МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ БУДІВНИЦТВА І ТРАНСПОРТУ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ В ТРАНСПОРТНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Методичні рекомендації для студентів спеціальності «Транспортні технології»

КРОПИВНИЦЬКИЙ – 2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ БУДІВНИЦТВА І ТРАНСПОРТУ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ В ТРАНСПОРТНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Методичні рекомендації для студентів спеціальності «Транспортні технології»

Затверджено
На засіданні кафедри
вищої математики та фізики
Протокол №9 від 13.04.2023

КРОПИВНИЦЬКИЙ – 2023

Методи прикладної математики в транспортних технологіях. Елементи математичної логіки. Методичні рекомендації для студентів спеціальності «Транспортні технології» / Філімоніхіна І.І. – Кропивницький: ЦНТУ, 2023 р. – 26 с.

Посібник містить основні відомості з розділу дискретної математики, що стосується математичної логіки: висловлювання, логічні операції, основні схеми правильних міркувань, структура і види теорем; питання для самоконтролю; індивідуальні завдання.

Орієнтовано на студентів технічних спеціальностей.

Зміст

1. Висловлювання

Математична логіка – це алгебра висловлювань, яка дає простий логічний апарат і відповідну символіку.

Свої судження і висновки в повсякденному житті люди передають за допомогою речень. Особливу роль відіграють речення стверджувальні і розповідні, які несуть інформацію і відносно яких можна поставити питання істинне воно чи хибне.

Приклад 1

1) числа *9* і *37* взаємно-прості;
2) Архімед – англійський математик.

Можна стверджувати, що 1) є істинним висловлюванням, а 2) – хибним.

Терміни *„висловлювання”*, *„істинне висловлювання”*, *„хибне висловлювання”* належать до неозначуваних понять.

Висловлювання вивчають тільки з точки зору того, істинні вони чи хибні, зовсім не цікавлячись їхнім конкретним змістом.

Висловлювання – це розповідне речення, про яке можна сказати істинне воно чи хибне. Логічні значення висловлювань – 1 (істина) або 0(неправда).

Приклад 2

1. $2\times2=4$.
2. $2<3$.
3. $x<2, x\in\mathbb{R}$
4. Площа відрізка менша довжини куба.
5. Чи є $x=3$ коренем рівняння $x^2+3x-2=0$?
6. Менше один є два.
7. Слава українським студентам!
8. 3<9.

Висловлюваннями є речення 1, 2, 8.

4 – не є висловлюванням, бо про нього не можна сказати істинне воно або хибне (за відсутністю змісту).

3 – не є висловлюванням, бо в ньому є змінна, і через неї це речення має властивість перетворюватись в висловлювання при фіксації змінної, якщо $x= -1$, то висловлювання 3 – істинне висловлювання, якщо $x=3$, то висловлювання 3 – хибне висловлювання.

Речення 5, 7 –не є висловлюваннями, бо не є розповідними реченнями.

Речення 6 – не висловлювання, бо відсутній зміст розповідного речення.

Отже, висловлювання можуть бути утворені за допомогою слів або символів, але далеко не кожний набір слів або символів є висловлюванням.

Висловлювання позначають буквами латинського алфавіту: *A, B, C....*

$A\equiv\{6<7\}$,

$B\equiv\{5-\textit{просте число}\}$.

Знак $\equiv$ заміняє слова „є висловлюванням”.

Висловлювання ділять на <u>**прості**</u> та <u>**складені**</u>.

Елементарним висловлюванням називається таке висловлювання, що будь-яка його частина вже не є висловлюванням.

Висловлювання: $A \equiv$ „Вісім – парне число”
$B \equiv$ „Одинадцять ділиться на *3*”
$C \equiv$ „Київ – столиця України”
Висловлювання *A, C* – істинні, їм приписується значення 1, $A \equiv 1$, $C \equiv 1$.
Висловлювання *B* – хибне; $B \equiv 0$, приписують значення рівне 0.

Приклад 3. Висловлювання $A \equiv "6<7"$; і $B \equiv$ „число 6 – просте ” – простi.
З висловлювань *A і B* можна утворювати наступні складені висловлювання:
$C \equiv$ „*6<7* або *6* – просте число”;
$D \equiv$ „*6<7* і число *6* – просте ”;
$E \equiv$ „*6<7* тоді і тільки тоді, коли число *6* - просте”;
$F \equiv$ „якщо *6<7*, то число *6* - просте ”.

Зауваження**:** нові висловлювання можна утворювати з таких висловлювань, які між собою ніяк не зв’язані за змістом.

Наприклад: $M \equiv$ „Якщо слон – комаха, то Антарктида покрита тропічними лісами”.
(висловлювання *M* – складене за допомогою логічної зв’язки – „якщо..., то...” з двох висловлювань, які між собою аж ніяк не зв’язані).

З простих висловлювань при допомозі так званих логічних зв’язок (союзів „і”, „або”, слів: „якщо..., то...”, „тоді і тільки тоді, коли...”) можна утворювати нові висловлювання які називаються складеними.

В математичній логіці істинність складеного висловлювання установлюється незалежно від істинності чи хибності простих висловлювань з яких вони складені, а на основі зв’язок за допомогою яких вони складені.

Контрольні запитання.

1. Що таке математична логіка?
2. Що називається висловлюванням? Наведіть приклади.
3. Яке висловлювання називається простим, складеним? Наведіть приклади.

Задачі для самостійного розвязування.

1. Серед наведених нижче речень вказати ті, які є висловлюваннями, і ті, що не є висловлюваннями:
1) Київ – столиця України;
2) студент Центральноукраїнського національного технічного університету;
3) Місяць – супутник Землі;
4) $x<0$;
5) число $\sqrt{5}$ – ірраціональне.

2. Серед наступних висловлювань вказати елементарні і складені, в складених висловлюваннях виділити граматичні звязки:
1) число 9 не ділиться на 3;
2) число 21 ділиться на 3 і на 7;
3) число 3 є дільником числа 27;
4) якщо число 15 ділиться на 5, то воно ділиться на 3;
5) число 18 ділиться на 9 тоді і тільки тоді, коли 9 ділиться на 3.

2. Основні логічні операції

Логічні операції застосовують для об’єднання простих висловлювань у складені.

Логічні операції над висловлюваннями: заперечення (унарна операція), коньюнкція, дизьюнкція, імплікація, еквівалентність (бінарні операції).

Запереченням висловлювання x називається висловлювання $\neg x$, яке істинне, якщо x *хибне,* і хибне, якщо x істинне. Читається «не x» або «невірно, що x».

Коньюнкцією висловлювань x і y називається висловлювання $x \wedge y$, яке істинне, коли x і y істинні, і хибне, коли хоча б одне з них хибне. Читається «x і y».

Дизьюнкцією висловлювань х і у називається висловлювання $x \vee y$, яке істинне, якщо хоча б одне з висловлювань x або y істинне, і хибне, якщо вони обидва хибні. Читається «x або y».

Імплікацією висловлювань *х і у* називається висловлювання $x \rightarrow y$, яке хибне, якщо x істинне, а y хибне, і істинне в усіх інших випадках.Читається «з x *випливає* y» або «якщо x, то y».

Еквівалентністю висловлювань x и y називається висловлювання $x \leftrightarrow y$, яке істинне, якщо обидва висловлювання x і y одночасно істинні або хибні, і хибне в усіх інших випадках. Читається «для того, щоб x**,** необхідно і достататньо, щоб y» або «x тоді і тільки тоді, коли y».

Значення логічної операції можна описати з допомогою таблиці, звязуючої значення операндів і операції. Така таблиця називається таблицею істинності.

Таблица істинності для логічних операцій:

x	y	$\neg x$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Застосовуючи логічні операції, з елементарних висловлювань можна утворити інші висловлювання. Наприклад, нехай x, y, z - висловлювання, тоді $(x \wedge y) \vee z,\quad (x \vee \neg y) \wedge z,\quad (\neg x \wedge y) \vee \neg(z \vee y)$ - також висловлювання.

Такі вирази називаються формулами алгебри висловлювань.

Порядок виконання операцій у формулі визначається за допомогою дужок. Задля зменшення їх кількості опускають зовнішні дужки й запроваджують такий порядок (пріоритет) виконання операцій у разі відсутності дужок: ¬, ∧, ∨, →, ~ (за спаданням). Часто в формулах алгебри висловлювань випускають знак кон'юнкції ∧ і замість $a \wedge b$ записують ab.

Для визначення порядку виконання операцій у формулі пріоритету операцій не достатньо. Потрібно ще вказувати для однакових операцій, групуються вони зліва направо чи справа наліво. Наприклад, операції ∧ та ∨ групуються зліва направо, а операція → – справа наліво. Тому для формули $a \wedge b \wedge c$ дужки розставляємо таким чином: $((a \wedge b) \wedge c)$, для формули $a \rightarrow b \rightarrow a$ дужки розставляємо так: $(a \to (b \to a))$.

Зазначимо, що для операцій $\wedge$ та $\vee$ порядок групування не є суттєвим, але для операції $\to$ він є важливим. Тому для формули $a \to b \to a$ при групуванні дужок справа наліво отримаємо формулу $(a \to (b \to a))$, яка не еквівалентна попередній формулі $(a \to (b \to a))$. Переконайтесь у цьому самостійно. Для операції еквівалентності групування не використовують.

Приклад. Розставити дужки у формулі: $a \to b \to \neg b \wedge a \to c \vee a \wedge \neg c$. Починаємо із пошуку операцій найвищого пріоритету й беремо відповідну підформулу в дужки.

Тут операцією з найвищим пріоритетом є заперечення. Воно зустрічається двічі. Отримуємо формулу $a \to b \to (\neg b) \wedge a \to c \vee a \wedge (\neg c)$. Наступна за пріоритетом операція – це $\wedge$. Така операція має два аргументи. Беремо відповідні підформули в дужки: $a \to b \to ((\neg b) \wedge a) \to c \vee (a \wedge (\neg c))$. Далі виокремлюємо підформулу з операцією $\vee$. Дістали $a \to b \to ((\neg b) \wedge a) \to (c \vee (a \wedge (\neg c)))$.

Наступна за пріоритетом операція – імплікація $\to$. Однак тут треба врахувати порядок групування, тому отримуємо остаточний результат: $(a \to (b \to (((\neg b) \wedge a) \to (c \vee (a \wedge (\neg c))))))$.

Щоб мати повну картину значень істинності деякої логічної формули, складають її таблицю істинності для всіх можливих наборів. Для цього виписують усі послідовні часткові формули, з яких складається формула, і для них знаходять таблиці істинності на всіх наборах, поки не дійдуть до результуючої формули.

Розглянемо це на прикладі висловлювання $(\neg x \wedge y) \vee \neg(z \vee y)$.

x	y	z	$\neg x$	$\neg x \wedge y$	$z \vee y$	$\neg(z \vee y)$	$(\neg x \wedge y) \vee \neg(z \vee y)$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0

Отже, дане висловлювання істинне на таких наборах значень; (0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1). (1, 0, 0).

Контрольні запитання.

1. Який порядок виконання бінарних логічних операцій?
2. За яких умов кон’юнкція є істинною?
3. За яких умов є істинною диз’юнкція?
4. За яких умов є хибною імплікація?
5. За яких умов є істинною еквіваленція?
6. Що характерне для операції заперечення?

7. Як перевірити що логічна формула вірна?

Задачі для самостійного розвязування

1. Серед наступних речень виділити висловлювання, визначити, істинні вони чи хибні:
   1) річка Дніпро впадає в Чорне море;
   2) пийте апельсиновий сік;
   3) всі люди – брати;
   4) математична логіка – захоплююча наука;
   5) $5 < 4$;
   6) $x^2 - 5x + 9$;
   7) $x^2 - 5x + 9 = 0$;
   8) для всіх натуральних чисел $x + y = y + x$.
2. Чи є висловлюваннями наступні твердження, встановити, істинні вони чи хибні:
   1) сума коренів будь-якого приведеного квадратного рівняння дорівнює вільному члену;
   2) сума коренів приведеного квадратного рівняння дорівнює вільному члену;
   3) існує приведене квадратне рівняння, сума коренів якого дорівнює вільному члену.

3. Нехай x – висловлювання «Студент Сидоров вивчає інформатику», y – висловлювання «Студент Сидоров встигає з математичної логіки». Записати словесно наступні висловлювання:

1) $x \wedge \overline{y}$;
2) $\overline{x} \vee y$;
3) $\overline{x \wedge y}$.

4. Позначити елементарні висловлювання буквами і виразити наступні висловлювання за допомогою символів алгебри логіки:

1) $\sqrt{4} = 2$ або $\sqrt{4} = -2$;
2) якщо число 24 ділиться на 3 і 4, то воно ділиться на 12;
3) 18 кратне 3 і 15 не кратне 3;
4) 18 кратне 3 і 15 кратне 3;
5) число 15 – двозначне і кратне 3 або 5.

5. Нехай *x і y* означають елементарні висловлювання: *x* – «я навчаюсь в ЦНТУ; *y* – «я люблю математичну логіку. Прочитати наступні складені висловлювання:
   1) $\neg(\neg x)$; 2) $x \wedge y$; 3) $x \wedge \neg y$; 4) $\neg x \wedge \neg y$; 5) $\neg(x \wedge y)$.
6. Занумерувати послідовність виконання операцій у формулі з урахуванням їх пріоритетів.
   1) $(a \to \neg b) \vee (\neg a \sim c) \wedge b \vee (c \to \neg(a \sim b))$;
   2) $(a \to \neg((b \vee c) \wedge \neg a)) \to (\neg c \vee b) \wedge a \sim \neg(a \to \neg b)$;
   3) $(\neg a \to \neg b) \wedge (a \vee \neg c \vee (a \sim \neg b) \wedge c)$;
   4) $((\neg b \sim (c \vee \neg a \wedge \neg b)) \to (\neg a \wedge \neg(c \sim b))) \wedge a$.

3. Необхідні і достатні умови

Якщо з твердження *A* випливає твердження *B*, то говорять, що *B* – **необхідна умова** для *A*, а *A* – **достатня** для *B*.

Іншими словами, висловлювання *B* називається необхідною умовою для *A*, якщо воно логічно випливає з *A*. Висловлювання *A* називається достатньою умовою для *B,* якщо *B* з нього випливає.

Якщо твердження *A* і *B* рівнозначні, то говорять, *A* – **необхідна і достатня умова** для *B*, і навпаки.

Приклад 1.

В геометрії доведено, що з твердження «кути вертикальні» випливає твердження «кути рівні». Тому згідно даному означенню можна сказати, що рівність кутів – необхідна умова для того, щоб кути були вертикальні, а вертикальність кутів є достатньою умовою для їх рівності. У зв‘язку з цим твердження «якщо кути вертикальні, то вони рівні» можна сформулювати інакше: для того, щоб кути були вертикальні, необхідно, щоб вони були рівні; для того, щоб кути були рівні, достатньо, щоб вони були вертикальні.

Приклад 2.

Твердження *X:* «Петро отримує стипендію». Необхідна *умова P:* «Петро — студент». Достатня *умова Q:* «Петро вчиться в вузі без трійок».

З того, що Петро — студент, ще не випливає, що він отримує стипендію. Але ця умова необхідна, тобто якщо Петро не студент, то він напевне не отримує стипендію.

Якщо ж Петро вчиться в вузі без трійок, то він напевне отримує стипендію. Тим не менш, студент Петро може отримувати стипендію (у вигляді допомоги), якщо він вчиться з трійками, але, наприклад, має хронічне захворювання.

Приклад 3.

Необхідною і достатньою умовою для оборотності матриці *M* є наявність у *M* ненульового визначника.

В логіці слова необхідно і достатньо відповідають імплікаційним зв'язкам між твердженнями. Вимога необхідності і достатності одного твердження для іншого значить, що перше твердження є істинним тоді і тільки тоді, коли істинне друге твердження.

Необхідна умова для твердження має бути виконана, щоб твердження було істинним. Формально, твердження *P* є необхідною умовою для *Q*, якщо *Q* має на увазі *P*.

Приклад 4.

Для цілих чисел більших за двійку, необхідно бути непарними, щоб бути простими, бо двійка єдине ціле число, яке одночасно парне і просте.

Достатня умова це така, виконання якої тягне за собою істинність твердження. Формально, твердження *P* - достатня умова для твердження *Q*, якщо *P* має на увазі *Q*.

Подільності числа на 4 достатньо для його парності, а подільність на 2 є необхідною і достатньою умовою.

Приклад 5.

Необхідною умовою подільності цілого числа на 2 є те, щоб число, записане в десятковій системі числення, не закінчувалося цифрою 7. Умова ця необхідна, але не достатня, оскільки, наприклад, число 23 не закінчується цифрою 7 і все-таки не ділиться на 2. Достатньою умовою подільності числа на 2 є те, щоб воно закінчінчувалося цифрою 0. Ця умова достатня, але не необхідна, оскільки число 38 не закінчується цифрою 0 і все-таки ділиться на 2. Ознака подільності, що зазвичай вживається, на 2 (щоб число ділилося на 2, необхідно і достатньо щоб остання його цифра ділилася на 2) є прикладом умови одночасно необхідної і достатньої. Часто вираз «необхідно і достатньо» замінюється виразом «тоді і лише тоді» або ж виразом «в тому і лише в тому разі».

Необхідні і достатні умови мають велику пізнавальную цінність. У складних математичних проблемах пошук зручних для користування необхідних і достатніх умов буває інколи надзвичайно важким. У таких випадках достатні умови прагнуть зробити, можливо, ширшими, тобто охоплюють можливе більше число випадків, в яких факт, що цікавить нас, все ще має місце, а необхідні умови — можливо вужчими, тобто охоплюють можливе менше число зайвих випадків, в яких факт, що вивчається, вже не має місця. Таким чином, достатні умови поступово зближуються з необхідними. Типовий класичний приклад такого роду досліджень є дослідженнями про умови збіжності рядів.

Контрольні запитання.

1.Що таке необхідна умова? Навести приклади.
2.Що таке достатня умова? Навести приклади.
3. В якому випадку умови будуть необхідними і достатніми?

Задачі для самостійного розвязування

В даних задачах вставити в місцях пропуску «необхідна» або «достатня»:

1. «Якщо ви отримаєте щеплення від холери, то ви будете в безпеці в тропічних країнах».

   Тут твердження полягає в тому, що отримання щеплення від холери є __________умовою безпеки в тропічних країнах.
2. «Ви повинні отримати щеплення від холери, якщо ви збиратєеся отримати візу в Індію».

   Тут твердження полягає в тому, що отримання щеплення від холери є __________ умовою отримання візи в Індію.
3. «Багато людей з багатими друзями не досягают успіху в національній політиці. Але ніхто не досягає успіху в національній політиці без багатих друзів».

   Тут твердження полягає в тому, що наявність багатих друзів - це __________ умова (але не умова __________) для успіху в національній політиці.
4. «Хтось холостяк, якщо, і тільки якщо, він неодружений чоловік».

   Тут твердження полягає в тому, що бути неодруженим чоловіком є __________умовою для того, щоб бути холостяком.

5. «Наполеглива праця гарантує успіх».

Тут твердження полягає в тому, що наполеглива праця є __________ умовою успіху.

6 . «Підсудна особа винна у вбивстві першого ступеня лише в тому випадку, якщо вона заздалегідь спланувала злочин».

Тут твердження полягає в тому, что планування злочину заздалегідь є __________ умовою винності у вбивстві першого ступеня.

7. «Договір є обязковим лише тоді, коли немає шахрайства».

Тут твердження полягає в тому, что відсутність шахрайства є __________ умовою, щоб договір був обовязковим.

8. «Якщо не ризикувати, то нічого не отримаєш».

Тут твердження полягає в тому, что ризикнути - це __________ умова для отримання чогось.

4. Структура та види теорем

Суттєві властивості об'єкта утворюють зміст поняття про цей об'єкт. Частина цих властивостей включається в означення поняття. Щоб мати більш повне уявлення про об'єкт, вивчають і інші його властивості.

Властивості основних (первісних) понять розкривається в **аксіомах** – твердженнях, які приймаються без доведення.

Наприклад, властивості основних понять геометрії: точка, пряма, площини включені в аксіоми.

Взагалі система аксіом будь-якої теорії, розкриваючи властивості основних понять, дає, по суті, їх означення, які називаються *аксіоматичними.*

Властивості, які доводяться, найчастіше називаються **теоремами,** іноді наслідками, *ознаками.* В алгебрі – *формулами, тотожностями, правилами*.

Тому, **теорема** – це висловлювання про те, що з властивості A випливає властивість B. Істинність цього висловлювання встановлюється шляхом доведення.

В якому б виді не була сформульована теорема, в ній завжди виділяється **умова** A (що задано) і **висновок** B (що треба довести).

Розрізняють пряму, обернену, протилежну і обернену до протилежної теореми.

1. $A \Rightarrow B$ – пряма теорема,
2. $B \Rightarrow A$ – обернена теорема,
3. $\neg A \Rightarrow \neg B$ - протилежна теорема,
4. $\neg B \Rightarrow \neg A$ - обернена до протилежної теорема.

Пряма і обернена до протилежної теореми є рівносильними.

Приклад.

«Якщо кути вертикальні, то вони рівні» – пряма теорема.

A: «кути вертикальні», B: «кути рівні».

$$A \Rightarrow B \text{ – пряма теорема.}$$

Обернена: $B \Rightarrow A$: «Якщо кути рівні, то вони вертикальні».

Протилежна: $\neg A \Rightarrow \neg B$: «Якщо кути не вертикальні, то вони не рівні».

Обернена до протилежної: $\neg B \Rightarrow \neg A$: «Якщо кути не рівні, то вони не вертикальні».

Існує зв'язок між названими видами теорем.

Встановлено, що теореми $A \Rightarrow B$ і $\neg B \Rightarrow \neg A$ - рівносильні, тобто $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$. Отриману рівносильність називають законом контрапозиції.

Контрольні запитання.

1. Що таке аксіома?
2. Зі скількох частин складаються формулювання всіх теорем?
3. Які існують види теорем?
4. Як називають дві теореми, кожну з яких можна отримати з іншої, помінявши місцями умову і висновок?
5. Який існує зв'язок між видами теорем?
6. Чи завжди можна отримати істинне твердження міняючи місцями умову й висновок теореми?

Задачі для самостійного розвязування

1. Виділіть умови і висновки в кожній з теорем:
1) якщо в трикутнику всі сторони рівні, то і всі кути рівні;
2) сума двох парних чисел – парне число;
3) якщо число кратне 3 і 4, то воно кратне 12;
4) для того, щоб різниця ділилась на дане число, достатньо, щоб зменшуване і від'ємник ділилось на це число;
5) для того, щоб різниця натуральних чисел a і b була натуральним числом, необхідно і достатньо, щоб a > b.

2. Дана теорема: «Для того, щоб чотирикутник був паралелограмом, необхідно, щоб його протилежні сторони були рівні». Виділіть в теоремі умову і висновок та переформулюйте її, вживаючи слово:
1) випливає; 2) будь-який; 3) достатньо.

3. Які з теорем рівносильні теоремі «У будь-якому прямокутнику діагоналі рівні»:
1) якщо чотирикутник – прямокутник, то його діагоналі рівні;
2) якщо діагоналі в чотирикутнику не рівні, то цей чотирикутник не є прямокутником;
3) якщо діагоналі в чотирикутнику рівні, то цей чотирикутник – прямокутник;
4) для того, щоб діагоналі в чотирикутнику були рівні, достатньо, щоб цей чотирикутник був прямокутником?

4. Чи є наступні пари теорем, обернені одна одній:
1) Якщо чотирикутник – квадрат, то в ньому є прямий кут. Для того, щоб чотирикутник був квадратом, достатньо, щоб в ньому був прямий кут;
2) Для того, щоб число було натуральним, необхідно, щоб воно було додатнім. Якщо число натуральне, то воно додатне.

5. Сформулюйте обернену теорему, протилежну даній, а також обернену протилежній; встановіть, які з них хибні:
1) якщо запис числа закінчується нулем, то число ділиться на 5;

2) у ромбі діагоналі взаємно перпендикулярні.
6. Сформулюйте теорему, обернену даній, і встановіть, чи можливо дану теорему і її обернену об’єднати в одну:
1) якщо кути суміжні, то їх сума дорівнює 180°;
2) якщо два кути трикутника рівні, то і сторони, що лежать проти них, теж рівні.

5. Найпростіші схеми правильних міркувань

Спосіб зв’язку аргументів від умови до висновку твердження називається ***методом доведення***. Методи доведення розрізняють *прямі й непрямі.*

Прийоми прямого доведення:
1) Прийом перетворення умови твердження (синтетичний);
2) Прийом перетворення умови висновку твердження: відшукання достатніх обґрунтувань справедливості висновку (висхідний аналіз);
3) Відшукання необхідних ознак справедливості твердження з наступною перевіркою оберненості міркувань (спадний аналіз);
4) Прийом послідовного перетворення то умови, то висновку твердження;
5) Метод індукції.

Прийоми непрямого доведення:
1) Метод зведення до абсурда;
2)Метод від супротивного (істинність доводжуваного твердження встановлюється шляхом спростування суперечливого йому твердження);

5.1. Прийоми прямого доведення.

1) ***Прийом перетворення умови (синтетичний)***: з умови виводять наслідок B_1, потім (з B_1) – B_2 і далі, допоки наслідком не з’явиться висновок теореми. Іншими словами, у процесі доведення будується ланцюжок:
$У \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_n \rightarrow B$, де $У$ – умова теореми, B_n – проміжні наслідки, а B – висновок теореми. Отже, суть розглядуваного прийому можна схематично представити наступним чином: $T,\ У \rightarrow B$, де T – припущення певної теорії, а $У$ і B – відповідні умова і висновок доводжуваного положення.
2) ***Прийом перетворення висновку (висхідний аналіз)***: процес міркувань за методом висхідного аналізу можна зобразити наступною схемою:
$B \leftarrow B_1 \leftarrow B_2 \leftarrow B_n \leftarrow У$
Для доведення висновку підбирають твердження B_1, що є достатньою умовою для висновку, а потім підбирають твердження B_2, достатнє для B_1, і далі за тією ж схемою, поки не з’ясується, що дані є достатніми умовами для твердження B_n з ланцюжку тверджень, достатніх для висновку доводжуваного припущення. Тобто, суть методу полягає у доведенні того, що умова теореми є достатньою для її висновку.

3) Прийом перетворення висновку (спадний аналіз) полягає у наступному: виходячи із припущення, що висновок доводжуваного твердження є правильним, отримують наслідки B_1, B_2 і далі до тих пір, поки не приходять до до висновку, який може слугувати вихідним положенням у ланцюжку зворотних міркувань. Отже, цим шляхом знаходять умову, *необхідну* для висновку доводжуваного положення. На відміну від ростучого аналізу даний вид аналізу не є доказовим. Встановлення, що знайдене вірне співвідношення є й достатньою умовою для доводжуваного твердження, відбувається за допомогою відповідного йому виду синтезу. Спадний аналіз застосовується при розв'язуванні задач на побудову: припускаючи, що задача розв'язана і потрібна фігура побудова, шляхом різних перетворень цієї фігури відшукують таку фігуру, яку можна побудувати і яка визначала б побудову шуканої фігури. Відомо, що компонентом розв'язання задачі на побудову є доведення, яке і має на меті обґрунтувати, що побудована фігура задовольняє задані вимоги.

4) Прийом послідовного (почергового) перетворення умови й висновку твердження достатньо часто застосовується при вивченні шкільного курсу математики, оскільки реальний процес доведення певних теоретичних положень не здійснюється тільки одним шляхом: аналітичному чи синтетичному. Він розгортається як аналітично, так і синтетично.

5) Метод індукції

Термін «індукція» походить від латинського induktio – наведення. У математиці використовуються повна й неповна індукції.

Неповна індукція представляє собою таке міркування, при якому на основі того, що деякі об‘єкти сукупності мають певні властивості, робиться висновок про те, що ці властивості притаманні всім об‘єктам цієї сукупності. Висновки, отримані при неповній індукції, можуть бути як істинними, так і хибними.

Так висновок про те, що кожне число, запис якого закінчується цифрою 5, ділиться на 5, істинний. А твердження «при будь-якому натуральному числі n значення виразу n^2+n+41 є просте число» хибне. Дійсно, якщо $n=41$, то отримаємо значення $43\cdot 41$, тобто даний вираз є складеним числом.

Доведення *методом повної індукції* полягає в розгляді всіх окремих випадків (чисел, фігур тощо), при яких теорема правильна. Кількість таких випадків повинна бути скінченною і невеликою за кількістю.

Приклад. Розглянемо таку теорему:

Теорема. Значення виразу $c = a^2 + b^2$, $(a, b \in Z)$ є число, що при діленні на 4 не має в остачі 3.

Доведення теореми проведемо, розглядаючи три випадки:

1) обидва числа парні;

2) обидва числа непарні;

3) одне число парне, друге – непарне.

1) Нехай a, b − парні, тобто $a = 2m$, $b = 2n$, $m, n \in Z$. Дістанемо: $c = (2m)^2 + (2n)^2 = 4m^2 + 4n^2 = 4\cdot(m^2 + n^2)$, тобто $c \vdots 4$, остача 0.

2) Нехай a, b – непарні числа, тобто $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$, $m, n \in Z$. Маємо $c = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1= 4(m^2 + n^2 + m + n) + 2$, а це означає, що при діленні c на 4 дістанемо остачу 2, а не 3.

Випадок 3) спробуйте розглянути самостійно.

Для індуктивного переходу від твердження, перевіреного на скінченній підмножині до аналогічного твердження для всієї нескінченної множини застосовують *метод математичної індукції.* Він базується на принципі математичної індукції.

Принцип математичної індукції.

Якщо твердження, у формулюванні якого є натуральне число n, істинне при $n=1$, та з справедливості даного твердження при $n=k$ випливає його справедливість при $n=k+1$, то твердження є істинним для всіх $n\in\mathbb{N}$.

Доведення методом математичної індукції проводиться за такою схемою.

1) Перевіряють твердження при $n=1$. Цю частину доведення називають *базою індукції.*
2) Здійснюють індуктивний перехід, тобто доводять справедливість твердження при $n=k+1$ в припушенні справедливості при $n=k$.

Приклад. Довести, що $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

1.Перевіримо, чи це твердження справджується для першого значення $n=1$, підставивши його у вираз:

$$2-1=1^2$$

2.Припустімо, що це твердження справджується для $n=k$, так що (використовуючи вираз, даний в умові задачі, тільки замінюючи n на k :

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2 \qquad (1)$$

3.Потрібно показати, що це справджується для $n=k+1$, так що (використовуючи вираз, даний в умові задачі, тільки замінюючи n на $k+1$):

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2(k+1)-1)=(k+1)^2 \qquad (2)$$

4.Переходимо до розрахункової частини доведення. Почнемо з лівої частини (2) й продовжимо з використанням припущення (1).

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2(k+1)-1)=k^2+(2(k+1)-1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

5.2. Непрямі доведення.

1) ***Зведення до абсурда -*** непряме дедуктивне міркування, в якому хибність деякого висловлювання обґрунтовують на підставі того, що з цього висловлювання за допомогою інших міркувань виводять протиріччя. Цей метод полягає в тому, що в теоремі $A\Rightarrow B$ припускають, що правильним буде $\neg B$. Якщо в результаті цього припущення приходять до неправильного висновку, абсурду, то роблять висновок, що наслідок *B* теореми $A\Rightarrow B$ правильний.

   Приклад. Розглянемо теорему:

   Теорема. Якщо дві різні прямі *a* і *b* паралельні третій прямій *c*, то вони паралельні між собою.

   Припустимо $\neg B$, тобто *a* і *b* не паралельні. Тоді вони перетинаються в якійсь точці *К*, яка не належить *c*. Дістанемо, що через точку *К* поза прямою *c* можна провести дві прямі *a* і *b,* які паралельні *c*, а це суперечить аксіомі паралельності, тобто є хибним твердженням. Отже, правильним твердженням є *B*.
2) ***Метод від супротивного -***— непряме дедуктивне міркування, в якому істинність деякого висловлювання обґрунтовують на підставі того, що із заперечення цього висловлювання за допомогою інших міркувань виводять протиріччя.

   Цей спосіб доведення складається з таких етапів.

1. Припускають протилежне тому, що стверджується теоремою.

2. На основі припущення, спираючись на аксіоми і вже доведені теореми, роблять висновки.
3. Знаходять, у чому цей висновок суперечить умові, якійсь аксіомі або доведеній раніше теоремі.
4. Роблять висновок, що зроблене припущення неправильне, а тому правильне твердження теореми.

Особливо часто використовують цей спосіб доведення, коли треба довести єдиність якого-небудь об'єкта. (Припускають протилежне, тобто що таких об'єктів хоча б два.)

Приклад. Довести, що в трикутнику може бути тільки один тупий кут.

Доведення:

1) Припустимо, що в трикутнику є два тупих кути.
2) Тоді сума кутів трикутника більша за 180°, тому що міра тупого кута більша за 90°.
3) Зроблений висновок суперечить теоремі про суму кутів трикутника.
4) Отже, наше припущення неправильне, а правильне те, що треба було довести.

Якщо в процесі доведення від супротивного не суперечності, то досліджуване логічне висловлювання істинне.

Приклад. Розглянемо теорему:

Теорема. Довести, що коли *ab*– непарне число, то обидва множники *a* і *b* – непарні цілі числа.

Позначимо *A*: «добуток *ab*– непарне число», *T*: «*a* – непарне число», *S*: «*b* – непарне число». Тоді теорема скорочено запишеться так:
$A \Rightarrow S \wedge T$, або $A \Rightarrow B$, де B - «$S \wedge T$».

Припустимо, що $\neg B = \neg(S \wedge T) = \neg S \vee \neg T$, тобто один із множників *a* або *b* є парним числом. Нехай, наприклад, *a* – парне, тобто $a = 2m, m \in Z$. Тоді $ab = 2mb$ – парне число, тоді дістали $\neg A$. Таким чином довели теорему $\neg B \Rightarrow \neg A$, а цим самим і дану теорему $A \Rightarrow B$.

Чи можна довести методом від супротивного будь-яку теорему?

Так. Кожне пряме доведення теореми можна перетворити в доведення способом від супротивного. Робиться це дуже просто: припускаємо "супротивне", а потім повторюємо "пряме" доведення. В результаті отримуємо суперечність, яка і доводить теорему. Інша справа, чи потрібно будь- яку теорему доводити методом від супротивного? Звісно, ні.

Щоб впевнитися в тому, що твердження "Якщо *A*, то *B*" - хибне, достатньо привести хоча б один випадок, який демонструє, що *A* виконується, а *B* - ні. Ця демонстрація і називається контрприкладом.

Цей спосіб можна використовувати при доведенні від супротивного теорем існування. Наприклад, існує об'єкт, якому притаманна дана властивість *P*. У цьому випадку заперечення звучить таким чином: "який би не був об'єкт, для нього властивість *P* не виконується". Якщо після цього ми приведемо контрприклад, то цим спростуємо заперечення і доведемо потрібне.

Контрольні запитання.

1. Як називається метод доведення теореми коли ми припускаємо, що висновок теореми неправильний?
2. Які основні види прямих доведень?
3. Які основні види непрямих доведень?
4. Що таке повна індукція?
5. Що відбудеться, якщо доводити методом від супротивного хибне твердження?
6. В якому випадку при доведенні від супротивного можна використовувати спосіб контрприкладу?

Задачі для самостійного розвязування

1) Доведіть нерівність $a^2+b^2+c^2+3$, використовуючи прямий метод доведення і метод доведення від супротивного.

2)Довести теорему, обернену даній, методом від супротивного:

Якщо дискримінант додатний, то квадратне рівняння має дійсні та різні корені.

3)Довести методом математичної індукції твердження:

а) $1+3+5+\ldots+\ 2(n-1)=n^2\ \forall n\in\mathbb{N}$;

б) $(1+2^{3n-2}+4^{3n-2}) \vdots 7 \quad \forall n\in\mathbb{N}$;

в) $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\ldots a_n^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)$.

6. Формули алгебри логіки

Формула, яка є істинною для всіх значень змінних, називається *тотожньо істинною(загальнозначущою)* або *тавтологією*.

Формула, яка є хибною для всіх значень змінних, називається *тотожньо хибною(суперечливою)* або *протиріччям*.

Формула, яка є істинною хоча б на одному наборі змінних і не є тавтологією, називається *виконуваною (несуперечливою).*

Тавтології ще називають логічними законами, або законами алгебри висловлень.

Способи доведення логічних законів:

1) Складання таблиць істинності;
2) Безпосередньо на підставі означення логічних операцій упевнитися, що формула не може набувати значення нуль;
3) Тотожні перетворення логічних формул.

Основні логічні закони

7. Закон тотожності (якщо х, то х): $X\to X$.
8. Закон суперечності (не можуть одночасно бути істинними висловлення X та $\overline{X}$: $\overline{X\wedge\overline{X}}$.
9. Закон вилучення третього (з двох висловлювань X та $\overline{X}$ принаймні одне істинне): $X\vee\overline{X}$.
10. Закон подвійного заперечення: $\overline{\overline{X}}=X$.
11. Формули (закони) де Моргана: $\overline{X\wedge Y}=\overline{X}\vee\overline{Y}$, $\overline{X\vee Y}=\overline{X}\wedge\overline{Y}$.

Логічні операції можна виразити через інші логічні операції:

1) $X \vee Y = \overline{\overline{X} \wedge \overline{Y}}$;

2) $X \wedge Y = \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}}$;

3) $X \rightarrow Y = \overline{X} \vee Y$;

4) $X \rightarrow Y = \overline{X \wedge \overline{Y}}$;

5) $X \leftrightarrow Y = (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$.

Іноді перевірку того, що певна формула є тавтологією, виконують за допомогою так званого способу відшукання контрприкладу (або методу від супротивного). Пояснимо його на прикладах.

Нехай потрібно перевірити, чи є тавтологією формула

$A = (((a \rightarrow \neg b) \wedge (b \rightarrow (a \wedge c))) \wedge (\neg c \rightarrow \neg a)) \rightarrow (a \vee \neg c)$.

Припустімо, що формула A не є тавтологією. Тоді принаймні на одному наборі значень формула A набуває значення 0. Спробуємо відшукати цей набір. Оскільки останньою операцією формули A є імплікація, то $a = 0$ і $c = 1$. Звідси $(a \rightarrow \neg b) = 1$ і $(\neg c \rightarrow \neg a) = 1$. Залишилось з’ясувати, чи може за цих умов вираз $(b \rightarrow (a \wedge c))$ дорівнювати одиниці. Відповідь позитивна. Отже, ми знайшли набір (0, 0, 1), на якому формула A набуває значення 0, тобто відшукали контрприклад, який свідчить, що формула A не є тавтологією.

У разі, коли при спробі відшукати контрприклад для певної формули A приходимо до суперечності, можемо стверджувати, що A — тавтологія. Наприклад, для формули

$B = (((a \rightarrow \neg b) \wedge (b \rightarrow (a \wedge c))) \wedge (\neg c \rightarrow \neg a)) \rightarrow (a \vee \neg b)$,

яка є дещо зміненим варіантом попередньої формули A, матимемо $a = 0$ і $b = 1$, тобто $(a \rightarrow \neg b) = 1$, $(\neg c \rightarrow \neg a) = 1$, однак $(b \rightarrow (a \wedge c)) = 0$, що суперечить припущенню $(b \rightarrow (a \wedge c)) = 1$. Отже, формула B — тавтологія.

Будь-якій формулі логіки висловлень можна поставити у відповідність деяке складне висловлення природної мови і навпаки, «правильні» складні речення можна записати у вигляді формули логіки висловлень. Аналіз складного речення необхідно починати з визначення такого факту: чи є воно скороченим варіантом більш розповсюдженого складного речення? Скорочений варіант слід замінити повним варіантом речення. Далі виділити прості речення та взяти їх в дужки, залишаючи поза дужками службові слова, що поєднують прості речення. Процес взяття у дужки повторюється доти, доки цілком усе складне речення не виявиться взятим у дужки. Після цього сполучники та звороти природної мови замінюються відповідними логічними зв'язками, а прості речення — атомарними формулами.

Приклад 1. Записати у вигляді формули логіки висловлень таке речення: *«Оскільки я ліг пізно спати, я проспав і через це не пішов на пару».*

Розв'язок. Виділимо прості речення у цьому складному реченні та візьмемо їх у дужки, залишаючи службові слова поза їх межами:

«(Оскільки (я ліг пізно спати), (я проспав)) і через це не (пішов на пару)».

Всі три речення зв'язані службовими словами, що виражають логічні відношення. Крім цього, перед третім простим реченням стоїть частка «*не*», що відповідає логічній операції «заперечення». Третє просте речення не є повним, оскільки розділяє спільний підмет «*я*» з другим простим реченням. Доповнимо третє речення відсутнім підметом і введемо атоми P, Q, S таким чином:

P — «Я ліг пізно спати»;
Q— «Я проспав»;
S — «Я пішов на пару».
Замінимо прості речення символами атомів, а службові слова — логічними зв'язками, одержимо формулу логіки висловлень:
$(P \to Q) \to \neg S$.

Приклад 2. Побудувати формулу і таблицю істинності для висловлень: *«Якщо студент не підготувався до іспиту або йому попався складний білет, то він не складе іспит на позитивну оцінку».* Визначити, в яких випадках це висловлення виявиться хибним.

Розв'язок. Виділимо прості висловлення і послідовність їх поєднання службовими словами за допомогою дужок: «Якщо ((студент не підготувався до іспиту) або (йому попався складний білет)), то (він не складе іспит на позитивну оцінку)». Позначимо атоми:
A— «Студент підготувався до іспиту»;
B— «Студенту попався складний білет»;
C— «Студент складе іспит на позитивну оцінку».
Одержана формула має вигляд: $(\neg A \vee B) \to \neg C$.
Побудуємо відповідну таблицю істинності

Таблиця істинності $(\neg A \vee B) \to \neg C$.

A	B	C	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$\neg C$	$\neg A \vee B \to \neg C$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0

З таблиці ми бачимо, що існують три інтерпретації: (*0, 0, 1*), (*0, 1, 1), (1, 1, 1),* на яких вихідне твердження виявляється хибним. Інтерпретація (*0, 0, 1*)*,* означає, що студент не підготувався до іспиту, але одержав нескладний білет, і йому вдалося скласти іспит на позитивну оцінку. У випадку (1, 1, 1) студенту попався важкий білет, але він підготовлений до цього іспиту і склав іспит на позитивну оцінку. В інтерпретації (0*, 1, 1*) студент не підготувався до іспиту, йому попався важкий білет, але він все одно склав іспит на позитивну оцінку.

Контрольні запитання.

1) Що називається логічним законом?
2) Що називається логічною суперечністю?
3) Що називається твердженням, що логічно виконується?

4) Назвати та записати основні закони алгебри логіки.
5) Як довести, що формула є тавтологією?

Задачі для самостійного розвязування

1. Чи є такі формули загальнозначущими, суперечливими або несуперечливими:
а) $\neg(\neg A) \to A$;
б) $(A \to B) \to (B \to A)$;
в) $(A \wedge (B \to A)) \to A$;
г) $(A \vee \neg B) \vee (\neg A \vee B)$.
2. Розставити різними способами дужки у таких формулах:
а) $\neg\ A \vee \neg\ B \wedge C$;
б) $A \to B \to C \to D$.
3. Виключити якомога більше число дужок у формулі:
а) $(\neg((A) \vee (C))) \vee (B)$;
б) $(((A) \to (B)) \to (C) \vee ((A) \to ((B) \to (C)))$;
в) $((B) \sim (\neg(C))) \vee (((A) \to (A)) \to ((B) \vee (D)))$;
г) $\neg((\neg((A) \vee (B))) \neg\ (C)) \to ((\neg((C) \to (D))) \vee E))$;
д) $(\neg((B) \sim (C))) \wedge ((\neg(E)) \vee (\neg(A)))$;
е) $((\neg((A) \to (B))) \vee (\neg((C) \vee (D))) \wedge \neg(F))$.
4. Побудуйте складні висловлення з використанням тільки зазначених операцій:
а) еквівалентність;
б) імплікація і кон'юнкція;
в) заперечення, кон'юнкція і диз'юнкція.

5. Доведіть, що заперечення висловлення «A є достатня та необхідна умова для B» еквівалентне висловленню «$\neg A$ є достатня і необхідна умова для $\neg B$».
6. Побудуйте висловлення, еквівалентне $A \vee B$, використовуючи тільки операції заперечення і кон'юнкції.
7. Побудуйте складне висловлення, еквівалентне $A \vee B$, використовуючи тільки операції кон'юнкції і заперечення.
8. Побудуйте складне висловлення, еквівалентне $A \wedge B$, використовуючи тільки операції диз'юнкції і заперечення.
9. Побудуйте два складних висловлення, еквівалентних $A \to B$, використовуючи тільки:

а) операції диз'юнкції і заперечення;
б) заперечення і кон'юнкції.
10. Використовуючи тотожності, спростіть формули логіки висловлень:
а) $\neg\ (A \vee B \vee C)\ (A\ (B \vee \neg C)) \wedge \neg B$;
б) $(A \vee B) \wedge \neg C \vee A \vee \neg C \vee B \vee A$.

Індивідуальні завдання

1. *Визначити яких висловлювань (Істинне, Хибне, або ні те, ні інше) стосуються формули, наведені у таблиці відповідно до заданого варіанта.*

№	Формула	№	Формула
1.	$(p \sim q) \to \overline{p}$	2.	$\overline{\overline{\overline{p} \to p} \to p}$
3.	$(p \to \overline{q}) \to (q \to \overline{p})$	4.	$\overline{p \leftrightarrow \overline{p \to p}}$
5.	$(p \vee q) \sim pq$	6.	$\overline{\overline{p \leftrightarrow p} \to p}$
7.	$(((p \to q) \to p) \to p)$	8.	$\overline{p \to q} \leftrightarrow q$
9.	$\overline{p \vee q} \sim \overline{p} \vee \overline{q}$	10.	$\overline{p \leftrightarrow q} \to p$
11.	$(p \sim p) \vee (q \sim q)$	12.	$p \to \overline{p \leftrightarrow q}$
13.	$p \sim q \vee p$	14.	$p \vee q \wedge (p \to q)$
15.	$(p \to q) \leftrightarrow (q \to \overline{p})$	16.	$\overline{p \vee q} \leftrightarrow q$
17.	$p \leftrightarrow \overline{p}$	18.	$p \vee q \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
19.	$(((p \to q) \to pq) \to p)$	20.	$pq \sim \overline{p}\,\overline{q}$
21.	$p \leftrightarrow q \leftrightarrow p \leftrightarrow q$	22.	$pq \to \overline{p}\,\overline{q}$
23.	$(pq \to p) \to q$	24.	$(p \leftrightarrow q) \vee (p \to q)$
25.	$(pq \to \overline{p}) \leftrightarrow q$		

2. *Формалізувати речення.*

   1. Я піду додому або залишуся тут і вип'ю чашку чаю, я не піду додому, отже, я залишуся і вип'ю чашку чаю.
   2. Якщо Олег ляже сьогодні пізно, він буде вранці в отупінні, якщо він ляже не пізно, то йому здаватиметься, що не варто жити, отже, або Олег буде завтра в отупінні, або йому здаватиметься, що не варто жити.
   3. Заперечення диз’юнкції двох висловлювань еквівалентно кон’юнкції заперечень кожного з цих висловлювань.
   4. Якщо 2 – просте число, то це найменше просте число, якщо 2 – найменше просте число, то 1 не є простим числом; число 1 не є простим числом, отже, 2 – просте число.
   5. Ігор або втомився, або хворий, якщо він втомився, то він злий; він не злий,отже, він хворий.

6. Якщо завтра буде холодно, я одягну тепле пальто, якщо рукав буде полагоджений; завтра буде холодно, а рукав не буде полагоджений, отже, я не одягну тепле пальто.
7. Ні Північ, ні Південь не перемогли в громадянській війні.
8. Людину не підкуповують лестощі, якщо розум у людини є.
9. Іван прийде на іспит і він або Сергій отримає п'ятірку.
10. Якщо не можеш визнати похвали заслуженими, то вважай їх лестощами.
11. Якщо буде гарна погода, то я подзвоню друзям, і ми поїдемо до моря.
12. Якщо я втомився або голодний, я не можу займатися.
13. Натуральне число n ділиться на 3 тоді і лише тоді, коли сума цифр числа n ділиться на 3.
14. Якщо вранці буде злива, то я або залишуся вдома, або вимушений буду взяти таксі.
15. Сьогодні наша команда не виграла і, отже, не вийшла у фінал.
16. Якщо я сьогодні встану і піду на заняття, моя мама буде задоволена, а якщо я не встану, то мама не буде задоволена.
17. Якщо він хоче досягти мети, він повинен багато знати і бути удачливим.
18. Сьогодні ясно, отже сьогодні не йде ні дощ, ні сніг.
19. Вчора було похмуро, а сьогодні тепло і ясно.
20. Якщо сьогодні хмарно, то це означає, що завтра буде дощ, або вітер розганятиме хмари.
21. Ти успішно складеш іспит тоді і лише тоді, коли добре підготуєшся; якщо ти не складеш іспит успішно, то позбудешся стипендії.
22. Математичні відомості можуть застосовуватися вміло і бути корисними лише в тому випадку, якщо вони засвоєні творчо.
23. Якщо у розпалі пристрасті розум сумнівається, то коли пристрасть остигне, він засудить твій вчинок.
24. Якщо головний визначник системи лінійних рівнянь не дорівнює нулю,то система рівнянь визначена, тобто має єдине вирішення.
25. Другом можна вважати того і лише того, хто щасливий, якщо щасливий його друг, і зажурений, якщо той зажурений.

3. Вказати умову та наслідок. Переформулювати твердження.

1. Чотирикутник є прямокутником тоді, коли дві його протилежні сторони і три його кути рівні.
2. Сума двох цілих чисел є парним числом, тільки коли кожний доданок парне число.
3. Щоб чотирикутник був ромбом, достатньо, щоб його діагоналі були перпендикулярні.
4. Щоб чотирикутник мав вісь симетрії, необхідно, щоб він був ромбом.
5. Чотирикутник є прямокутником тільки тоді, коли один з його кутів дорівнює 90, а дві протилежні сторони рівні.
6. Чотирикутник $ABCD$, у якого $AC = BD$, $\angle A = \angle C = 90^0$, є

прямокутником.

7. Чотирикутник є квадратом тоді, коли він має центр симетрії.
8. Трикутник є прямокутним тільки тоді, коли квадрат однієї з його сторін дорівнює сумі квадратів двох інших сторін.
9. Послідовність обмежена, якщо тільки вона має границю.
10. Для сумісності системи необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
11. Рівність двох фігур є достатньою умовою їх рівновеликості.
12. Щоб функція була диференційованою в точці, 2остатньо, щоб вона була неперервною в цій точці.
13. Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів є умова рівності нулю змішаного добутку цих векторів.
14. Щоб чотирикутник був прямокутником, достатньо, щоб він мав прямий кут і вісь симетрії.
15. Чотирикутник є прямоукутником тоді, коли він має вісь симетрії і два прямих суміжних кути.
16. Чотирикутник є прямокутником, якщо тільки його діагоналі рівні.
17. Якщо два прямокутники рівновеликі, то вони рівні.
18. Чотирикутник має вісь симетрії і два прямих кути, якщо тільки він є прямокутником.
19. Дві подібні фігури рівновеликі тільки тоді, коли вони рівні.
20. Рівність двох протилежних сторін чотирикутника є достатньою умовою того, що чотирикутник є паралелограмом.
21. Щоб чотирикутник мав рівні діагоналі і вісь симетрії, необхідно, щоб він був прямокутником.
22. Існування вписаного в чотирикутник кола – достатня ознака ромба.
23. Щоб паралелограм був ромбом, достатньо, щоб він мав вісь симетрії.
24. Трикутник є гострокутним тоді, коли квадрат однієї з його сторін менше суми квадратів двох інших сторін.
25. Для існування границі функції в точці необхідно і достатньо, щоб в цій точці існували і були рівні між собою обидві односторонні границі.

4. *Довести твердження методом математичної індукції:*

1) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N};$

2) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n\in\mathbb{N};$

3) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3} \quad \forall n\in\mathbb{N};$

4) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \forall n\in\mathbb{N};$

5) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n\cdot(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \forall n\in\mathbb{N};$

6) $2\cdot 1+2\cdot 3+2\cdot 5+\ldots+2\cdot(2n-1)=2n^2 \quad \forall n\in\mathbb{N};$

7) $1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\ldots+n(2n+1)=\dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6} \quad \forall n\in\mathbb{N};$

8) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \quad \forall n\in\mathbb{N};$

9) $\dfrac{1\cdot 4}{2\cdot 3}+\dfrac{2\cdot 5}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(n+1)}{n+2} \quad \forall n\in\mathbb{N};$

10) $1+3+6+\ldots+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N};$

11) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2 \quad \forall n\in\mathbb{N};$

12) $1+x^2+x^3+\ldots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad x\neq 1;$

13) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1 \quad \forall n\in\mathbb{N};$

14) $(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4})+\ldots+(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n})=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$

15) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N};$

16) $(6^{2n-1}+1)\,\vdots\,7 \quad \forall n\in\mathbb{N};$

17) $(4^n+15n-1)\,\vdots\,9 \quad \forall n\in\mathbb{N};$

18) $(10^n+18n-28)\,\vdots\,27 \quad \forall n\in\mathbb{N};$

19) $(5^n-3^n+2n)\,\vdots\,4 \quad \forall n\in\mathbb{N};$

20) $(11^{n+2}+12^{2n+1})\,\vdots\,133 \quad \forall n\in\mathbb{N};$

21) $(7^n-1)\,\vdots\,6 \quad \forall n\in\mathbb{N};$

22) $(11\cdot 3^n+10\cdot 2^n)\,\vdots\,7 \quad \forall n\in\mathbb{N};$

23) $(\dfrac{n}{3}+\dfrac{n^2}{2}+n^3)\,\vdots\,6 \quad \forall n\in\mathbb{N};$

24) $(11^{2n}-1)\,\vdots\,6 \quad \forall n\in\mathbb{N};$

25) $(1+2^{3n-1}+4^{3n-1})\,\vdots\,7 \quad \forall n\in\mathbb{N};$

Рекомендована література

1. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. Підручник. – Львів: "Магнолія Плюс", 2005. – 608 с.
2. Бардачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.Є. Дискретна математика. Підручник. – К.: Вища школа, 2002. – 288 с.
3. Кужель О.В. Елементи теорії множин і математичної логіки. – К.: Радянська школа, 1977. – 160 с.
4. Базилевич Л. Дискретна математика у прикладах і задачах: Підручник. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков. – 2013. – 487 с.
5. Основи дискретної математики: Підручник / Ю.В. Капітонова, С.Л. Кривий, О.А. Летичевський, Г.М. Луцький, М.К. Печурін; за ред. Т.С. Мельник. – К.: Наукова думка, 2002. – 579 с.: іл.
6. Ямненко Р.Є. Дискретна математика. – К.: Четверта хвиля, 2010. – 104 с.