0,08.$

5) $z = \arcsin(x^3 + y^3 - 9); \quad x = 0,96; \quad y = 2,03.$

6) $z = \sqrt[4]{x^2 + y^4 + 6}; \quad x = 2,97; \quad y = 1,05.$

7) $z = \arccos(x^3 + y^2 - 17); \quad x = 2,07; \quad y = 2,92.$

8) $z = \sqrt{x^3 + y^4 + 2}; \quad x = 1,06; \quad y = 0,91.$

9) $z = \text{arcctg}(3x + y^4 - 27); \quad x = 3,97; \quad y = 2,03.$

10) $z = (x-4)^{3y}; \quad x = 4,95; \quad y = 3,04.$

11) $z = \sqrt[3]{x^4 + y^5 - 21}; \quad x = 2,05; \quad y = 1,94.$

12) $z = \arcsin(x^5 + y - 7); \quad x = 1,06; \quad y = 5,98.$

13) $z = \sqrt[4]{4x + y^6 - 3}; \quad x = 4,94; \quad y = 2,03.$

14) $z = \arctg(3x^2 - 2y^3 + 6); \quad x = 4,06; \quad y = 2,98.$

15) $z = (4x-11)^{y^2}; \quad x = 2,93; \quad y = 2,05.$

16) $z = \text{arcctg} \frac{x^2 - 15}{y^3 + 1}; \quad x = 4,04; \quad y = 0,07.$

17) $z = \sqrt{3y^3 - 4x^5}; \quad x = 1,96; \quad y = 4,02.$

18) $z = \sqrt[3]{4y + x^4 + 32}; \quad x = 2,98; \quad y = 3,04.$

19) $z = (3x-5)^{y^3}; \quad x = 2,05; \quad y = 0,96.$

- 20) $z = \arccos(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 3)$; $x = 1,03$; $y = 3,94$.
- 21) $z = \operatorname{arctg} \frac{y^2 - 23}{x^3 - 25}$; $x = 2,97$; $y = 5,06$.
- 22) $z = \sqrt{\frac{x^3 + 2x - 8}{y^2 - 3y + 1}}$; $x = 2,02$; $y = 3,04$.
- 23) $z = (3x - 8)^{2y+3}$; $x = 3,05$; $y = 0,94$.
- 24) $z = \ln(y^3 + x^3 - 8)$; $x = 0,98$; $y = 2,03$.
- 25) $z = \sqrt[4]{x^4 + y^4 - 1}$; $x = 1,05$; $y = 2,99$.
- 26) $z = \arcsin(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} + 1)$; $x = 0,96$; $y = 8,02$.
- 27) $z = \operatorname{arctg}(18 - y^3 - x^2)$; $x = 3,03$; $y = 2,04$.
- 28) $z = (9 - 2x)^{1-3y}$; $x = 3,95$; $y = 1,03$.
- 29) $z = \ln(x^5 - y^3 + 1)$; $x = 0,98$; $y = 1,04$.
- 30) $z = \sqrt[3]{2y^3 - x^4 + 17}$; $x = 1,97$; $y = 0,06$.

Завдання 29. Довести, що $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$, якщо:

$$1) u = -\ln x + \frac{1}{2} x^2 e^y + x; \quad v = \frac{1}{2} xy^2 - xe^y; \quad w = -\frac{y^2}{2x^2} - \frac{1}{6} y^3.$$

$$2) u = x \ln x + \frac{1}{6} x^3 \sin y; \quad v = -\frac{x}{y} - y \ln x + x; \quad w = x \sin y + \ln y.$$

$$3) u = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{tg} y - \frac{1}{4} e^{2x}; \quad v = -\frac{y}{x} + x \ln \cos y + 6y; \quad w = \frac{1}{2} y^2 e^{2x} - \frac{y^2}{2x^2}.$$

$$4) u = \frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{9} \cos 3x; \quad v = \frac{1}{3} y \sin 3x + x \ln y; \quad w = -\frac{1}{12} y^4 - y \ln y.$$

$$5) u = \frac{1}{9} e^{3x} + y \cos x; \quad v = -\frac{1}{3} ye^{3x} + \frac{x}{2y^2}; \quad w = \frac{1}{6} y^3 \cos x + \frac{1}{2y} + 6y.$$

$$6) u = -\frac{1}{6} x^3 \operatorname{tg} y + \frac{y}{6x^2}; \quad v = xe^y - \frac{1}{2} x^2 \ln \cos y; \quad w = x^3 - \frac{y^3}{6x^4} - e^y.$$

$$7) u = \frac{4}{15} \sqrt{(x+y)^5} - ye^x; \quad v = \frac{1}{2} y^2 e^x + \frac{x}{3y^3}; \quad w = \frac{1}{6y^2} - \frac{4}{15} \sqrt{(x+y)^5}.$$

$$8) u = -\sin x + \frac{1}{2} x^2 \cos y; \quad v = y \cos x + \frac{1}{3} x e^{3y}; \quad w = \cos y - \frac{1}{9} e^{3y}.$$

$$9) u = \ln \sin x - x^2 y^3; \quad v = \frac{1}{2} xy^4 - \frac{1}{2} yx^4; \quad w = x^3 y^2 - \frac{y}{2 \cos x} + \frac{y^2}{2 \sin^2 x}.$$

$$10) u = \sin^2(x+y) - \frac{x^2}{2y}; \quad v = x \ln y + y \ln x; \quad w = \cos^2(x+y) - \frac{y^2}{2x} + \operatorname{tg} x.$$

$$11) u = \arcsin 3x - \frac{1}{2} yx^2; \quad v = \frac{1}{2} x^2 2^y \ln 2 - \frac{3y}{\sqrt{1-9x^2}}; \quad w = \frac{1}{6} y^3 - x2^y.$$

$$12) u = \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{arctg} x; \quad v = \frac{2y}{\sin^2 2x} - \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}}; \quad w = \frac{y^2 x}{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{y}.$$

$$13) u = \frac{1}{30} x^6 + y^2 \ln x; \quad v = -\frac{y^3}{3x} + x \cos y; \quad w = -\sin y - \frac{1}{2} x^4 y^2 + \operatorname{tg}^3 x^2.$$

$$14) u = \frac{4}{15} \sqrt{x^5} - \frac{3}{2} e^{2y} x^2; \quad v = \frac{3}{2} e^{2y} x - \frac{1}{20} x^5 y^4; \quad w = \frac{1}{20} x^4 y^5 - \frac{1}{2} y^2 \sqrt{x}.$$

$$15) u = -\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x^2 \sin y; \quad v = \frac{y}{1+x^2} + \frac{1}{12} y^4 x^3; \quad w = -\frac{1}{20} y^5 x^2 - \sin y.$$

$$16) u = 2 \arcsin x + y^2 e^x; \quad v = -\frac{2y}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{3} y^3 e^x; \quad w = y \ln^2 x - \frac{1}{6} y^4 e^x.$$

$$17) u = \frac{9}{28} \sqrt[3]{x^7} + \frac{e^{xy}}{y^2}; \quad v = -x \cos^2 y; \quad w = \frac{1}{4} \sin 2y - \frac{1}{2} y^2 \sqrt[3]{x} - \frac{e^{xy}}{x^2}.$$

$$18) u = \frac{1}{x} + \frac{\cos xy}{y^2}; \quad v = -\frac{\cos 8y}{8y} - 4xy^5; \quad w = \frac{2}{3} y^6 - \frac{y^2}{x^3} + \operatorname{tg} x - \frac{\cos xy}{x^2}.$$

$$19) u = -\frac{\ln x}{y} - \frac{1}{4} e^{2x}; \quad v = \frac{\ln y}{x} - x \operatorname{tg} y - \ln x; \quad w = \frac{1}{2} y^2 e^{2x} - \ln \cos y.$$

$$20) u = -\ln \sin x + \frac{4}{15} \sqrt{x^5 y}; \quad v = y \operatorname{ctg} x + \frac{1}{3} x e^{3y}; \quad w = -\frac{4}{15} \sqrt{xy^5} - \frac{1}{9} e^{3y}.$$

$$21) u = \frac{\ln x}{y^2} - \operatorname{arctg} x - 2^y; \quad v = 6y^5 x + \frac{y}{1+x^2}; \quad w = \cos x - \frac{\ln y}{x^2} - y^6.$$

$$22) u = \arcsin x + \frac{1}{6} x^3 y; \quad v = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + 5\sqrt{y}; \quad w = \frac{1}{y} - \frac{1}{6} xy^3 + 3.$$

$$23) u = \operatorname{tg} x + \frac{x^3}{6y^2} - x \operatorname{tg} y; \quad v = e^y \ln x - \frac{y}{\cos^2 x}; \quad w = x \ln y - \frac{e^y}{x} + 2y.$$

$$24) u = \operatorname{ctg} x - \frac{x^4}{6y^3} + y^3; \quad v = \frac{y}{\sin^2 x} - \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + x; \quad w = \frac{x^2}{y} - \arccos y.$$

$$25) u = \frac{1}{6} x^3 - y \sin x; \quad v = \frac{1}{2} y^2 \cos x - \frac{x}{1+y^2}; \quad w = y - \frac{1}{2} xy^2 - \operatorname{arctg} y.$$

$$26) u = \frac{1}{6} x^3 \sqrt{y} - \ln \cos x; \quad v = -\frac{1}{3} x^2 \sqrt{y^3} + e^{x+y}; \quad w = -e^{x+y} - \frac{y^2}{2 \cos^2 x}.$$

$$27) u = -y^2 x^2; \quad v = \frac{2}{3} x \sqrt{(2y+1)^3}; \quad w = \frac{1}{6} y^4 - \frac{2}{15} \sqrt{(2y+1)^5} + y \ln x.$$

$$28) u = \frac{y^2}{3x^2} - \frac{1}{15} \sqrt{(2x+y)^5}; \quad v = \frac{2}{15} \sqrt{(2x+y)^5} - y; \quad w = -\frac{y^4}{6x^4}.$$

$$29) u = y^2 \ln x - 4e^{\frac{x}{2}}; \quad v = 2ye^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{\cos^2 y} + 3x; \quad w = \operatorname{tg} y + \frac{y^4}{12x^2} - y \lg x.$$

$$30) u = \frac{4}{15} \sqrt{x^5} \sin y - \frac{1}{30} x^6; \quad v = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \cos y; \quad w = \frac{1}{2} y^2 x^4.$$

Завдання 30. Дослідити функції на екстремуми:

$$1) z = \frac{3}{2} x^2 - 5xy + y^2 - 8x + 7y. \quad 2) z = 2x^2 - xy + \frac{3}{2} y^2 + 3x - 9y.$$

$$\begin{array}{ll}
3) z = \frac{5}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2 - 9x + 3y. & 4) z = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + \frac{11}{2}y^2 - 2x + 3y. \\
5) z = \frac{3}{2}x^2 + 2xy - \frac{9}{2}y^2 + 3x + 2y. & 6) z = \frac{1}{2}x^2 + 4xy - \frac{5}{2}y^2 - 16x - y. \\
7) z = \frac{3}{2}x^2 + 5xy - \frac{1}{2}y^2 - x + 17y. & 8) z = \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x + 7y. \\
9) z = x^2 + 7xy - \frac{11}{2}y^2 - 17x - 24y. & 10) z = 3x^2 - 5xy + 2y^2 - 18x + 15y. \\
11) z = x^2 - 3xy + 2y^2 - 16x + 22y. & 12) z = 4x^2 + xy + y^2 + 13x + 9y. \\
13) z = \frac{5}{2}x^2 + 4xy - 3y^2 + 6x + 14y. & 14) z = 2x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + 2x + 5y. \\
15) z = 5x^2 - 2xy + 2y^2 - 18y. & 16) z = 6x^2 + xy - y^2 + 6x - 12y. \\
17) z = 2x^2 - xy - y^2 - 28x + 7y. & 18) z = \frac{1}{2}x^2 + 4xy + 3y^2 + 6x - 2y. \\
19) z = x^2 + xy + y^2 + x - 4y. & 20) z = \frac{3}{2}x^2 - 10xy - 5y^2 - 7x + 1. \\
21) z = x^2 - 3xy + 2y^2 - 3x + 6y. & 22) z = \frac{1}{2}x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x - 4y. \\
23) z = x^2 + 3xy + 5y^2 + 5x + 2y. & 24) z = 3x^2 + 2xy + 2y^2 - 16x - 2y. \\
25) z = 2x^2 + 3xy + y^2 + x. & 26) z = 4x^2 - xy + 2y^2 + 17x - 6y. \\
27) z = \frac{1}{2}x^2 + xy - y^2 + 4x - 11y. & 28) z = 5x^2 + 4xy + y^2 + 6x. \\
29) z = \frac{3}{2}x^2 + 4xy + 8y^2 - 3x - 4y. & 30) z = x^2 - 3xy + 5y^2 - 14x + 21y.
\end{array}$$

Завдання 31. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x, y)$ в області D , яка обмежена осями координат та вказаною прямою.

- 1) $z = x^2 - 3xy - 12x + 18y;$ $y = 14 - 2x.$
- 2) $z = 2x^2 + 3xy + 2x - 3y;$ $y = 2x - 6.$
- 3) $z = x^2 + 3xy - x + 3y;$ $y = x + 2.$
- 4) $z = 3x^2 + 2xy - 10x - 4y;$ $y = x - 3.$
- 5) $z = x^2 - 3xy + 2x + 6y;$ $y = 4 - x.$
- 6) $z = x^2 - xy + 3x;$ $y = 4 - 2x.$
- 7) $z = 3x^2 - 2xy - 16x + 6y;$ $y = 10 - 2x.$
- 8) $z = x^2 + 3xy + x + 6y;$ $y = 2x - 8.$
- 9) $z = 2x^2 - 2xy - 2y;$ $y = -2x - 8.$
- 10) $z = x^2 3xy - x - 3y;$ $y = -x - 2.$
- 11) $z = 3x^2 - 4xy + 4x + 8y;$ $y = -2x - 6.$
- 12) $z = 4x^2 - 2xy - 2x + 2y;$ $y = 6 - 2x.$
- 13) $z = 2x^2 - xy - 2x + y;$ $y = 4 - 2x.$
- 14) $z = x^2 + xy + x + 2y;$ $y = 2x + 8.$
- 15) $z = x^2 + 3xy + 2x - 6y;$ $y = x - 4.$
- 16) $z = 2x^2 + 5xy - 2x + 10y;$ $y = x + 5.$
- 17) $z = x^2 + 2xy + 2x - 2y;$ $y = x - 4.$
- 18) $z = 3x^2 - 3xy - 3x + 6y;$ $y = 6 - x.$
- 19) $z = 2x^2 - xy - 11x + 3y;$ $y = 5 - x.$
- 20) $z = x^2 - 3xy - x - 3y;$ $y = -2x - 4.$
- 21) $z = 2x^2 + 2xy - 6x - 4y;$ $y = 2x - 6.$

- 22) $z = x^2 + 3xy + 10x + 6y;$ $y = -x - 5.$
- 23) $z = x^2 - 2xy + 2x - 6y;$ $y = -6 - x.$
- 24) $z = 3x^2 + 4xy - 2x - 4y;$ $y = 2x - 3.$
- 25) $z = x^2 - 3xy - 5x + 12y;$ $y = 10 - 2x.$
- 26) $z = 2xy + y^2 + 2x - 2y;$ $y = x - 4.$
- 27) $z = xy + 2y^2 - 3y;$ $y = 4 - 2x.$
- 28) $z = 3xy - 4y^2 - 3x - y;$ $y = 5 - x.$
- 29) $z = 2xy + 3y^2 - 2x - 2y;$ $y = x + 5.$
- 30) $z = x^2 - 4xy - 2x + 20y - 10;$ $y = 8 - x.$

Завдання 32. З досліду між величинами x та y була встановлена залежність, яка наведена в таблиці. За допомогою методу найменших квадратів визначити лінійну функцію $y = ax + b$. На координатній площині Oxy відмітити експериментальні точки та побудувати знайдену пряму.

№ вар.	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	x_5	y_5
1	1	4	-1	3	0	-1	-2	-1	-3	-1
2	-4	-2	-2	-3	-3	-4	2	-4	1	-5
3	4	4	2	3	1	1	3	1	0	-2
4	-2	4	-1	2	0	1	1	1	2	-1
5	7	4	5	3	4	1	1	-1	2	-3
6	2	4	3	2	5	1	6	-2	8	-3

7	4	4	3	2	1	2	0	-1	-2	-2
8	6	5	5	3	4	2	5	0	3	-1
9	-6	4	-4	3	-5	1	-3	1	-1	-2
10	-4	5	-3	2	-1	2	0	0	1	0
11	8	4	9	3	7	1	6	-2	4	-3
12	5	4	6	2	8	1	7	-1	10	-3
13	-7	4	-6	3	-4	1	-2	2	-1	0
14	-7	1	-6	-2	-3	-4	-5	-5	-2	-6
15	0	0	2	-2	3	-4	5	-3	6	-5
16	-2	-2	0	-3	-1	-4	1	-4	3	-6
17	-6	2	-5	0	-3	-2	-4	-3	-2	-4
18	6	7	1	6	-2	6	-1	4	-3	4
19	2	5	0	3	-2	1	-2	-1	-4	-2
20	-3	5	-1	4	2	4	3	2	4	2
21	1	1	-2	0	-3	-2	-5	-3	-4	-4
22	-2	3	-1	1	0	-3	1	-1	2	-3
23	6	2	4	0	3	-2	5	-3	2	-4
24	-6	6	-7	4	-9	2	-8	1	-10	0
25	1	2	-1	0	-2	-2	-3	-3	-5	-4
26	-3	-3	-2	-3	-1	-1	0	1	2	3
27	1	-2	2	-1	3	1	4	3	5	5
28	-6	-3	-4	-1	-3	2	-2	3	-1	5
29	-2	-1	-1	1	0	3	2	6	3	7
30	5	-1	4	1	3	4	1	5	0	7

Диференціальні рівняння

Завдання 33. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку.

1. а) $\frac{x}{\sin y} dx - y(1+x^2)dy = 0$; б) $y' = \frac{3^x}{(3y^2+1)(y^3+y)^4}$;
- в) $y' = \frac{y^2 - xy + 4x^2}{x^2}$; г) $y' = \frac{x+y+3}{2x+2y-1}$;
- д) $y' = \frac{4x-5y-1}{x+4y-16}$; е) $y' - \frac{y}{x} = x \sin x \cos^5 x$.
2. а) $x \ln y dx - \frac{\sqrt{1+x^2}}{y} dy = 0$; б) $y' = \frac{\cos x \cos^5 y}{\sin^3 x \sin y}$;
- в) $y' = \frac{x}{y} \sec \frac{3y}{x} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{2-x-y}{3x+3y-1}$;
- д) $y' = \frac{5x-y+17}{3x+5y-1}$; е) $y' - \frac{2y}{x} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+6x+10}}$.
3. а) $\frac{x}{\cos y} dx + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} dy = 0$; б) $y' = \frac{x^2 \cos x^3}{y \sin 3y}$;
- в) $y' = \frac{x}{y} \operatorname{cosec} \frac{2y}{x} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{4x+4y+1}{3-x-y}$;
- д) $y' = \frac{2x-y+7}{x+2y-4}$; е) $y' - \frac{2y}{\sin 2x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x^2-1}}$.
4. а) $x(y^2+4y+5) \ln x dx - dy = 0$; б) $y' = \frac{y^2+4y+20}{(x+1) \ln(x+1)}$;
- в) $y' = \frac{x}{y} e^{-\frac{4y}{x}} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{2x+2y-5}{7-x-y}$;

- д) $y' = \frac{7x-11y-24}{2x+7y-17}$; е) $xy' - y = \frac{x^2(4x+3)}{x^2+8x+25}$.
5. а) $\frac{\ln x}{\sqrt[3]{1+y^2}} dx = \frac{y}{x^3} dy$; б) $y' = \frac{y^5+3y^2}{(5y^4+6y)\cos^2 7x}$;
- в) $y' = \frac{2x+y}{x-y}$; г) $y' = \frac{x+y+10}{5x+5y-1}$;
- д) $y' = \frac{-5x+4y+15}{6x-5y-18}$; е) $y' + y \operatorname{tg} x = \cos x \sin^2 4x$.
6. а) $(y^2+3y)dx + \frac{(2y+3)}{x^2 \ln x} dy = 0$; б) $y' = \frac{\cos^2 2x}{y(y^3+2)}$;
- в) $y' = \operatorname{cosec} \frac{y}{x} \cos^3 \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{4x+4y+1}{x+y-3}$;
- д) $y' = \frac{-3x+4y+22}{2x-3y-16}$; е) $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x \cos^2 3x$.
7. а) $dx - xye^y \ln^2 x dy = 0$; б) $y' = \frac{x^3(3+x^2)}{\sin^2 6y}$;
- в) $y' = \sec^2 \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{6x+6y-5}{3-2x-2y}$;
- д) $y' = \frac{x+2y+9}{8x+y+13}$; е) $y' - \frac{2y}{x} = \frac{x^2(6x-1)}{x^2-10x+21}$.
8. а) $\frac{\sin x dx}{3y^2+2} = (\cos^2 x + 1)e^{y^3+2y} dy$; б) $y' = \frac{x^4 \ln x}{3y^2 e^{y^3}}$;
- в) $y' = \operatorname{cosec}^2 \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{3x+3y-9}{7-x-y}$;
- д) $y' = \frac{2x-3y+7}{5x+4y+6}$; е) $xy' - 2y = x^4 e^{2x}$.

9. а) $\frac{\cos x}{y} dx = 5^y (\sin^2 x + 1) dy$; б) $y' = \frac{x^5(1+x^3)}{5y^4 \sin y^5}$;
- в) $y' = \frac{2y^2 - 5xy + 2x^2}{xy}$; г) $y' = \frac{3+x-y}{2-x+y}$;
- д) $y' = \frac{x+y+5}{4x+y+2}$; е) $y' \sin x - y \cos x = \sin^2 x e^{\cos x}$.
10. а) $\frac{\sin x dx}{y^2+y} = (\cos^2 x - 9) \ln y dy$; б) $y' = \frac{\sqrt{x}(3+x^2)}{7y^6 \cos y^7}$;
- в) $y' = \frac{x^2}{y^2+2xy+13x^2} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{7x-7y-1}{x-y+4}$;
- д) $y' = \frac{x-2y+9}{5x-y}$; е) $y' \cos x + y \sin x = \cos^2 x e^{\sin x}$.
11. а) $\frac{3x^2+1}{3^y} dx + \frac{1}{(x^3+x)^4} dy = 0$; б) $y' = \frac{\sin x \cos^5 x}{\sqrt{y}(2+y^3)}$;
- в) $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{3-2x+2y}{8x-8y+1}$;
- д) $y' = \frac{x-2y-12}{12x+y+6}$; е) $y' - \frac{y}{x} = x^2 \cos x$.
12. а) $\frac{\cos x}{\ln y} dx = (y^3 + y^2) \sin^2 x dy$; б) $y' = \frac{\sqrt[4]{x}(x^3+3)}{\cos y \sin^5 y}$;
- в) $x^2 y' = y^2 - 3xy - 5x^2$; г) $y' = \frac{3x+3y-4}{1-9x-9y}$;
- д) $y' = \frac{-x-2y+7}{4x-y-28}$; е) $y' + \frac{2y}{\sin 2x} = \frac{\operatorname{ctg} x}{1+x^2}$.
13. а) $\sin x \sin^3 y dx = \cos^5 x \cos y dy$; б) $y' = x e^{3x} \sqrt{4-9y^2}$;

- в) $xyy' = x^2 \sec \frac{5y}{x} + y^2$; г) $y' = \frac{2x+2y-1}{3-6x-6y}$;
- д) $y' = \frac{2x+3y-1}{x+4y+6}$; е) $y' - \frac{2x+3}{x^2+3x}y = \frac{x^2+3x}{x^2-4x+3}$.
14. а) $\frac{x}{\cos y^3} dx - \frac{y^2}{\sin 3x} dy = 0$; б) $y' = \frac{1}{ye^{5y}(1+4x^2)}$;
- в) $xyy' = x^2 \operatorname{cosec} \frac{7y}{x} + y^2$; г) $y' = \frac{4x+4y+5}{1-12x-12y}$;
- д) $y' = \frac{x+2y-4}{2x+y+1}$; е) $y' - \frac{3x^2-1}{x^3-x}y = \frac{x^3-x}{\sqrt{x^2+6x+34}}$.
15. а) $(y+1)dx = \frac{x^2+4x+20}{\ln(y+1)} dy$; б) $y' = \frac{x(\sqrt{x}-3)\cos^2 y^5}{5y^4}$;
- в) $xyy' = x^2 e^{-\frac{3y}{x}} + y^2$; г) $y' = \frac{5x+5y+4}{15x+15y-8}$;
- д) $y' = \frac{5x-14y-11}{3x-10y-5}$; е) $y' - \frac{4y}{4x^2-1} = \frac{2x-1}{2x+1} \cos^2 x$.
16. а) $\cos^2 4y dx = \frac{x^5+3x^2}{5x^4+6x} dy$; б) $y' = \frac{x(x^2+2)\sin^2 y^4}{4y^3}$;
- в) $xy' = 3x \sec \frac{y}{x} \sin^4 \frac{y}{x} + y$; г) $y' = \frac{x+y+8}{3x+3y+1}$;
- д) $y' = \frac{-3x+4y+6}{2x-3y-3}$; е) $y' + 3x^2 y = e^{-x^3} \sin^2 4x$.
17. а) $\frac{x}{\cos^2 2y} dx + \frac{1}{x^2+3} dy = 0$; б) $y' = \frac{x^3 \ln x}{(y^2+2)(y^3-1)}$;
- в) $xy' = 5x \operatorname{cosec} \frac{y}{x} \cos^2 \frac{y}{x} + y$; г) $y' = \frac{2x-2y-5}{3-x+y}$;

- д) $y' = \frac{x+2y-1}{x+4y+3}$;
18. а) $\frac{1}{y^2} dx - \frac{2+y^3}{\sin^2 4x} dy = 0$; б) $y' = \frac{3x^2 e^{x^3}}{y^2(\sqrt{y+7})}$;
- в) $xy' = 4x \sec^2 \frac{4y}{x} + y$; г) $y' = \frac{3x+3y+2}{x+y-9}$;
- д) $y' = \frac{3x+10y+2}{2x+3y+5}$; е) $y' + \frac{y}{\sin^2 x} = e^{ctgx} \cos^3 x$.
19. а) $\frac{3e^{x^3}}{\ln y} dx - \frac{y^4}{x^2} dy = 0$; б) $y' = \frac{xe^{3x} \sin^2 y^5}{5y^4}$;
- в) $xy' = 5x \operatorname{cosec}^2 \frac{2y}{x} + y$; г) $y' = \frac{x+y-3}{5x+5y-1}$;
- д) $y' = \frac{x+2y-1}{3x+y-8}$; е) $y' - \frac{y}{\cos^2 x} = e^{tgx} x \sin 2x$.
20. а) $\frac{5 \sin x^5}{y^3} dx + \frac{1+y^5}{x^4} dy = 0$; б) $y' = \frac{x(1+y^2) \sin x}{y}$;
- в) $xyy' = 2y^2 + 4xy + x^2$; г) $y' = \frac{2x-2y+3}{10x-10y-2}$;
- д) $y' = \frac{3x+2y}{4x+3y+1}$; е) $y' - \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = e^{\arcsin x} \sin^3 x$.
21. а) $\frac{7 \cos x^7}{\sqrt{y}} dx - \frac{2+y}{x^6} dy = 0$; б) $y' = \frac{\sqrt{1+y^2}}{xy \ln x}$;
- в) $xy' = \frac{x^3}{y^2+6xy+25} + y$; г) $y' = \frac{3x+3y-7}{5-9x-9y}$;
- д) $y' = \frac{-x+4y-6}{8x-y+17}$; е) $y' - \frac{y}{1+x^2} = e^{\operatorname{arctg} x} x \ln x$.

22. а) $\frac{\sqrt{x}}{\sin y} dx - \frac{\cos^2 y}{3+x^2} dy = 0$; б) $y' = \frac{x \cos x}{y\sqrt{1+y^2}}$;
- в) $xy' = y \ln^2 \frac{y}{x} + y$; г) $y' = \frac{4x-4y+3}{7+x-y}$;
- д) $y' = \frac{x-2y-11}{x+y+4}$; е) $y' - \frac{3 \sin x}{\cos^4 x} y = x^3 e^{\cos^{-3} x} \ln x$.
23. а) $\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{y}} dx + \frac{y^4+7}{\cos x} dy = 0$; б) $y' = \frac{1}{y(x^2+4x+5) \ln y}$;
- в) $xy' = \frac{y^2-5xy+25x^2}{x}$; г) $y' = \frac{y-x+5}{3x-3y+2}$;
- д) $y' = \frac{2x+y}{5x+2y+3}$; е) $y' - 3x^2 y \cos x^3 = e^{\sin x^3} 5^{4x}$.
24. а) $\frac{1}{y} dx = \sqrt{4-9x^2} e^{5y} dy$; б) $y' = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{y^3 \ln y}$;
- в) $2yy' = x \sec \frac{7y}{x} + \frac{2y^2}{x}$; г) $y' = \frac{y+3x-1}{5-2y-6x}$;
- д) $y' = \frac{x+y+2}{x+4y-1}$; е) $y' + \frac{5x^4+1}{x^5+x} y = \frac{\sin^2 4x}{x^5+x}$.
25. а) $xe^{3x}(1+4y^2)dx = dy$; б) $y' = \frac{2x+3}{y^2(x^2+3x+1) \ln y}$;
- в) $3yy' = x \operatorname{cosec} \frac{5y}{x} + \frac{3y^2}{x}$; г) $y' = \frac{2x-y+5}{4x-2y+3}$;
- д) $y' = \frac{-3x+10y+21}{2x-3y-14}$; е) $y' + 2y \sin 2x = \frac{e^{\cos 2x}}{x^2+8x}$.

26. а) $\frac{5x^4}{y} dx = (\sqrt{y} + 4) \cos^2 x^5 dy$; б) $y' = xye^x \ln^2 y$;
- в) $4yy' = xe^{-\frac{y}{x}} + \frac{4y^2}{x}$; г) $y' = \frac{x+4y-1}{3-x-4y}$;
- д) $y' = \frac{-5x+2y+7}{3x-5y-8}$; е) $y' - 4y \cos 4x = xe^{\sin 4x} \cos 3x$.
27. а) $\frac{4x^3}{y+1} dx = (y^2 + 2) \sin x^4 dy$; б) $y' = \frac{3x^2(\cos^2 y + 1)e^{x^3}}{\sin y}$;
- в) $5y' = 2 \sec \frac{y}{x} \sin^6 \frac{y}{x} + 5 \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{5-x+3y}{2x-6y+1}$;
- д) $y' = \frac{-x+3y-9}{4x-y+3}$; е) $y' + \frac{7x^6+2x}{x^7+x^2} y = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^7+x^2}$.
28. а) $\frac{x^2+2}{\ln y} dx - \frac{y^3}{x^3+1} dy = 0$; б) $y' = \frac{x5^x(\sin^2 y + 4)}{\cos y}$;
- в) $2y' = 3 \operatorname{cosec} \frac{y}{x} \cos^7 \frac{y}{x} + 2 \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{x+2y-1}{3x+6y+5}$;
- д) $y' = \frac{-x-y+3}{5x-y-9}$; е) $y' - \frac{9x^8-4x^3}{x^9-x^4} y = \frac{x^9-x^4}{x^2-4x}$.
29. а) $\frac{x^3}{y^2} dx + \frac{3e^{y^3}}{\sqrt{x+5}} dy = 0$; б) $y' = \frac{x^5(\cos^2 y - 9) \ln x}{\sin y}$;
- в) $5y' = 6 \sec^2 \frac{8y}{x} + 5 \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{3x-y+4}{2-3x+y}$;
- д) $y' = \frac{2x+11y+3}{x+2y-2}$; е) $y' + \frac{\sin x}{\cos^2 x} y = e^{-\cos^{-1} x} \sin 5x$.
30. а) $\frac{5}{y \sin^2 x^5} dx = \frac{e^{3y}}{x^4} dy$; б) $y' = \frac{x^9(\sin^2 y - 4) \ln x}{\cos y}$;

$$в) 7y' = 5 \operatorname{cosec}^2 \frac{y}{x} + 7 \frac{y}{x}; \quad г) y' = \frac{3+2x-5y}{5y-2x+4};$$

$$д) y' = \frac{2x-9y+2}{3x+2y+3}; \quad е) y' - 4y \sin^3 x \cos x = e^{\sin^4 x} 9^{3x}.$$

Завдання 34. Розв'язати задачу Коші.

$$1. y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x \cos^2 3x, \quad y(\pi/4) = 8.$$

$$2. y' = \sec^2 \frac{y}{x} + \frac{y}{x}, \quad y(6) = \pi.$$

$$3. \frac{\sin x dx}{3y^2 + 2} = (\cos^2 x + 1) e^{y^3 + 2y} dy, \quad y(0) = 0.$$

$$4. y' \sin x - y \cos x = \sin^2 x e^{\cos x}, \quad y(\pi/6) = 2.$$

$$5. y' = \frac{x^2}{y^2 + 2xy + 13x^2} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1.$$

$$6. y' = \frac{\sin x \cos^5 x}{\sqrt{y(2+y^3)}}, \quad y(0) = 1.$$

$$7. y' = \frac{3x + 3y - 4}{1 - 9x - 9y}, \quad y(0) = 1.$$

$$8. xy' = x^2 \sec \frac{5y}{x} + y^2, \quad y(5) = \pi.$$

$$9. \frac{x}{\cos y^3} dx - \frac{y^2}{\sin 3x} dy = 0, \quad y(\pi/6) = 0.$$

$$10. y' - \frac{4y}{4x^2 - 1} = \frac{2x - 1}{2x + 1} \cos^2 x, \quad y(0) = 2.$$

$$11. xy' = 3x \sec \frac{y}{x} \sin^4 \frac{y}{x} + y, \quad y(6) = \pi.$$

12. $y' = \frac{x^3 \ln x}{(y^2 + 2)(y^3 - 1)}, \quad y(1) = 0.$
13. $y' + \frac{y}{\sin^2 x} = e^{\operatorname{ctg} x} \cos^3 x, \quad y(\pi/2) = 4.$
14. $y' = \frac{x + y - 3}{5x + 5y - 1}, \quad y(0) = 2.$
15. $yy' = x(1 + y^2) \sin x, \quad y(0) = 0.$
16. $y' - \frac{y}{1 + x^2} = e^{\operatorname{arctg} x} x \ln x, \quad y(1) = 5.$
17. $xy' = y \ln^2 \frac{y}{x} + y, \quad y(1) = e.$
18. $y' = \frac{1}{y(x^2 + 4x + 5) \ln y}, \quad y(1) = e.$
19. $y' = \frac{y + 3x - 1}{5 - 2y - 6x}, \quad y(0) = 2.$
20. $3yy' = x \operatorname{cosec} \frac{5y}{x} + \frac{3y^2}{x}, \quad y(15) = \pi.$
21. $y' = xye^x \ln^2 y, \quad y(0) = e.$
22. $y' = \frac{5 - x + 3y}{2x - 6y + 1}, \quad y(0) = 1.$
23. $2y' = 3 \operatorname{cosec} \frac{y}{x} \cos^7 \frac{y}{x} + 2 \frac{y}{x}, \quad y(6) = \pi.$
24. $y' = \frac{x^5 (\cos^2 y - 9) \ln x}{\sin y}, \quad y(1) = \pi/2.$
25. $y' - 4y \sin^3 x \cos x = e^{\sin^4 x} 9^{3x}, \quad y(0) = 2.$

$$26. y' = \frac{y^2 - xy + 4x^2}{x^2}, \quad y(1) = 2.$$

$$27. x \ln y dx - \frac{\sqrt{1+x^2}}{y} dy = 0, \quad y(0) = e.$$

$$28. y' = \frac{4x + 4y + 1}{3 - x - y}, \quad y(0) = 1.$$

$$29. y' = \frac{x}{y} e^{-\frac{4y}{x}} + \frac{y}{x}, \quad y(4) = -1.$$

$$30. \frac{\ln x}{\sqrt[3]{1+y^2}} dx = \frac{y}{x^3} dy, \quad y(1) = 0.$$

Завдання 35. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків, понижуючи порядок.

- | | |
|---|---|
| 1. а) $y''' = 6x + xe^{2x};$ | б) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sec x.$ |
| 2. а) $y^{(4)} = 8 \cos 2x + 3x^2;$ | б) $(x^3 + x^2)y'' - (3x^2 + 2x)y' = 0.$ |
| 3. а) $y''' = \sqrt{x} + 9x \cos 3x;$ | б) $y'' + 2y'^2 \operatorname{tg} y = 0.$ |
| 4. а) $y^{(4)} = 12 \sin 3x + 2^x;$ | б) $(1 - y^2)y'' + yy'^2 = 0.$ |
| 5. а) $y''' = (2x + 1)^{-3} - xe^{3x};$ | б) $y'' = y'(2y - 2).$ |
| 6. а) $y^{(4)} = 4^x + 5x^{-4};$ | б) $y'' - 2y'^2 \operatorname{ctg} y = 0.$ |
| 7. а) $y''' = x \ln x + 12 \sin 3x;$ | б) $y'' - y' \operatorname{ctg} x = -\operatorname{cosec} x.$ |
| 8. а) $y^{(4)} = 3x^{-5} - 8 \cos 2x;$ | б) $(x^2 + 4x + 5)y'' = -(2x + 4)y'.$ |
| 9. а) $y''' = x \sin 2x - 5x^{-3};$ | б) $(1 + y^2)y'' - 2yy'^2 = 0.$ |
| 10. а) $y^{(4)} = 2 \cdot 3^x - 27(2 - 3x)^{-4};$ | б) $y'' \sin 2x + 2y' = 0.$ |

11. a) $y''' = x^2 \ln x + 4e^{2x}$; б) $y'' - \frac{2}{x} y' = \frac{3}{x}$.
12. a) $y^{(4)} = 3 \cdot 4^x - 25 \sin 5x$; б) $(y^2 + 3)y'' - yy'^2 = 0$.
13. a) $y''' = 6x^{-4} - 12x^2 \ln x$; б) $2yy'' = 1 + y'^2$.
14. a) $y^{(4)} = 24x^{-5} - 81 \cdot 5^{3x}$; б) $(y^3 - y^2)y'' = (2y - 3y^2)y'^2$.
15. a) $y''' = x - 16x \sin 4x$; б) $y'' \sin 2x - 2y' = 0$.
16. a) $y^{(4)} = 60x^{-6} - 32e^{-2x}$; б) $y'' - y'^2 \operatorname{ctg} y = 0$.
17. a) $y''' = \frac{1}{8} x \sin \frac{1}{2} x - 6$; б) $(x^2 - 4x + 3)y'' = (4 - 2x)y'$.
18. a) $y^{(4)} = \left(\frac{1}{2}x + 5\right)^{-4} - 9^{2x}$; б) $(y^2 + 8y + 17)y'' = (y + 4)y'^2$.
19. a) $y''' = \frac{1}{4} x \cos \frac{1}{2} x + 12$; б) $y'' + y' \operatorname{tg} x = 0$.
20. a) $y^{(4)} = \left(4 - \frac{1}{2}x\right)^{-5} + 9 \cdot 10^{3x}$; б) $(y^5 - 2y^2)y'' = (4y - 5y^4)y'^2$.
21. a) $y''' = 2 \cos^2 x - 3e^{-x}$; б) $y'' - 2y' \operatorname{tg} x = 0$.
22. a) $y^{(4)} = 120x^{-7} + 2 \sin^2 x$; б) $(2y + 1)y'' = 2y'^2$.
23. a) $y''' = \sin^2 x \cos x$; б) $(x^5 + x^3)y'' = (5x^4 + 3x^2)y'$.
24. a) $y^{(4)} = xe^{-2x}$; б) $(3y + 4)y'' = 3y'^2$.
25. a) $y''' = \cos^2 x \sin x$; б) $xy'' - 3y' = 4$.
26. a) $y^{(4)} = x \sin(1 - 2x)$; б) $y'' + y'^2 \operatorname{tg} y = 0$.
27. a) $y''' = \cos^3 x$; б) $y'' + 2y' \operatorname{ctg} x = 0$.
28. a) $y^{(4)} = x \cos(3 + 2x)$; б) $(y^2 + 4y + 5)y'' = (2y + 4)y'^2$.
29. a) $y''' = \sin^3 x$; б) $y'' = y' \operatorname{ctg} x$.

30. а) $y^{(4)} = xe^{3+2x}$;

б) $(y^2 - 6y + 8)y'' = (2y - 6)y'^2$.

Завдання 36. Розв'язати лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

1. $y'' - 4y' + 13y = 13x^2 + 10$.

2. $y'' + 2y' + 5y = 8xe^x$.

3. $y'' - 2y' + 10y = 20x^2 + 9$.

4. $y'' - 4y' + 29y = 6xe^{-x}$.

5. $y'' + 4y' + 20y = 4x - 20x^2$.

6. $y'' - 6y' + 10y = 4xe^{-2x}$.

7. $y'' + 9y = 9x^2 - 8$.

8. $y'' - 4y' + 5y = 10xe^{3x}$.

9. $y'' - 2y' - 3y = 4xe^{-x}$.

10. $y'' + 6y' + 13y = 5x - 26x^2$.

11. $y'' + 2y' + 17y = 4xe^{2x}$.

12. $y'' - 4y' + 40y = 6xe^{-x}$.

13. $y'' - 2y' - 15y = 9 - 15x^2$.

14. $y'' - 10y' + 26y = 5xe^x$.

15. $y'' + 8y' + 17y = 34x^2 + 10x$.

16. $y'' - 6y' - 7y = 14xe^{-3x}$.

17. $y'' - 8y' + 20y = 6 - 40x^2$.

18. $y'' + 4y' + 40y = 10xe^{4x}$.

19. $y'' - 2y' + 50y = 50x^2 + 14x$.

20. $y'' - 2y' - 8y = 16xe^{-2x}$.

21. $y'' + 2y' + 37y = 74x^2 - 21$.

22. $y'' - 2y' - 35y = 25xe^{-5x}$.

23. $y'' - 12y' + 40y = 30x - 40x^2$.

24. $y'' - 10y' + 29y = 36xe^{3x}$.

25. $y'' - 8y' + 16y = 8xe^{-2x}$.

26. $y'' + 8y' + 20y = 18 - 20x^2$.

27. $y'' + 3y' - 18y = 10xe^{2x}$.

28. $y'' - 8y' + 25y = 20xe^{4x}$.

29. $y'' - 16y' + 65y = 32xe^{-2x}$.

30. $y'' + y' - 42y = 48xe^{-4x}$.

Теорія ймовірностей

Завдання 37. Елементи комбінаторики

1. В групі є 25 студентів. Скількома способами можна вибрати серед них старосту та заступника?

2. Шість викладачів мають розподілити між собою 6 розділів книги так, щоб кожен викладач писав один розділ. Скількома способами можна це зробити?

3. На екзамені з вищої математики має бути комісія з 3 викладачів. Скількома способами можна утворити комісію з 12 осіб?

4. У групі налічується 20 студентів. Скількома способами можна обрати: а) студентську раду із трьох студентів; б) голову, заступника та секретаря студентської ради?

5. Скількома способами можна скласти список з 9 учнів?

6. У пасажирському поїзді 14 вагонів. Скількома способами можна розподілити по цих вагонах 14 провідників, якщо за кожним вагоном закріплювати одного провідника?

7. З цифр 0, 1, 2, 3 складені різні чотирицифрові числа так, що в кожному немає однакових цифр. Скільки вийшло чисел?

8. З цифр 1, 2, 3, 4, 5, не повторюючи їх, склали всі можливі п'ятицифрові числа. З'ясуйте, скільки серед цих чисел таких, які: а) починаються цифрою 5; б) не починаються цифрою 5; в) починаються з 54; г) не починаються з 543.

9. Скільки різних акордів можна зіграти на 10 вибраних клавішах рояля, якщо в кожному акорді може бути від трьох до десяти звуків.

10. У підрозділі 80 солдат і 6 офіцерів. Скількома способами можна призначити патруль, у складі якого два офіцери і три солдати?

11. Необхідно виділити для охорони підприємства 6 солдат, 3 сержантів і 2 офіцерів. Скількома способами це можна зробити, якщо в роті є 30 солдат, 6 сержантів і 4 офіцери?

12. Для карнавального походу готують різні прапори. Скількома способами з п'яти сувоїх стрічок різного кольору можна виготовити різні прапори, які мають по три горизонтальні смуги, якщо в одному прапорі жоден з кольорів не повинен повторюватись?

13. Номер автомобільного причепа містить дві букви і чотири цифри. Скільки різних номерів можна скласти з 30 букв і 10 цифр.

14. Із Києва до Чернігова можна добратися чотирма способами — поїздом, автобусом, літаком та теплоходом, а з Чернігова до

Новгород–Сіверська двома — теплоходом і автобусом. Скількома способами можна здійснити подорож від Києва до Новгород–Сіверська із зупинкою у Чернігові?

15. У першості України з футболу у вищій лізі приймають участь 16 команд. Скількома способами теоретично між ними могли б бути розподілені золоті, срібні та бронзові медалі?

16. Необхідно вибрати делегацію в складі чотирьох учнів одного класу і одного вчителя. Скількома способами це можна здійснити, коли в школі працює 20 вчителів, а у вибраному класі навчаються 36 учнів?

16. Автомобільний номер складається з п'яти цифр і двох літер, які стоять після цифр. Скільки різних номерів можна скласти, використовуючи 30 літер і 10 цифр?

17. У профспілковий комітет обрано 7 працівників. З них необхідно обрати голову, його заступника і секретаря. Скількома способами можна це зробити?

18. Є шість видів конвертів і 5 видів поштових марок. Скількома способами для відправки листа можна вибрати конверт і марку?

19. В аудиторії 8 світильників. Скільки існує способів освітлення цієї аудиторії?

20. Три хлопчики зірвали 40 яблук. Скількома способами вони можуть розділити ці яблука?

21. Скільки різних чотирицифрових чисел, які діляться на 4 можна записати за допомогою цифр 3, 4, 5, 6, 7, якщо цифри в записі числа можуть повторюватись?

22. У поштовому кіоску продають 12 видів листівок. Скількома способами можна закупити 7 листівок? Скількома способами можна вибрати 8 різних листівок?

23. Скільки пар різних підмножин множини $M = \{1; 2; 3; 4; \dots; 10\}$ можна утворити, якщо в одну підмножину можна включати два, три або чотири різних елементи множини?

24. Скільки існує чотирицифрових чисел, в записах яких усі цифри різні?

25. Скільки існує чотирицифрових чисел, в записах яких цифри можуть повторюватись?

Завдання 38. *Класичне означення ймовірності. Геометрична ймовірність*

1. Знайти класичну ймовірність того, що випадковим чином

вибране двозначне число ділиться: а) на 2 або на 3; б) на 2 і на 3.

2. В податковій адміністрації зареєстровано 6 приватних і 4 державних підприємства. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних трьох підприємств приватними будуть: а) три; б) два; в) не більше одного.

3. Є п'ять карточок на кожній з яких написано по одній із букв «О», «Р», «С», «Т», «П». Знайти ймовірність того, що випадковим чином складені карточки утворюють слово «СПОРТ».

4. У бібліотеці є 9 книг, з них 5 з економіки і 4 з математики. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 6 книг є 3 з економіки.

5. Серед 10 працівників є 4 з вищою освітою. Визначити ймовірність того, що із навмання вибраних 6 працівників буде два з вищою освітою.

6. З карток, які складають слово «ціноутворення», навмання вибирають одну. Визначити ймовірність того, що на ній буде написана буква: а) «н»; б) «у».

7. В ящику 40 куль: 28 червоних і 12 синіх. З ящика навмання виймають дві кулі. Визначити ймовірність того, що ці кулі: а) червоні; б) сині.

8. Із 40 доброякісних і 4 бракованих деталей для контролю взято навмання вісім. Визначити ймовірність того, що серед них 5 деталей буде доброякісними.

9. На книжковій полиці в довільному порядку розміщені книги з п'ятитомного зібрання творів. Яка ймовірність того, що всі томи розміщені в порядку зростання номерів?

10. На книжковій полиці в довільному порядку розміщені книги з десяти томного зібрання творів. Яка ймовірність того, що третій, четвертий, п'ятий томи після переставляння стоятимуть поруч в порядку зростання номерів?

11. На книжковій полиці в довільному порядку розміщені книги з восьми томного зібрання творів. Яка ймовірність того, що п'ятий, шостий, сьомий томи після переставляння стоятимуть поруч в порядку зростання номерів?

12. Серед 4000 перших простих чисел натурального ряду є 551 просте число. Знайдіть частоту появи простого числа.

13. Проведено 100 пострілів у мішень. Виявлено, що відносна частота влучень дорівнює 0,85. Скільки пострілів були влучними?

14. Під час перевірки готової продукції було виявлено 5 бракованих одиниць товару з 200 перевірених. Знайти відносну частоту бракованих одиниць товару.

15. На проміжку $[0; 5]$ випадково вибирають два цілих числа. Яка ймовірність того, що: а) сума чисел менша за 4; б) добуток вибраних чисел більший за 5; в) модуль різниці вибраних чисел менший за 2, а їх добуток більший за 3.

16. На відрізку $[0, 10]$ навмання вибирають два цілих числа. Знайти ймовірність того, що сума цих чисел не перевищує 1.

17. На кожній з 9 карток написано по літері: «м», «с», «к», «н», «е», «о», «і», «т», «о». Знайти ймовірність того, що, навмання викладаючи ці картки одна біля одної, ви отримаєте слово «економіст».

18. П'ять книжок, серед яких 2 підручники з математики, довільно розміщують на полиці. Яка ймовірність того, що ці 2 підручники стоятимуть поряд?

19. В урні знаходиться 8 карток з цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Із урни навмання без повернення виймають по одній усі картки і цифри, що з'являються, записують зліва направо. Яка ймовірність того, що: а) записане число закінчується рівно двома непарними цифрами; б) усі парні цифри стоятимуть поруч?

20. Навмання вибирається п'ятицифрове число. Знайти ймовірність того, що це число: а) кратне 5; б) складається з непарних цифр; в) однаково читається як зліва направо, так і справа наліво (як, наприклад, 23132).

21. На шести однакових картках написані цифри від 1 до 6. Навмання вибрано чотири картки і розкладено їх в порядку появи в ряд зліва направо. Знайти ймовірність того, що появиться число, яке: а) не містить цифр 1 і 5; б) кратне 3.

22. Маємо 5 відрізків, довжини яких — 1 см, 3 см, 5 см, 7 см, 9 см. Визначити ймовірність того, що з трьох відрізків, навмання взятих з даних п'яти, можна скласти трикутник.

23. На кожній із 5 карточок написана одна з таких літер «А», «І», «З», «К», «Л». Знайти ймовірність утворення слова «ЗАЛІК».

24. Знайти ймовірність того, що навмання складене із цифр 1, 2, 3, 4 без повторення чотирицифрове число починається цифрами: а) 2; б) 34.

25. Обчислити ймовірність того, що для навмання заданого трицифрового числа із цифри 1, 2, 3, 4 без повторення, сума усіх його цифр: а) рівна 8; б) менша 8.

Завдання 39. Теорема додавання і множення ймовірностей.

1. Три студенти складають іспит. Ймовірність того, що перший студент складе іспит, дорівнює 0,95, другий-0,9, третій-0,85. Визначити ймовірність того, що: а) два студенти складуть іспит; б) всі три студенти складуть іспит.

2. В класі 35 учнів: 20 дівчаток та 15 хлопчиків. Вирішено за допомогою жеребу розподілити серед учнів чотири квитки в театр. Яка ймовірність, що квитки отримають: (а) чотири дівчинки; (б) два хлопчики та дві дівчинки?

3. У вазі 5 троянд рожевого, 7 червоного та 3 білого кольору. Навмання дістають 2 троянди. Яка ймовірність того, що вони будуть: а) одного кольору; б) різних кольорів?

4. Із 10 лотерейних білетів книжкової лотереї, що перебувають у продажу, 2 виграшні. Визначити ймовірність того, що серед куплених 5 білетів: а) один виграшний; б) хоча б один виграшний.

5. Перший стрілець влучає у ціль з ймовірністю 0,8, другий — з ймовірністю 0,9, а третій — з ймовірністю 0,85. Яка ймовірність того, що хоча б один стрілець влучить у ціль?

6. Робітник обслуговує одночасно 3 верстати. Ймовірність порушення роботи протягом години для першого дорівнює 0,1, для другого — 0,2, для третього — 0,2. Яка ймовірність того, що: а) усі три верстати працюватимуть протягом години; б) хоча б один із них вийде з ладу?

7. Двоє стрільців виконали по одному пострілу у мішень. Ймовірність влучення для першого стрільця становить 0,7, а для другого — 0,8. Яка ймовірність того, що не відбудеться жодного влучення?

8. Знайти ймовірність того, що навімання вибране двозначне число ділиться на 5 або на 10.

9. Робітник обслуговує одночасно 3 верстати. Ймовірність порушення роботи протягом години для першого дорівнює 0,1, для другого — 0,2, для третього — 0,2. Яка ймовірність того, що: а) усі три верстати працюватимуть протягом години; б) хоча б один із них вийде з ладу?

10. Для виконання завдання замовник звернувся до двох виконавців. Ймовірність того, що перший виконавець надасть згоду виконати замовлення дорівнює 0,8, а другий — 0,9. Знайти ймовірність того, що замовлення буде прийнято принаймні одним з цих виконавців.

11. Три стрільці незалежно один від одного стріляють по мішені. Ймовірність влучення в мішень для першого дорівнює 0,7, для другого — 0,8, для третього — 0,9. Яка ймовірність, що: а) хоча б

один з них влучить у мішень; б) тільки двоє влучать у мішень; в) жоден не влучить у мішень?

12. До іспиту з теорії ймовірності студентів запропоновано 100 задач. При підготовці до іспиту студент розв'язав 90 задач. Яка ймовірність того, що в білеті, який містить 3 задачі, всі будуть з тих, які студентом не розв'язані?

13. Мішень складається з трьох областей, які попарно не перетинаються. Ймовірність влучення стрільцем у першу область мішені дорівнює 0,45, у другу область — 0,35, а у третю — 0,15. Яка ймовірність того, що при одному пострілі стрілець влучить: а) у першу або у другу область; б) не влучить у мішень?

14. Робітник обслуговує три верстати. Ймовірність того, що протягом години він буде біля першого верстата, дорівнює 0,7, біля другого — 0,5, третього — 0,75. Визначити ймовірність того, що протягом години уваги робітника закладають: а) всі верстати; б) який-небудь один верстат; в) хоча б один верстат.

15. Ймовірність того, що студент відповість на перше із трьох питань екзаменаційного квитка, дорівнює 0,95, на друге — 0,9 і на третє — 0,85. Визначити ймовірність того, що студент здасть іспит, якщо для цього йому необхідно відповісти: а) на всі питання; б) хоча б на два питання.

16. Для повідомлення про пожежу в приміщенні встановлено три сигналізатори, які працюють незалежно. Ймовірність того, що при пожежі спрацює перший сигналізатор дорівнює 0,9, для другого та третього сигналізаторів ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,75 та 0,8. Яка ймовірність того, що при пожежі спрацює: а) тільки перший сигналізатор; б) принаймні два сигналізатори; в) тільки один сигналізатор?

17. Студент знає 28 з 35 питань програми. Білет містить чотири питання програми. Яка ймовірність того, що студент: а) не відповість на жодне питання навмання взятого білета; б) відповість тільки на два питання з білета; в) відповість хоча б на одне питання з білета?

18. В першому ящику 16 білих і 4 червоних кулі, в другому — 8 білих і 12 червоних. З кожного ящика навмання беруть по одній кулі. Яка ймовірність того, що серед вибраних буде: а) тільки одна червона куля; б) хоча б одна червона куля?

19. Партія деталей містить 6 деталей вищого, 7 деталей першого та 4 деталі другого сорту. З партії навмання взято 4 деталі. Яка ймовірність того, що: а) серед них буде три першого і одна

другого сорту; б) серед них хоча б одна буде другого сорту; в) серед них жодної першого сорту?

20. Студент вивчив 8 питань із 12. Знайти ймовірність того, що він дасть відповідь хоч би на два питання із трьох навмання вибраних.

21. Ймовірності появи двох несумісних, незалежних подій дорівнюють 0,6 і 0,3 відповідно. Яка ймовірність того, що в результаті випробування відбудеться хоча б одна з цих подій?

22. Три елементи електричного ланцюга виходять зі строю незалежно один від одного з ймовірностями 0,1, 0,05 та 0,08 відповідно. Знайти ймовірність того, що в ланцюгу настане розрив, якщо елементи з'єднані паралельно?

23. По мішені зроблено залп із двох гармат. Ймовірність вразити ціль першою гарматою дорівнює 0,8, другою – 0,7. Для знищення цілі необхідне одне попадання. Яка ймовірність того, що ціль знищена?

24. В урні 5 синіх і 10 червоних кульок. Навмання витягують по черзі три кульки. Знайти ймовірність того, що перша кулька буде синя, а дві наступні – червоні.

25. Для зруйнування крижаного затору на річці досить одного влучення авіаційної бомби. Знайти ймовірність зруйнування затору при трьох бомбометаннях, якщо ймовірність влучення бомб при цьому відповідно рівні 0,4; 0,5; 0,6.

Завдання 40. Формула повної ймовірності. Формула Байєса

1. На трьох дочок у сім'ї (старшу, середню та молодшу); покладений обов'язок мити посуд. Старша дочка виконує 40% усієї роботи, інші по 30%. Ймовірність розбити при митті посуд для старшої дочки становить 0,02, для середньої та молодшої відповідно 0,03 та 0,04. Невідомо, хто напередодні мив посуд, але одна тарілка виявилася розбитою. Яка ймовірність того, що посуд мила старша дочка?

2. В урні було 4 чорних і 3 білих кульки. З неї випадковим чином вийняли 3 кульки. Яка ймовірність того, що вийняті після цього 2 кульки виявляться чорними?

3. Клієнт має можливість покласти гроші на довготривалий рахунок в один з трьох банків. Ризик (тобто можливість банкрутства банку протягом зазначеного терміну) при цьому становить 2% для першого банку, 3% та 4% відповідно для другого та третього. Яка ймовірність не вигідного вкладання коштів в банк, вибраний навмання?

4. В магазин надійшли телевізори, виготовлені на трьох заводах. Продукція першого заводу містить 18% телевізорів із скритим

дефектом, другого – 12%, третього – 5%. Яка ймовірність придбати справний телевізор, якщо в магазин поступило 30% телевізорів з першого заводу, 25% – з другого і 45% – з третього?

5. Для участі в студентських відбіркових спортивних змаганнях виділено з першої групи курсу 4, з другої – 6, з третьої – 5 студентів. Ймовірності того, що студент першої, другої, третьої групи попаде в збірну інституту, відповідно рівні 0,9; 0,7; 0,8. Навмання вибраний студент в результаті змагань попав до збірної. До якої із груп найімовірніше він належав?

6. Чотири верстати виготовляють однакові деталі. За зміну перший верстат виготовив 20 деталей, другий – 30, третій – 40, а четвертий – 10 деталей. Ймовірність появи браку на першому верстаті рівна 0,1; на другому – 0,15; на третьому – 0,2; на четвертому – 0,05. Яка ймовірність того, що навмання взята деталь виготовлена на третьому верстаті, якщо вона виявилася якісною?

7. З 20 стрільців 8 влучають у мішень з імовірністю 0,8; 7 – з імовірністю 0,6 і 5 – з імовірністю 0,5. Навмання вибраний стрілець, зробивши 1 постріл в мішень, не влучив. Знайти ймовірність того, що він належав до першої групи.

8. Для контролю з 3 партій деталей навмання взято 1 деталь. Яка ймовірність того, що деталь бракована, якщо в першій партії 10% бракованих деталей, в другій – 20% бракованих деталей, а в третій партії всі деталі стандартні?

9. Відомо, що 5% всіх чоловіків і 0,25% всіх жінок дальтоніки. Навмання вибрана особа – дальтонік. Яка ймовірність того, що це жінка? (Вважати, що чоловіків і жінок однакова кількість).

10. В електронно-обчислювальній машині 5% з усіх неполадок припадає на арифметичний пристрій, 10% на оперативну пам'ять, 15% на пристрої зовнішньої пам'яті, решта на периферійні пристрої. Ймовірність ліквідації неполадки у цих пристроях з допомогою служби ТО відповідно дорівнює 0,1, 0,2, 0,4 і 0,8. Неполадка, що виникла, була ліквідована службою ТО. Яка ймовірність того, що вона стосувалася оперативної пам'яті?

11. У коробці 10 чорних, 5 білих та 15 синіх кульок. Навмання витягують і відставляють в сторону 1 кульку. Потім витягують ще 1 кульку. Яка ймовірність того, що друга кулька буде синього кольору?

12. Є 2 партії деталей з 150 і 100 деталей. В кожній партії по 5 деталей бракованих. Одну деталь, навмання вибрану з першої партії, переключили в другу партію. Потім з другої партії вибрали навмання 1 деталь. Яка ймовірність того, що остання деталь не бракована?

13. В обчислювальній лабораторії є три партії комп'ютерів індивідуального користування, виготовлених на різних заводах у кількостях 20, 30 і 50 штук відповідно. Ймовірності того, що комп'ютери, поставлені різними заводами, пропрацюють без ремонту заданий термін, відповідно дорівнюють для цих партій 0,7, 0,8, 0,9. Яка ймовірність того, що вибраний навмання комп'ютер із ста даних пропрацює без ремонту заданий час?

14. Є три партії деталей по 30 деталей в кожній. Число стандартних деталей в кожній партії дорівнює відповідно 20, 21, 18. З навмання вибраної партії вийняли деталь, яка виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що деталь була взята з другої партії.

15. В урні міститься 10 чорних і 5 білих кульок. Навмання витягнули 3 кульки і чорні повернули назад, а білі відклали в сторону. Знайти ймовірність того, що витягнуті після цього 2 кульки будуть білі.

16. В урні 3 білих і 7 чорних кульок. Можна або додати в урну 2 білих кульки або навмання витягнути з неї 2 кульки. В якому випадку ймовірність витягнути 1 чорну кульку буде більшою?

17. У першій урні 5 білих і 10 чорних кульок, а в другій – 7 білих і 8 чорних. В одну з урн додають 2 білих кульки. Після чого з навмання вибраної урни витягують 2 кульки. Яка ймовірність того, що ці кульки білі?

18. В урні 3 червоних і 12 білих кульок. З неї витягують навмання 2, а потім ще 2 кульки. Яка ймовірність того, що 2 останні кульки будуть білого кольору?

19. В ящику знаходяться однакові деталі двох заводів у співвідношенні 1:3. Серед деталей першого заводу брак становить 3%, серед деталей другого – 2%. Навмання взята з ящика деталь виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що вона виготовлена першим заводом?

20. В кожній з 8 урн міститься по 6 білих і 4 чорних кулі, а в кожній з наступних 5 урн міститься по 3 білих і 7 чорних куль. З навмання взятої урни навмання вийнята куля. Яка ймовірність того, що вона біла?

21. Три заводи поставляють на конвеєр однотипні деталі. Перший завод поставляє 20%, другий – 30%, третій – 50% деталей. Перший завод випускає 3% браку, другий – 2%, а третій – 1%. При перевірці навмання вибрана деталь виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що вона виготовлена першим заводом?

22. Є 3 однакових урни. В першій 6 білих і 8 чорних, в другій 4 білих і 6 чорних, а в третій 2 білих і 4 чорних кульки. Знайти

ймовірність того, що кулька, витягнута з навмання вибраної урни, виявиться білою.

23. Є три партії деталей по 30 деталей в кожній. Число стандартних деталей в кожній партії дорівнює відповідно 20, 21, 18. З навмання вибраної партії вийняли деталь, яка виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що деталь була взята з другої партії.

24. При масовому виробництві деякого виробу ймовірність того, що він виявиться стандартним, рівна 0,97. Для контролю проводиться деяка спрощена перевірка стандартності виробу, яка дає позитивний результат в 99% для стандартного виробу і в 2% – для нестандартного. Яка ймовірність стандартності виробу, який пройшов спрощену перевірку?

25. В групі з 25 чоловік 5 студентів підготувались до екзамену відмінно, 10 – добре, 7 – посередньо і 3 – погано. На екзамен виноситься 25 питань. Відмінно підготовлений студент може відповісти на всі 25 питань, добре підготовлений – на 20, посередньо підготовлений – на 13, а погано підготовлений – на 6. Викликаний навмання студент відповів на всі 3 поставлені питання. Знайти ймовірність того, що це був посередньо підготовлений студент.

Завдання 41. Повторні незалежні випробування

1. Ймовірність того, що кожний із 100 верстатів працює в даний момент, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що в даний момент працює від 50 до 70 верстатів.

2. Серед виробів даного підприємства 20% виробів вищого сорту. Знайти ймовірність того, що із 5 придбаних виробів 3 вищого сорту.

3. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність 100 влучень при 130 пострілах.

4. Завод відправив на базу 5000 доброякісних виробів. Ймовірність пошкодження кожного виробу в дорозі дорівнює 0,0002. Знайти ймовірність того, що серед 5000 виробів в дорозі буде пошкоджено більше 3 виробів.

5. Ймовірність хоча б одного влучення в ціль при двох пострілах дорівнює 0,99. Знайти ймовірність трьох влучень в ціль при чотирьох пострілах.

6. В квартирі чотири електролампочки. Для кожної лампочки ймовірність того, що вона вийде з ладу на протязі року, дорівнює 5/6. Яка ймовірність того, що на протязі року доведеться замінити не менше половини лампочок?

7. Ймовірність пошкодження при транспортуванні з заводу до пункту збуту для одного пристрою, незалежно від інших, становить 0,002. Яка ймовірність того, що при транспортуванні 1000 одиниць продукції буде пошкоджено не більше двох одиниць?

8. Гральний кубик підкидають тричі. Знайти ймовірність того, що рівно двічі з'явиться число очок кратне трьом.

9. Ймовірність отримати в лотереї білет без виграшу дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що серед 400 навмання куплених білетів не менше 30 і не більше 40 без виграшу?

10. Ймовірність того, що телевізор вимагатиме ремонту впродовж гарантійного строку дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що на протязі гарантійного строку з трьох телевізорів не більше, ніж одному буде потрібен гарантійний ремонт.

11. Гральний кубик підкинули 500 разів. Яка ймовірність того, що число очок, кратне трьом, випаде не менше 160 і не більше 200 разів?

12. Відділ технічного контролю перевіряє деталі на стандартність. Ймовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що з 5 перевірених деталей принаймні 4 деталі будуть стандартними.

13. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі становить 0,8. Яка ймовірність того, що при 100 незалежних пострілах буде зафіксовано не більше 75 влучень?

14. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. У деякій сім'ї шестеро дітей. Знайти ймовірність того, що серед них не більше двох дівчаток.

15. Радіоапаратура складається із 1000 мікроелементів. Ймовірність відмови кожного елемента протягом доби дорівнює 0,001 і не залежить від стану інших елементів. Знайти ймовірність відмови не менше двох елементів за добу.

16. Для забезпечення нормальної роботи банку потрібно, щоб справними були не менше ніж 80% із наявних 50 комп'ютерів. Яка ймовірність нормальної роботи банку, якщо ймовірність вийти з ладу для кожного з комп'ютерів дорівнює 0,1?

17. Яка ймовірність того, що серед 200 чоловік буде не менше чотирьох ліворуких, якщо вони в середньому складають 1% від загальної кількості?

18. Яка ймовірність того, що в стовпчику з 100 навмання відібраних монет, розташованих гербом угору, буде від 45 до 60?

19. Було посаджено 400 дерев. Знайти ймовірність того, що число дерев, які прийнялись, менше 100, якщо ймовірність того, що окреме дерево прийметься, дорівнює 0,8.

20. Підприємство має 5 постачальників, ймовірність виконання договору для кожного з яких дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що менше 40% постачальників виконають договір.

21. Два рівносильних суперники грають в шахи. Що ймовірніше: виграти не менше 4 партій із 7 чи не менше 5 партій із 9? Нічий до уваги не беруться.

22. Гральний кубик кидають 80 разів. Знайти ймовірністю того, що 26 разів з'явиться одиниця.

23. Гральний кубик кидають 125 разів. Знайти ймовірність того, що рівно 32 рази появиться шістка.

24. Керівництво застави зібрало дані, які вказують, що 80% машин, які прибувають на прикордонну заставу, – це легкові автомобілі. Якщо до в'їзду прибуло 9 машин, то яка ймовірність того, що від 4 до 7 з них будуть легкові?

25. Ймовірність виготовлення робітником деталі відмінної якості становить 0,8. Яка ймовірність того, що серед 6 виготовлених робітником деталей хоча б дві будуть відмінної якості.

Завдання 42. Випадкові величини. Числові характеристики випадкових величин

1. Монету кинуть 4 рази. Знайти закон розподілу та функцію розподілу випадкової величини X – числа випадків герба і обчислити її основні числові характеристики: математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

2. В ящику є 6 деталей, 4 з яких стандартні. Навмання відібрано 3 деталі. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа стандартних деталей серед відібраних. Побудувати функцію розподілу та обчислити середнє квадратичне відхилення даної випадкової величини.

3. Ймовірність виконання договору для кожного з чотирьох заводів дорівнює 0,6. Знайти закон розподілу та функцію розподілу випадкової величини X – числа заводів, які виконають договір, і обчислити її математичне сподівання $M(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

4. В ящику знаходиться 3 білих та 5 чорних куль. Навмання виймають три кулі. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа появ білої кулі та обчислити її математичне сподівання $M(X)$.

5. Проведено 3 постріли по мішені. Ймовірність влучення в мішень при першому пострілі дорівнює 0,1, при другому – 0,2, при третьому – 0,3. Знайти закон розподілу та функцію розподілу

випадкової величини X – числа влучень в мішень і обчислити її математичне сподівання $M(X)$.

6. З колоди карт (36 шт.) витягають навмання 4 карти. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості фігурних карт серед витягнутих. Побудувати закон розподілу випадкової величини X та обчислити її середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ та математичне сподівання $M(X)$.

7. Гральний кубик кидають двічі. Знайти закон розподілу та функцію розподілу випадкової величини X – числа випадінь 5 очок і обчислити її середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

8. Стрілець, маючи 4 патрони, стріляє до першого влучення в ціль. Ймовірність влучення в ціль при кожному пострілі дорівнює 0,7. Знайти закон розподілу та функцію розподілу випадкової величини X – числа використаних патронів і обчислити її математичне сподівання $M(X)$.

9. В урні міститься 4 зелених і 3 чорних кулі. З урни витягають по одній кулі до появи чорної. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості витягнутих куль і обчислити її математичне сподівання $M(X)$.

10. В партії із 7 деталей є 5 стандартних. Навмання відібрано 4 деталі. Знайти закон розподілу та функцію розподілу випадкової величини X – числа стандартних деталей серед відібраних і обчислити її математичне сподівання $M(X)$.

11. Абонент при наборі номера телефону забув останню цифру і набирає її навмання. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості наборів номера телефону до попадання на потрібного абонента. Обчислити математичне сподівання $M(X)$.

12. В ящику знаходиться 3 білих та 7 чорних куль. Навмання виймають чотири кулі. Знайти закон розподілу та функцію розподілу випадкової величини X – числа появ білої кулі та обчислити її математичне сподівання $M(X)$.

13. Гральний кубик кидають тричі. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа випадінь 6 очок і обчислити її математичне сподівання $M(X)$.

14. Два гральних кубики одночасно кидають три рази. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа випадінь парного числа очок на двох гральних кубиках. Обчислити математичне сподівання $M(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ даної випадкової величини.

15. В партії із 8 деталей є 5 стандартних. Навмання відібрано 4 деталі. Знайти закон розподілу та функцію розподілу випадкової

величини X – числа стандартних деталей серед відібраних і обчислити її середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

16. В ящику знаходиться 4 білих та 8 чорних куль. Навмання виймають три кулі. Знайти закон розподілу та функцію розподілу випадкової величини X – числа появ чорної кулі та обчислити її дисперсію $D(X)$.

17. Технологічний процес є таким, що брак складає 10% усіх виробів. Навмання взято 3 вироби. Знайти закон розподілу та функцію розподілу випадкової величини X – числа бракованих виробів серед вибраних і обчислити її математичне сподівання $M(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

18. В партії із 10 деталей є 7 стандартних. Навмання відібрано 3 деталі. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа стандартних деталей серед відібраних і обчислити її середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ та ймовірність події $X > 1$.

19. Монету кидають 5 разів. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа випадінь герба і обчислити її основні числові характеристики: математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

20. Технічний пристрій складається з трьох елементів, що працюють незалежно. Ймовірність відмови першого елемента дорівнює 0,2, другого – 0,1, третього – 0,3. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа елементів, що відмовили, і обчислити її середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ та ймовірність події $X < 3$.

21. В партії з 15 деталей є 10 стандартних. Навмання відібрано 3 деталі. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа нестандартних деталей серед відібраних і обчислити її математичне сподівання $M(X)$ та ймовірність події $X < 2$.

22. В урні знаходиться 4 білих та 5 зелених куль. Навмання виймають три кулі. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X – числа появ зеленої кулі та обчислити її середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

23. П'ять приладів перевіряють на надійність. Кожний наступний прилад підлягає перевірці лише тоді, коли попередній перевірений прилад виявиться ненадійним. Ймовірність того, що прилад витримає перевірку на надійність, однакова для всіх приладів і дорівнює 0,8. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа перевірених приладів і обчислити її математичне сподівання $M(X)$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ та ймовірність події $X \geq 3$.

24. В партії з 12 деталей є 9 стандартних. Навмання відібрано 4 деталі. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа

нестандартних деталей серед відібраних і обчислити її математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ та ймовірність події $X \geq 2$.

25. Стрілець, маючи 3 патрони, стріляє до першого влучення в ціль. Ймовірність влучення в ціль при кожному пострілі дорівнює 0,6. Знайти закон розподілу та функцію розподілу випадкової величини X – числа використаних патронів і обчислити її математичне сподівання $M(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

Завдання 43. Типові закони розподілу випадкових величин

Знайти ймовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал (α, β) , якщо вона розподілена: а) рівномірно на відрізку $[a, b]$; б) за нормальним законом і має математичне сподівання a і середнє квадратичне відхилення α ; в) за показниковим законом і має математичне сподівання b .

Варіант	a	b	α	β
1	1	5	2	4
2	3	6	4	6
3	10	13	11	12
4	5	8	6	7
5	3	9	4	8
6	4	10	6	9
7	2	7	3	5
8	7	10	8	10
9	1	6	2	4
10	5	9	6	8

11	10	15	11	14
12	7	13	8	11
13	3	9	4	7
14	6	11	8	10
15	1	9	3	7
16	2	8	4	7
17	5	10	6	9
18	3	8	5	7
19	5	9	4	8
20	6	12	9	11
21	3	10	5	9
22	1	7	3	6
23	7	15	9	14
24	6	16	8	12
25	1	7	3	6

Рекомендована література

1. Мацкул В.М. Вища математика для економістів.: Підручник.- Одеса: ОНЕУ, 2018.- 472с.
2. Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. – К. : Вид. центр “Академія”, 2003.
3. Вища математика у прикладах і задачах для економістів [Електронний ресурс] : навч. посіб. / А. М. Алілуйко, Н. В.

Дзюбановська, О. Ф. Лесик [та ін.]. - Тернопіль : ТНЕУ, 2017. - 148 с..

4. Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи і моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2007.
5. Вища математика для менеджерів : підручник / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – 2-ге вид., перероб. та допов. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 341 с.
6. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. За заг. ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2000.
7. Пістунів І.М., Турчанінова І.Ю. ПЗ4 Теорія ймовірності та математична статистика для економістів. З елементами електронних таблиць: Навч. Посібн. Дніпро: НТУ «ДП», 2023. 174 с. Режим доступу: http://pistunovi.inf.ua/TU_ma_MC2.pdf