

Гончаров В. В.

*Кіровоградський
національний технічний
університет*

Goncharov V. V.

*Kirovograd National
Technical University*

УДК 62-752+62-755

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РОТОРА В КОРПУСІ НА ПОДАТЛИВИХ ОПОРАХ, ЯКИЙ ДИНАМІЧНО ЗРІВНОВАЖУЄТЬСЯ ДВОМА АВТОБАЛАНСИРАМИ

Досліджена роторна система, в якій ротор поміщений з можливістю обертатися навколо власної поздовжньої осі в корпус на податливих опорах і зрівноважується динамічно двома автобалансирами з багатьма корегувальними вантажами. Отримана замкнута система диференціальних рівнянь відносно мінімальної кількості змінних, які описують процес автобалансування роторної системи. Отримана система складається з восьми рівнянь і в неї входить шістнадцять безрозмірних параметрів. Проведено дослідження отриманих рівнянь на асимптотичну стійкість – отримані і досліджені необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості. Знайдено резонансні швидкості і область стійкості - зрівноважити можливо тільки довгий умовний складений ротор, який утворюють ротор з корпусом, на зарезонансних швидкостях. Отримано вирази, в які входить десять безрозмірних параметрів і які дають можливість досліджувати залежність тривалості перебігу перехідних процесів від параметрів роторної системи.

Ключові слова: ротор, дисбаланс, автобалансири, стійкість, перехідні процес.

Вступ. Ротори багатьох відцентрових машин – пральних, екстракторів, сепараторів, центрифуг, осьових вентиляторів і ін. – встановлені в корпус з можливістю обертатися, а уже корпус закріплений пружно-в'язко і здійснює неплоский рух. В цих машинах динамічний дисбаланс ротора змінюється в процесі виконання технологічних операцій, тому його доцільно зрівноважувати на ходу двома пасивними автобалансирами (АБ) [1-3].

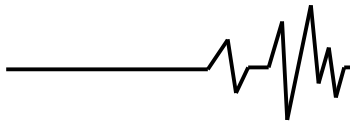
Постановка проблеми. На даний момент відсутні дослідження стійкості при динамічному зрівноваженні роторних систем, які складаються з ротора поміщеного в корпусі з можливістю обертання навколо поздовжньої осі і двох АБ з багатьма корегувальними вантажами (КВ).

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Найбільш повний огляд літератури по пасивному автобалансуванню роторів наведений в [3]. Врахування цього огляду, більш пізніх публікацій і робіт [4–10] показує, що на сьогодні практично немає робіт, в яких аналітично досліджується процес

автобалансування роторів, які здійснюють просторовий рух. В наведених роботах визначаються тільки умови настання автобалансування у вигляді критичних швидкостей, при переході через які настає або пропадає автобалансування. При цьому перехідні процеси не досліджуються.

Диференціальні рівняння руху роторних машин з АБ (при більше двох КВ в АБ) майже не піддаються аналітичному дослідженню в зв'язку з суттєвою нелінійністю і великою кількістю степенів свободи системи.

З урахуванням вищесказаного в роботі [11] був запропонований метод складання спрощених диференціальних рівнянь руху роторних машин з АБ, який враховує особливості таких механічних систем – відношення малості параметрів, малість відхилень поздовжньої осі ротора від осі обертання тощо. Із застосуванням цього методу були аналітично досліджені перехідні процеси, які протікають при статичному зрівноважуванні одним АБ з багатьма КВ ротора, поміщеного з можливістю обертання в



пружно-в'язко закріпленій корпус з нерухомою точкою [12] та корпус на податливих опорах [13].

Постановка задачі. Метою даної роботи є аналітичне дослідження стійкості та тривалості протікання перехідних процесів при динамічному зрівноваженні двома автобалансирами ротора, поміщеного в корпусі на податливих опорах.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати наступні задачі:

- записати систему диференціальних рівнянь, яка описує рух зазначеної роторної системи;
- отримати умови існування усталених рухів в нульовому та першому наближенні;
- дослідити достатні і необхідні умови асимптотичної стійкості;
- оцінити корені характеристичного рівняння для дослідження тривалості протікання перехідних процесів.

Методи досліджень. Застосовуються елементи теоретичної механіки, теорії стійкості по Ляпунову рухів механічних систем, теорії автобалансування роторних систем, конкретизований вигляд диференціальних рівнянь руху роторних систем з АБ.

Виклад основного матеріалу.

1. Опис теоретико-механічної моделі роторної системи. Осесиметричний ротор масою m_r , встановлений в корпусі масою m_c і обертається відносно корпусу з постійною кутовою швидкістю ω (рис. 1). Центри мас ротора і корпусу співпадають і розташовані в точці O . Корпус утримують опори, пружні і в'язкі

властивості яких характеризують відповідні числа – k і b .

Рух ротора описується трьома системами осей: нерухомою – $Oxyz$; рухомими – $Guvw$ і $G\xi\eta\zeta$, жорстко зв'язаними відповідно з корпусом і ротором. У вихідному положенні всі три системи співпадають. Вісь Oz спрямована уздовж осі обертання ротора. У площинах P_j ($|z_j| = d_j$), $j = 1, 2$ розташовані статичні дисбаланси S_{0j} (рис. 1), утворені точковими масами m_{0j} , що розташовані на відстані r_{0j} від поздовжньої осі ротора. У цих площинах ротор врівноважують два АБ, які складаються з n_j $j = 1, 2$ КВ (маятників, куль або циліндричних роликів): в j -ому маятниковому АБ на вал ротора насаджено n_j однакових математичних маятників масою m_j і фізичної довжиною r_j ; в – кульовому або роликівому АБ n_j однакових куль або циліндричних роликів масою m_j котяться без ковзання по кільцевій доріжці, при цьому відстань від поздовжньої осі ротора до центру куль або поздовжньої осі роликів рівна r_j .

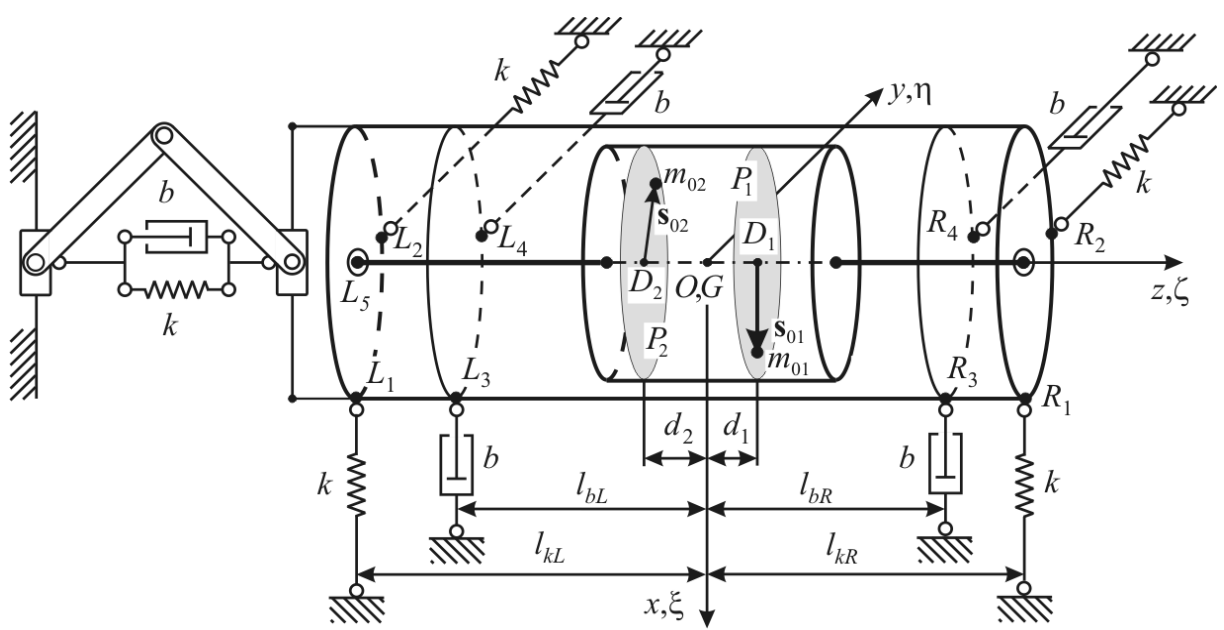
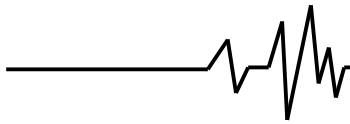


Рис. 1. Ротор з двома АБ в корпусі, встановленому на пружно-в'язких опорах



Модель руху ротора з корпусом і статичними дисбалансами наведена на рис. 2.

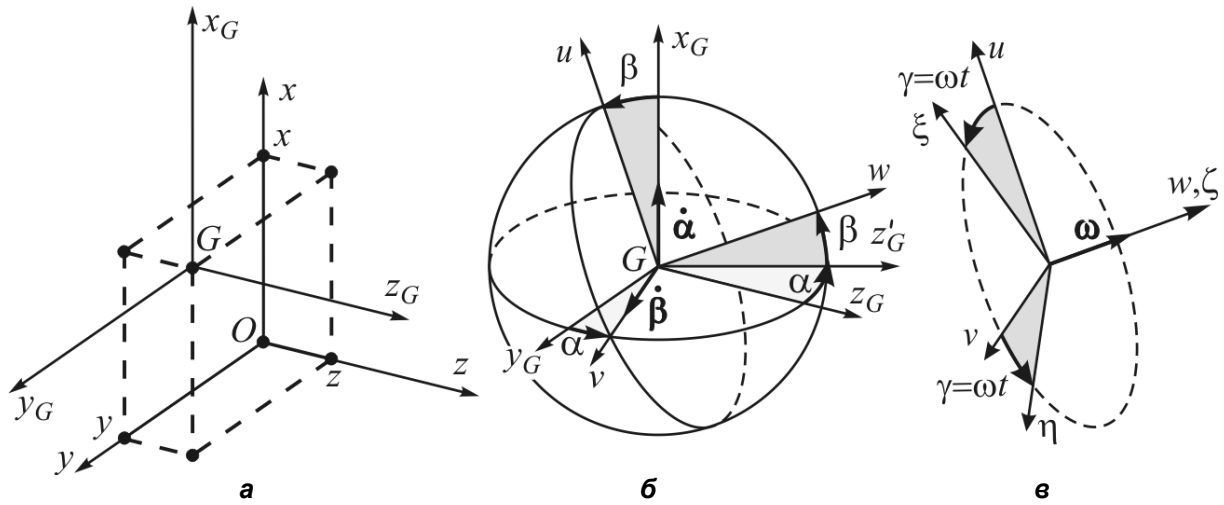


Рис. 2. Кінематика руху ротора і корпусу:

а – поступальний рух ротора з корпусом; б – поворот ротора з корпусом на кути Резалія; в – поворот ротора навколо поздовжньої осі

Відносно системи осей $Ouvw$ тензори інерції ротора і корпусу мають вигляд $J_r = \text{Diag}(A_r, A_r, C_r)$, $J_c = \text{Diag}(A_c, A_c, C_c)$.

Як це прийнято в теорії пасивних АБ [1-13], дією сил тяжіння нехтуємо і вважаємо, що КВ не заважають рухатися один одному і, у випадку куль або роликів, мають радіуси набагато менше радіуса їх бігових доріжок.

Положення маси дисбалансу або i -го КВ ($i = \overline{1, n_j}$) в площині $z = z_j$, $j = \overline{1, 2}$

визначається абсолютним кутом $\Phi_{i,j}$ – між віссю u_{D_j} і відносним радіус-вектором $r_{i,j}$ маси дисбалансу або центра мас КВ (рис. 3, а), або відносним кутом $\Psi_{i,j}$ – між віссю ξ_{D_j} і відносним радіус-вектором $r_{i,j}$ (рис. 3, б). Зв'язок між абсолютним і відносним кутом має вигляд $\Phi_{i,j} = \omega t + \Psi_{i,j}$, $i = \overline{0, n_j}, j = \overline{1, 2}$.

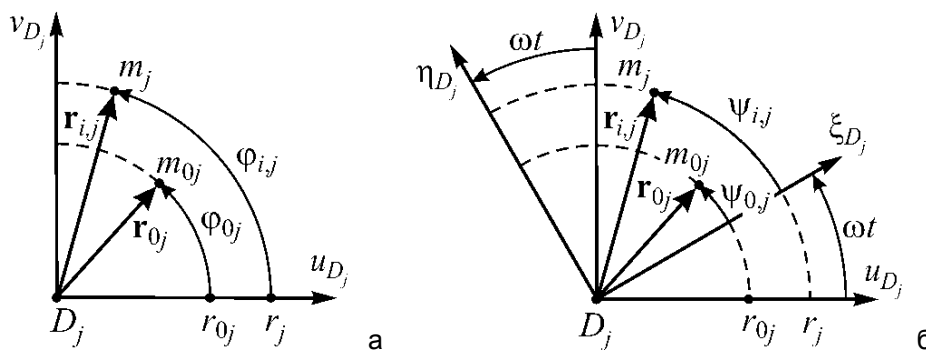
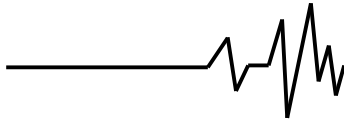


Рис. 3. Кінематика руху КВ і маси дисбалансу: а - абсолютні кути; б - відносні кути

Відносному руху i -ої кулі або ролика ($i = \overline{1, n_j}$) в j -ому АБ ($j = \overline{1, 2}$) перешкоджає ньютонівська сила в'язкого опору, модуль якої дорівнює $b_j u_{i,j}$, де b_j –

коефіцієнт сил в'язкого опору, $u_{i,j} = r_j |\dot{\Psi}_{i,j}|$ – модуль відносної швидкості КВ (швидкості центра мас КВ відносно ротора); точка над величиною означає похідну за часом. При повороті i -го маятника ($i = \overline{1, n_j}$) в j -ому АБ



($j = \overline{1,2}$) навколо осі ротора на маятник діє момент сил в'язкого опору $r_j b_j u_{i,j}$, де b_j – коефіцієнт моменту сил в'язкого опору, приведений до плеча r_j .

2. Диференціальні рівняння руху роторної системи. Аналогічно [12, 13] замкнута система диференціальних рівнянь, яка описує процес автобалансування роторної системи, в рухомій системі координат після комплексного псевдозгортання і обезрозмірення може бути записана у вигляді

$$L_1 = D^2 \xi_z + \tilde{b}_x D \xi_z + \tilde{k}_x \xi_z + \tilde{b}_{x\beta} D \theta_z + \tilde{k}_{x\beta} \theta_z + D^2 (s_{1z} + s_{2z}) = 0, \bar{L}_1 = 0,$$

$$L_2 = D^2 \theta_z + \tilde{b}_\beta D \theta_z + \theta_z - i \tilde{\omega} \tilde{C} D \theta_z + \tilde{b}_{x\beta} D \xi_z + \tilde{k}_{x\beta} \xi_z + \tilde{z}_1 D^2 s_{1z} + \tilde{z}_2 D^2 s_{2z} = 0, \bar{L}_2 = 0, \quad (1)$$

$$L_{2+j} = s''_{jz} + \tilde{b}_j s'_{jz} + \tilde{m}_j [D^2 (\xi_z + \tilde{z}_j \theta_z) - p_j \bar{D}^2 (\xi_z + \tilde{z}_j \theta_z) e^{\Delta \vartheta_j t}] = 0, \bar{L}_{2+j} = 0, \quad / j = 1,2 / \quad (2)$$

де $\xi_z = (u + iv) M e^{-i\omega \tau_1} / (m_{0,1} r_{0,1})$, $\theta_z = (\beta - i\alpha) \sqrt{AM} e^{-i\omega \tau_1} / (m_{0,1} r_{0,1})$ – узагальнені координати ротора;

$s_{jz} = m_j r_j e^{-i\omega \tau_j} / (m_{0,1} r_{0,1}) \cdot \sum_{i=0}^{n_j} (\cos \varphi_{i,j} + i \sin \varphi_{i,j})$, $/ j = 1,2 /$ – узагальнені координати сумарного дисбалансу;

$\tilde{\omega} = \omega / \omega_0$, $\tilde{C} = C_r / A$, $\tilde{b}_x = 2b / (\omega_0 M)$, $\tilde{k}_x = 2k / (\omega_0^2 M)$, $\tilde{b}_\beta = b(z_{Lb}^2 + z_{Rb}^2) / (A \omega_0)$,

$\tilde{k}_{x\beta} = k(z_{Lk} + z_{Rk}) / (\omega_0^2 \sqrt{AM})$, $\tilde{b}_{x\beta} = b(z_{Lb} + z_{Rb}) / (\omega_0 \sqrt{AM})$ – безрозмірні параметри ротора;

$M = m_c + m_r$, $A = A_c + A_r$, $\omega_0 = \sqrt{k_\beta / A}$;

$D(\bullet) = (\bullet)' + i \tilde{\omega} \cdot (\bullet)$ – диференційний оператор;

$\tau_j = t + \vartheta_j / \omega$, $\tilde{z}_j = z_j / \sqrt{A / M}$, $\tilde{m}_j = m_j n_j / (2 \kappa_j M)$, $\tilde{b}_j = b_j / (m_j \kappa_j \omega_0)$,

$\Delta \vartheta_j = 2(\vartheta_j - \vartheta_1)$, $p_j = \sqrt{p_{1j}^2 + p_{2j}^2}$, $p_{1j} = 1/n \sum_{i=1}^{n_j} \cos 2\tilde{\psi}_{i,j}$, $p_{2j} = 1/n \sum_{i=1}^{n_j} \sin 2\tilde{\psi}_{i,j}$,

$\vartheta_j = 1/2 \cdot \arccos(p_{1j} / p_j)$, $/ j = 1,2 /$ – безрозмірні параметри АБ;

$\kappa_j = \begin{cases} 1, & \text{для маятників;} \\ 7/5, & \text{для куль;} \\ 3/2, & \text{для циліндричних роликів;} \end{cases} \quad / j = \overline{1,2} /$ – коефіцієнт, який характеризує

кінетичну енергію обертального руху КВ;

$\tilde{\Psi}_{i,j}$, $/ i = \overline{1, n_j}, j = \overline{1,2} /$ – кути, які задають певний основний усталений рух (з сім'ю основних рухів, якщо такі рухи утворюють сім'ю);

штрих означає похідну по безрозмірному часу $\tilde{\tau}_j = \tau_j \omega / \tilde{\omega}$.

З рівнянь (1), (2) слідує, що ротор з корпусом утворює умовний складений ротор більш масивний і витягнутий ніж сам ротор.

Система (1), (2) залежить від шістнадцяти незалежних безрозмірних параметрів

$\tilde{\omega}, \tilde{b}_x, \tilde{b}_\beta, \tilde{b}_{x\beta}, \tilde{k}_x, \tilde{k}_{x\beta}, \tilde{C}, \Delta \vartheta, \tilde{b}_j$,

$\tilde{m}_j, p_j, \tilde{z}_j$, $/ j = 1,2 /$.

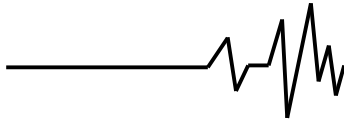
На основних рухах ротор зрівноважений і обертається навколо власної поздовжньої осі і тому узагальнені координати ротора і сумарних

дисбалансів рівні нулю – $\xi_z = 0$, $\theta_z = 0$,

$s_{1z} = s_{2z} = 0$. Стійкість основних рухів будемо досліджувати за цими узагальненими координатами.

3. Оцінка стійкості основних рухів в нульовому наближенні. Покладемо в рівняннях (2) $\tilde{m}_1 = \tilde{m}_2 = 0$:

$$L_{2+j} = s''_{jz} + \tilde{b}_j s'_{jz} = 0, \bar{L}_{2+j} = 0, \quad / j = 1,2 / \quad (3)$$



З рівнянь (3) випливає, що в нульовому наближенні сумарні дисбаланси s_{jz} , $/ j = 1,2 /$ дуже швидко прямують до певних сталих значень – $s_{jz} \rightarrow \hat{s}_{jz}$. Швидкість прямування характеризують безрозмірні числа

$$\lambda_{1,4}^{(0)} = 0, \lambda_{5,6}^{(0)} = -\tilde{b}_1, \lambda_{7,8}^{(0)} = -\tilde{b}_2.$$

Після встановлення руху по змінним S_{jz} , $/ j = 1,2 /$ рівняння (1) приймуть вигляд

$$\begin{aligned} L_1 &= D^2 \xi_z + \tilde{b}_x D \xi_z + \tilde{k}_x \xi_z + \tilde{b}_{x\beta} D \theta_z + \tilde{k}_{x\beta} \theta_z + \tilde{\omega}^2 (\hat{s}_{1z} + \hat{s}_{2z}) = 0, \bar{L}_1 = 0, \\ L_2 &= D^2 \theta_z + \tilde{b}_\beta D \theta_z + \theta_z - i \tilde{\omega} \tilde{C} D \theta_z + \tilde{b}_{x\beta} D \xi_z + \tilde{k}_{x\beta} \xi_z + \tilde{\omega}^2 (\tilde{z}_1 s_{1z} + \tilde{z}_2 s_{2z}) = 0, \bar{L}_2 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Рівняння (4) описують рух роторної системи при фіксованих дисбалансах ротора. Оцінимо встановлений при цьому рух і тривалість протікання перехідних процесів.

Відповідає рівнянням (4), стійка, з часом рух корпусу і ротора встановлюється, тому похідні від ξ_z, θ_z дорівнюватимуть 0 і вказані рівняння приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} L_1 &= (\tilde{\omega}^2 - \tilde{k}_x - i \tilde{b}_x \tilde{\omega}) \xi_z - (\tilde{k}_{x\beta} + i \tilde{b}_{x\beta} \tilde{\omega}) \theta_z + \tilde{\omega}^2 (\hat{s}_{1z} + \hat{s}_{2z}) = 0, \bar{L}_1 = 0, \\ L_2 &= -(\tilde{k}_{x\beta} + i \tilde{b}_{x\beta} \tilde{\omega}) \xi_z + [\tilde{\omega}^2 (1 - \tilde{C}) - 1 - i \tilde{b}_\beta \tilde{\omega}] \theta_z + \tilde{\omega}^2 (\tilde{z}_1 \hat{s}_{1z} + \tilde{z}_2 \hat{s}_{2z}) = 0, \bar{L}_2 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Визначник системи (5) рівний

$$\begin{aligned} \Delta_{\tilde{\omega}\tilde{b}} &= \tilde{\omega}^4 (1 - \tilde{C}) - \tilde{\omega}^2 [1 + \tilde{k}_x (1 - \tilde{C}) + \tilde{b}_x \tilde{b}_\beta - \tilde{b}_{x\beta}^2] + \tilde{k}_x - \tilde{k}_{x\beta}^2 - \\ &\quad - i \tilde{\omega} \{ \tilde{\omega}^2 [\tilde{b}_x (1 - \tilde{C}) + \tilde{b}_\beta] - \tilde{b}_x - \tilde{b}_\beta \tilde{k}_x + 2 \tilde{k}_{x\beta} \tilde{b}_{x\beta} \}. \end{aligned}$$

При $\Delta_{\tilde{\omega}\tilde{b}} = 0$ система (5) вироджується – отримуємо резонансні швидкості $\tilde{\omega}_{1,2}$ або $\tilde{\omega}_1$ (див. [13]), а при $\Delta_{\tilde{\omega}\tilde{b}} \neq 0$ з (5) знаходимо

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_z &= -\tilde{\omega}^2 / \Delta_{\tilde{\omega}\tilde{b}} \cdot \sum_{j=1}^2 [\tilde{\omega}^2 (1 - \tilde{C}) - 1 + \tilde{k}_{x\beta} \tilde{z}_j + i \tilde{\omega} (\tilde{b}_{x\beta} \tilde{z}_j - \tilde{b}_\beta)] \hat{s}_{jz}, \\ \hat{\theta}_z &= -\tilde{\omega}^2 / \Delta_{\tilde{\omega}\tilde{b}} \cdot \sum_{j=1}^2 [(\tilde{\omega}^2 - \tilde{k}_x) \tilde{z}_j + \tilde{k}_{x\beta} - i \tilde{\omega} (\tilde{b}_x \tilde{z}_j - \tilde{b}_{x\beta})] \hat{s}_{jz}. \end{aligned}$$

4. Оцінка стійкості основних рухів в першому наближенні.

4.1. Перше наближення. На усталений не зрівноважений рух ротора почнуть повільно

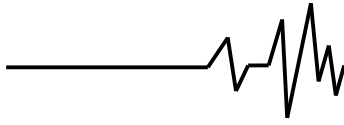
реагувати КВ. Підставивши $\hat{\xi}_z, \hat{\theta}_z$ в (2), отримаємо диференціальні рівняння, які описують відповідну повільну зміну сумарних дисбалансів роторної системи:

$$L_{2+j} = s_{jz}'' + \tilde{b}_j s_{jz}' + \tilde{m}_j \tilde{\omega}^4 (G_j - \bar{G}_j p_j e^{\Delta_9 j i}) = 0, \bar{L}_{2+j} = 0, / j = 1,2 /, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{де } G_j &= (g_{1j} s_{1z} + g_{2j} s_{2z}) / \Delta_{\tilde{\omega}\tilde{b}}, g_{j_1, j_2} = \tilde{\omega}^2 (1 - \tilde{C} + \tilde{z}_{j_1} \tilde{z}_{j_2}) - [\tilde{z}_{j_1} \tilde{z}_{j_2} \tilde{k}_x - (\tilde{z}_{j_1} + \tilde{z}_{j_2}) \tilde{k}_{x\beta} + 1] - \\ &\quad - i \tilde{\omega} [\tilde{z}_{j_1} \tilde{z}_{j_2} \tilde{b}_x - (\tilde{z}_{j_1} + \tilde{z}_{j_2}) \tilde{b}_{x\beta} + \tilde{b}_\beta], / j, j_1, j_2 = \overline{1,2} /. \end{aligned}$$

Характеристичне рівняння системи (6) можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} X_1 + 1 & -p_1 & -g_{12}/g_{22} & p_1 \bar{g}_{12}/\bar{g}_{22} \\ -p_1 & \bar{X}_1 + 1 & p_1 g_{12}/g_{22} & -\bar{g}_{12}/\bar{g}_{22} \\ -g_{12}/g_{11} & p_2 e^{\Delta_9 i} \bar{g}_{12}/\bar{g}_{11} & X_2 + 1 & -p_2 e^{\Delta_9 i} \\ p_2 e^{-\Delta_9 i} g_{12}/g_{22} & -\bar{g}_{12}/\bar{g}_{11} & p_2 e^{-\Delta_9 i} & \bar{X}_2 + 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$



де $X_j = (\lambda^2 + \tilde{b}_j \lambda) \Delta_{\tilde{\omega} b} / (\tilde{m}_j g_{jj} \tilde{\omega}^4)$, $j = \overline{1,2}$, $\Delta \vartheta = \Delta \vartheta_2$.

При відсутності сил опору в опорах ($b = 0$) маємо

$$g_{j_1, j_2} = \tilde{\omega}^2 (1 - \tilde{C} + \tilde{z}_{j_1} \tilde{z}_{j_2}) - [\tilde{z}_{j_1} \tilde{z}_{j_2} \tilde{k}_x - (\tilde{z}_{j_1} + \tilde{z}_{j_2}) \tilde{k}_{x\beta} + 1], \quad j_1, j_2 = \overline{1,2} / ,$$

$$\Delta_{\tilde{\omega} b} = \Delta_{\tilde{\omega}} = \tilde{\omega}^4 (1 - \tilde{C}) - \tilde{\omega}^2 [1 + \tilde{k}_x (1 - \tilde{C})] + \tilde{k}_x - \tilde{k}_{x\beta}^2$$

і визначник (7) в розгорнутому вигляді приймає вигляд

$$X_1^2 X_2^2 + 2 X_1 X_2 (X_1 + X_2) + X_1^2 \Sigma_2 + X_2^2 \Sigma_1 + 2 X_1 X_2 [2 - g(1 + p_1 p_2 \cos \Delta \vartheta)] + 2(1 - g)(X_1 \Sigma_2 + X_2 \Sigma_1) + (1 - g)^2 \Sigma_1 \Sigma_2 = 0, \quad (8)$$

де $g = g_{12}^2 / g_{11} g_{22}$, $\Sigma_j = 1 - p_j^2$, $j = \overline{1,2}$.

Шукаємо перше наближення коренів $\lambda_{\overline{1,4}}$:

$$\lambda_{\overline{1,4}} = \Lambda_{\overline{1,4}}^{(1)} \varepsilon \quad \text{при} \quad \tilde{m}_1 = \tilde{m}_{\varepsilon 1} \varepsilon, \quad \tilde{m}_2 = \tilde{m}_{\varepsilon 2} \varepsilon. \quad (9)$$

Підставивши (9) в (8) отримаємо рівняння для визначення $x = \Lambda_{\overline{1,4}}^{(1)}$:

$$f(x) = A_0 x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 = 0, \quad (10)$$

де $A_0 = 1$, $A_1 = 2(a_{\varepsilon 1} + a_{\varepsilon 2})$, $A_2 = a_{\varepsilon 1}^2 \Sigma_1 + a_{\varepsilon 2}^2 \Sigma_2 + 2[2 - g(1 + p_1 p_2 \cos \Delta \vartheta)] a_{\varepsilon 1} a_{\varepsilon 2}$,

$$A_3 = 2(1 - g) a_{\varepsilon 1} a_{\varepsilon 2} (a_{\varepsilon 1} \Sigma_1 + a_{\varepsilon 2} \Sigma_2), \quad A_4 = a_{\varepsilon 1}^2 a_{\varepsilon 2}^2 (1 - g)^2 \Sigma_1 \Sigma_2 > 0, \quad (11)$$

$$a_{\varepsilon j} = \tilde{m}_{\varepsilon j} g_{jj} / \tilde{b}_j \cdot \tilde{\omega}^4 / \Delta_{\tilde{\omega}}, \quad j = \overline{1,2} / .$$

4.2. Умови асимптотичної стійкості в першому наближенні. Необхідні умови стійкості коренів рівняння (10) мають вигляд

$A_i > 0 \quad / i = \overline{0,4} /$ або враховуючи (11) і те, що $1 - g = (\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2)^2 \Delta_{\tilde{\omega}} / (g_{11} g_{22})$:

$$\begin{cases} g_{jj} = f(\tilde{z}_j) = \tilde{z}_j^2 (\tilde{\omega}^2 - \tilde{k}_x) + 2 \tilde{z}_j \tilde{k}_{x\beta} + \tilde{\omega}^2 (1 - \tilde{C}) - 1 > 0, \quad j = \overline{1,2} / , \\ \Delta_{\tilde{\omega}} = \tilde{\omega}^4 (1 - \tilde{C}) - \tilde{\omega}^2 [1 + \tilde{k}_x (1 - \tilde{C})] + \tilde{k}_x - \tilde{k}_{x\beta}^2 > 0. \end{cases} \quad (12)$$

Достатні умови стійкості - критерій Рауса-Гурвіца:

$$\Delta_2 = A_1 A_2 - A_0 A_3 > 0, \quad \Delta_3 = A_1 A_2 A_3 - A_0 A_3^2 - A_1^2 A_4 > 0. \quad (13)$$

В розгорнутому вигляді визначники Δ_2 , Δ_3 приймають вигляд

$$\Delta_2 = 2 \{ (a_{\varepsilon 1} + a_{\varepsilon 2}) [a_{\varepsilon 1}^2 \Sigma_1 + a_{\varepsilon 2}^2 \Sigma_2 + 2g(1 - p_1 p_2 \cos \Delta \vartheta) a_{\varepsilon 1} a_{\varepsilon 2}] + a_{\varepsilon 1} a_{\varepsilon 2} (1 - g) [a_{\varepsilon 1} (4 - \Sigma_1) + a_{\varepsilon 2} (4 - \Sigma_2)] \},$$

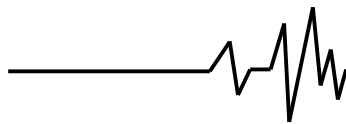
$$\Delta_3 = 4(1 - g) a_{\varepsilon 1} a_{\varepsilon 2} \{ (a_{\varepsilon 1} + a_{\varepsilon 2}) (a_{\varepsilon 1} \Sigma_1 + a_{\varepsilon 2} \Sigma_2) [a_{\varepsilon 1}^2 \Sigma_1 + a_{\varepsilon 2}^2 \Sigma_2 + 2g a_{\varepsilon 1} a_{\varepsilon 2} (1 - p_1 p_2 \cos \Delta \vartheta)] + a_{\varepsilon 1} a_{\varepsilon 2} (1 - g) [4 a_{\varepsilon 1} a_{\varepsilon 2} (1 - p_1^2 p_2^2) + (a_{\varepsilon 1}^2 \Sigma_1 + a_{\varepsilon 2}^2 \Sigma_2) (2 + p_1^2 + p_2^2)] \}. \quad (14)$$

При виконанні необхідних умов (12) слідує, що всі множники в (14) невід'ємні і $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$. Тобто умови Рауса-Гурвіца (13) виконуються.

Таким чином, умови (12) є необхідними і достатніми умовами асимптотичної стійкості

розв'язків рівняння (10).

4.3. Дослідження необхідних умов асимптотичної стійкості. Для функцій $f(\tilde{z}_j)$, $j = \overline{1,2} /$ в (12) маємо



$$\det_f = \tilde{k}_{x\beta}^2 - (\tilde{\omega}^2 - \tilde{k}_x)[\tilde{\omega}^2(1 - \tilde{C}) - 1] = -\Delta_{\tilde{\omega}} < 0 \quad \text{і} \quad f(0) = \tilde{\omega}^4[\tilde{\omega}^2(1 - \tilde{C}) - 1] / \Delta_{\tilde{\omega}},$$

тому перша нерівність в (12) виконується при $1 - \tilde{C} > 0$ і $\tilde{\omega}^2 > \tilde{\omega}_3^2 = 1/(1 - \tilde{C})$.

Друга нерівність виконується на області $\tilde{\omega} \in (0, \tilde{\omega}_1) \cup (\tilde{\omega}_2, \infty)$, де $\tilde{\omega}_{1,2}$ визначені в [13]. Так як

$$\tilde{\omega}_{1,2}^2 > \tilde{\omega}_3^2 \Leftrightarrow \pm \sqrt{[1 - \tilde{k}_x(1 - \tilde{C})]^2 + 4(1 - \tilde{C})\tilde{k}_{x\beta}^2} > 1 - \tilde{k}_x(1 - \tilde{C}),$$

то $\tilde{\omega}_1 < \tilde{\omega}_3 < \tilde{\omega}_2$ і роторна система є стійкою при $\tilde{\omega}^2 > \tilde{\omega}_2^2$.

Отже, роторну систему на піддатливих опорах можна зрівноважити динамічно двома АБ тільки у випадку, якщо складений ротор довгий, і на зарезонансних швидкостях.

4.4. Оцінка коренів характеристичного рівняння. Корені характеристичного рівняння (10) неможливо знайти в явному вигляді. Проведемо їх оцінку. Для цього запишемо (10) у вигляді

$$f(x, \delta) = A_0 x^4 + A_1 x^3 + A_2^* x^2 + A_3 x + A_4 + \delta f_1(x), \quad (15)$$

де $A_2^* = a_{\varepsilon 1}^2 \Sigma_1 + a_{\varepsilon 2}^2 \Sigma_2 + 2(2 - g)a_{\varepsilon 1} a_{\varepsilon 2}$,

$$x_{1,4}^{(q)} = -[a_{\varepsilon 1} P_1^{(q)} + a_{\varepsilon 2} P_2^{(q)} \pm \sqrt{(a_{\varepsilon 1} P_1^{(q)} - a_{\varepsilon 2} P_2^{(q)})^2 + 4g a_{\varepsilon 1} a_{\varepsilon 2} P_1^{(q)} P_2^{(q)}}] / 2, \quad / q = \overline{1, 2} /, \quad (17)$$

де $P_j^{(q)} = 1 \mp (-1)^{(j-1)q} p_j \geq 0, \quad / j, q = \overline{1, 2} /$.

Подвійні знаки у виразах (17) і (18) не пов'язані між собою.

З (9), (17) слідує, що корені $\lambda_{1,4}$ розташовані між значеннями $\lambda_{1,4}^{(q)}, \quad / q = \overline{1, 2} /$:

$$\lambda_{1,4}^{(q)} = -[a_1 P_1^{(q)} + a_2 P_2^{(q)} \pm \sqrt{(a_1 P_1^{(q)} - a_2 P_2^{(q)})^2 + 4g a_1 a_2 P_1^{(q)} P_2^{(q)}}] / 2, \quad / q = \overline{1, 2} /, \quad (19)$$

де $a_j = \tilde{m}_j g_{jj} / \tilde{b}_j \cdot \tilde{\omega}^4 / \Delta_{\tilde{\omega}}, \quad / j = \overline{1, 2} /$.

Параметри $p_j, \quad / j = \overline{1, 2} /$ в (19) для більше 2-ох КВ в АБ є випадковими величинами і при фіксованих значеннях масо-інерційних параметрів роторної системи можуть приймати будь-які значення на області $[0; 1]$. Для інших параметрів - $\tilde{\omega}, \tilde{C}, \tilde{k}_x, \tilde{k}_{x\beta}, p_j, \tilde{m}_j, \tilde{b}_j, \tilde{z}_j$,

$$f_1(x) = -2g p_1 p_2 a_{\varepsilon 1} a_{\varepsilon 2} x^2, \quad \delta = \cos \Delta \vartheta \in [-1; 1].$$

На області стійкості $f_1(x) \leq 0$, тому функція $f(x, \delta)$ монотонна по параметру δ і корені $x_{1,4}$ рівняння (15) розташовані між коренями $x_{1,4}^{(1)}$ і $x_{1,4}^{(2)}$ рівнянь, відповідно

$$f(x, \delta_1) = f(x, -1) = 0 \quad \text{і} \quad f(x, \delta_2) = f(x, 1) = 0. \quad (16)$$

Корені рівнянь (16) рівні

$/ j = \overline{1, 2} /$, можна проводити дослідження їх(18) впливу на величину коренів (19), а, значить, і - на тривалість протікання перехідних процесів.

5. Висновки.

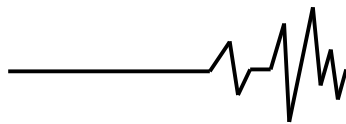
Проведені дослідження роторної системи на податливих опорах з двома АБ дозволяють зробити наступні висновки.

1) Система рівнянь, що описують рух роторної системи, залежить від шістнадцяти незалежних безрозмірних параметрів.

2) Отримані необхідні умови асимптотичної стійкості роторної системи з точністю до границь є достатніми.

3) Роторну систему можна врівноважити динамічно двома АБ тільки у випадку довгого складеного ротора. При цьому ротор має дві резонансні швидкості і автобалансування настає на зарезонансних швидкостях.

4) Тривалість протікання перехідних процесів залежить від десяти безрозмірних параметром.

**Список використаних джерел**

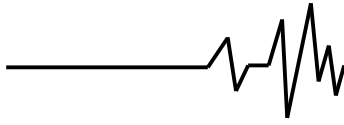
1. Ларри Дж. Автоматическое балансирование вращающихся масс // Сб. переводов и обзоров периодической иностранной литературы. – 1955. – том 23. – № 5. – С. 14–19.
2. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия. – М.: Наука, 2002. –119 с.
3. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.
4. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. – 84 с.
5. Sperling L., Merten F., Duckstein H. Self-synchronization and automatic balancing in rotor dynamics // *Int. J. Rotating Machinery*. – 2000. – V. 6. – № 4. – P. 275–285.
6. Simulation of two-plane automatic balancing of a rigid rotor / L. Sperling, B. Ryzhik, Ch. Linz, H. Duckstein // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 2002. – V. 58. – № 4–6, – P. 351–365.
7. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Single-Plane Auto-Balancing of Rigid Rotors // *Technische Mechanic*. – 2004. – V. 24. – № 1. – P. 1–24.
8. Lu Chung-Jen, Wang Ming-Cheng, Huang Shih-Hsuan. Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2009. – V. 23. – Iss. 3. – P. 884–896.
9. Bolton J.N. Single- and dual-plane automatic balancing of an elastically mounted cylindrical rotor with considerations of coulomb friction and gravity: Diss. ... degree of Dr. of Philosophy шн Engineering Mechanics. – Blacksburg, Virginia, 2010. – 317 p.
10. Two-plane automatic balancing: A symmetry breaking analysis / D.J. Rodrigues, A.R. Champneys, M.I. Friswell, R.E. Wilson // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2011. – V. 46. – Iss. 9. – P. 1139–1154.
11. Філімоніхін Г.Б., Гончаров В.В. Методика складання диференціальних рівнянь руху роторних систем з автобалансирами і її застосування до системи ротор – масивний корпус – автобалансири // *Збірник наукових праць КНТУ*. – 2009. – Вип. 22. – С. 357–363.
12. Филимоныхин Г.Б., Гончаров В.В. Уравновешивание автобалансиром ротора в упруго-вязко закрепленном корпусе с неподвижной точкой // *Известия Томского политехнического университета*. – 2014. – Т.

324. – № 2. – С. 71–77.

13. Филимоныхин Г.Б., Гончаров В.В. Уравновешивание автобалансиром ротора в упруго-вязко закрепленном корпусе, совершающем пространственное движение // *Известия Томского политехнического университета*. – 2014, т. 325, № 2, С. 41–49.

Список джерел в транслітерації

1. Larry J. Automatic balancing of rotating masses. *Col. of translations and periodic reviews of foreign literature*. –M.: 1955. –23, –5. – pp.14–19.
2. Gusarov A. Autobalancing device direct action. –M.: Nauka, 2002. –119 p.
3. Filimonikhin G. Balancing and protecting from vibrations of rotors by using auto-balancers with solid corrective weights. – Kirovograd: KNTU, 2004. – 352 p.
4. Nesterenko V. Automatic balancing of rotors devices and machines with many degrees of freedom. –Tomsk: Publ. house of Tomsk University, 1985. – 84 p.
5. Sperling L., Merten F., Duckstein H. Self-synchronization and automatic balancing in rotor dynamics. *Int. J. Rotating Machinery*, 2000, vol. 6, no. 4, pp. 275–285.
6. Sperling L., Ryzhik B., Linz Ch., Duckstein H. Simulation of two-plane automatic balancing of a rigid rotor. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2002, vol. 58, no. 4–6, pp. 351–365.
7. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Single-Plane Auto-Balancing of Rigid Rotors. *Technische Mechanic*, 2004, vol. 24, no. 1, pp. 1–24.
8. Lu Chung-Jen, Wang Ming-Cheng, Huang Shih-Hsuan. Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009, vol. 23, Iss. 3, pp. 884–896.
9. Bolton J.N. Single- and dual-plane automatic balancing of an elastically mounted cylindrical rotor with considerations of coulomb friction and gravity. *Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in Engineering Mechanics*. Blacksburg, Virginia, 2010. 317 p.
10. Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Two-plane automatic balancing: A symmetry breaking analysis. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, vol. 46, Iss. 9, pp. 1139–1154.
11. Filimonikhin G., Goncharov V. Methodology of compiling the differential equations of motion of rotor systems with auto-balancers and its applications to the system: rotor in massive corps - auto-balancer. *Col. of scientific papers*



KNTU. – 2009. – Rel. 22. – pp. 357–363.

12. Filimonikhin G., Goncharov V. Balancing of rotor in visco-elastic fixed casing with fixed point using auto-balancer. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*. 2014, vol. 324, № 2, pp. 71–77.

13. Filimonikhin G., Goncharov V. Balancing by auto-balancer of rotor in visco-elastic fixed corps which makes spatial motion. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2014, vol. 325, № 2, pp. 41–49.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РОТОРА В КОРПУСЕ НА ПОДАТЛИВЫХ ОПОРАХ, ДИНАМИЧЕСКИ УРАВНОВЕШИВАЕМОГО ДВУМЯ АВТОБАЛАНСИРАМИ

Аннотация. Исследована роторная система, в которой ротор помещен с возможностью вращения вокруг собственной продольной оси в корпус на податливых опорах и уравновешивается динамически двумя автобалансирами со многими корректирующими грузами. Получена замкнутая система дифференциальных уравнений относительно минимального количества переменных, описывающих процесс автобалансировки роторной системы. Полученная система состоит из восьми уравнений и зависит от шестнадцати безразмерных параметров. Проведено исследование полученных уравнений на асимптотическую устойчивость - получены и исследованы необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости. Найдены резонансные скорости и области устойчивости - уравновесить можно только

длинный условный составной ротор, который образуют ротор и корпусом, на зарезонансных скоростях. Получены выражения, в которые входит десять безразмерных параметров и которые позволяют исследовать зависимость длительности переходных процессов от параметров роторной системы.

Ключевые слова: ротор, дисбаланс, автобалансир, устойчивость, переходные процессы.

RESEARCH OF STABILITY OF ROTOR THAT DYNAMICALLY IS COUNTERBALANCED BY TWO AUTO-BALANCERS, IN CORPS ON PLIABLE SUPPORTS

Annotation. The rotor system, in that the rotor is placed in corps on pliable supports with possibility of rotation around on its longitudinal axis with many corrective weights, is researched. The closed system of differential equations relatively of the minimal numbers of variables, that describes the process of auto-balancing of the rotor system, is obtained. This system is consist with eight equations and is depended of sixteen dimensionless parameters. The resonance speeds and regions of stability are found - the long conditional composite rotor which form the rotor and corps on high resonant speeds is can balance only. The expressions, which include ten dimensionless parameters and which allow us to study the dependence of the duration transients of the system parameters are obtained.

Key words: rotor, unbalance, autobalancing, stability, transient processes.