УДК 539.3

Л.М. Кривоблоцька, доц., канд. ф.-м. наук
Кіровоградський національний технічний університет

Сингулярні множники у задачі трьох тіл

Формули заміни незалежної змінної можуть представлятись у неявній формі, на що вперше звернув увагу К. Зундман. Більш того, у формули заміни незалежної змінної можуть входити невідомі наперед шукані функції, які задовольняють певним рівнянням;
коливання, переміщення, малий параметр, сингулярність, регуляризація

Відомо, що проблема n – тіл була предметом досліджень багатьох видатних механіків і математиків. Тут розглянемо цю складну проблему лише для випадку $n = 3$ – проблема трьох тіл; нові методи для її розв'язання були в свій час запропоновані К.Зундманом і опубліковані в знаменитій Acta mathematica [1].

Суть проблеми в наступному: розглядаються у просторі три тіла (наприклад, Сонце, Земля і Місяць); рух цих об'єктів зумовлюється законом всесвітнього тяжіння. Була поставлена задача: знайти закони руху цих тіл, включаючи випадок взаємних співударів і відштовхувань.

Позначаємо через m_0, m_1, m_2 маси тіл; через r_0, r_1, r_2 – відповідні відстані між цими тілами; $Oxyz$ – інерціальну систему координат (див. рис.1).

Тіла розглядаються як матеріальні точки; закон їх руху задається функціями:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = x_0(t),\ y_0 = y_0(t),\ z_0 = z_0(t); \\ x_1 = x_1(t),\ y_1 = y_1(t),\ z_1 = z_1(t); \\ x_2 = x_2(t),\ y_2 = y_2(t),\ z_2 = z_2(t). \end{array}\right\}. \tag{1}$$

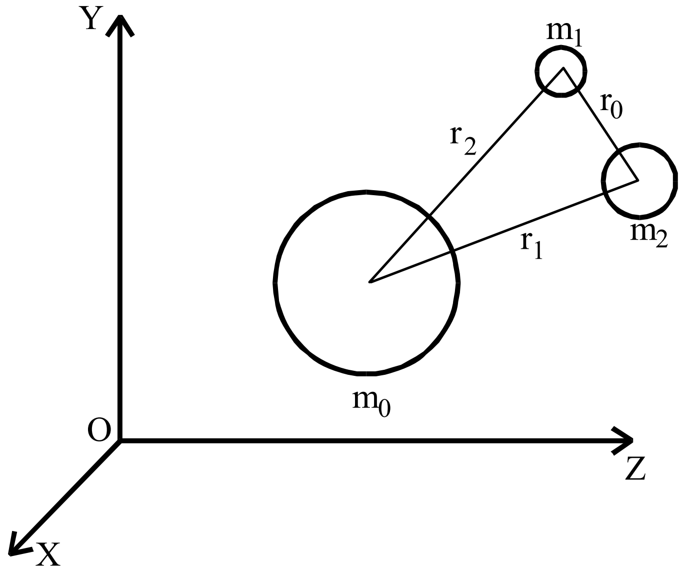

Рисунок 1 – Система відліку і основні позначення в проблемі трьох тіл

Ці функції повинні задовольняти наступній істотно нелінійній системі звичайних диференціальних рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx_0}{dt}=x_0', \quad \dfrac{dx_0'}{dt}=m_1\dfrac{x_1-x_0}{r_2^3}+m_2\dfrac{x_2-x_0}{r_1^3}; \\ \dfrac{dy_0}{dt}=y_0', \quad \dfrac{dy_0'}{dt}=m_1\dfrac{y_1-y_0}{r_2^3}+m_2\dfrac{y_2-y_0}{r_1^3}; \\ \dfrac{dz_0}{dt}=z_0', \quad \dfrac{dz_0'}{dt}=m_1\dfrac{z_1-z_0}{r_2^3}+m_2\dfrac{z_2-z_0}{r_1^3} \end{array}\right\}(curl). \qquad (2)$$

Тут “$(curl)$“ відома вже нам операція циклічної перестановки на упорядкованих множинах: $(1, 2, 3)$ і

$(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$; графічно вказану операцію зображаємо на таких - схемах:

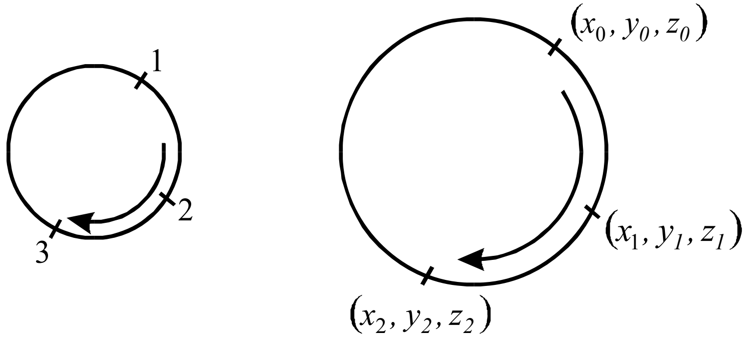

Рисунок 2 – Схема циклічної перестановки

Значить, до рівнянь (1) слід дописувати ще дві групи аналогічної структури диференціальних рівнянь (по три рівняння в кожній групі), виконавши в системі (2) послідовні заміни числових індексів і позначень для шуканих функцій згідно процедури зображеної на рис.2.

Зауважимо, що у рівняннях (3.2.2) і їм аналогічних введені позначення:

$$\left.\begin{aligned} r_0^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2; \\ r_1^2 &= \left(x_0 - x_2^2\right)^2 + (y_0 - y_2)^2 + (z_0 - z_2)^2; \\ r_2^1 &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Потім К.Зундман ввів нові шукані функції згідно формул

$$\begin{aligned} &x = x_1 - x_0, \quad y = y_1 - y_0, \quad z = z_1 - z_0; \\ &\xi = g\,m_2 x_2, \quad \eta = g\,m_2 y_2, \quad \zeta = g\,m_2 z_2 \end{aligned} \qquad (4)$$

Тим самим одержав для подальших досліджень систему диференціальних рівнянь руху трьох вказаних взаємодіючих тіл.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{(m_0+m_1)x}{r^3}=-m_2x\left(\frac{\mu}{r_0^3}+\frac{\lambda}{r_1^3}\right)+m_2\xi\left(\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r_1^3}\right);$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{(m_0+m_1)y}{r^3}=-m_2y\left(\frac{\mu}{r_0^3}+\frac{\lambda}{r_1^3}\right)+m_2\eta\left(\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r_1^3}\right);$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{(m_0+m_1)z}{r^3}=-m_2z\left(\frac{\mu}{r_0^3}+\frac{\lambda}{r_1^3}\right)+m_2\zeta\left(\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r_1^3}\right), \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2}&=-M\xi\left(\frac{\lambda}{r_0^3}+\frac{\mu}{r_1^3}\right)+\lambda\mu Mx\left(\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r_1^3}\right);\\
\frac{d^2\eta}{dt^2}&=-M\eta\left(\frac{\lambda}{r_0^3}+\frac{\mu}{r_1^3}\right)+\lambda\mu My\left(\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r_1^3}\right);\\
\frac{d^2\zeta}{dt^2}&=-M\zeta\left(\frac{\lambda}{r_0^3}+\frac{\mu}{r_1^3}\right)+\lambda\mu Mz\left(\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r_1^3}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

До вказаних рівнянь руху К.Зундман "приєднує" три перших інтеграли площ:

$$\left.\begin{aligned}
g\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+h(\xi\eta'-\eta\xi')&=ghC_0;\\
g\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+h(\eta\zeta'-\zeta\eta')&=ghC_1;\\
g\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+h(\zeta\xi'-\xi\zeta')&=ghC_2,
\end{aligned}\right\}, \qquad (7)$$

і інтеграл енергії:

$$g\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]+h\left(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2\right)=2U-K. \quad (8)$$

У співвідношеннях (5) – (8) введені наступні позначення:

$$\left.\begin{aligned}
r_0^2&=(\xi-\mu x)^2+(\eta-\mu y)^2+(\zeta-\mu z)^2;\\
r_1^2&=(\xi+\lambda x)^2+(\eta+\lambda y)^2+(\zeta+\lambda z)^2;\\
r^2&=r_2^2=x^2+y^2+z^2;
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\xi'=\frac{d\xi}{dt},\quad \eta'=\frac{d\eta}{dt},\quad \zeta'=\frac{d\zeta}{dt};\\
&\lambda=\frac{m_1}{m_0+m_1},\quad \mu=\frac{m_0}{m_0+m_1};\\
&g=\frac{M}{m_2\left(m_0+m_1\right)},\quad h=\frac{m_0+m_1}{m_0\,m_1}
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Розв'язок поставленої задачі К.Зундман запропонував знаходити методом степеневих рядів по часу t, що в епоху його життя широко практикувалось. Згідно цього методу шукані функції часу $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ були представлені рядами такого типу:

$$x=x(t)=x_0+x_1t+x_2t^2+\cdots. \quad (11)$$

....

Виявилось, що поряд з позитивними сторонами цього методу він має в застосуванні до розв'язку вказаної проблеми і істотній недолік: метод не дозволяє дослідити динаміку системи при таких ситуаціях – при зближенні і відштовхуванні тіл. У цих випадках віддалі $r_0, r_1, r_2=r$ стають досить малими і в системах диференціальних рівнянь (5), (6) з'являється ряд сингулярностей. Наслідком цього є те, що ряди типу (11) будуть в моменти часу співударів і відштовхувань сильно розбігатись.

Для виходу з цієї складної ситуації К.Зундман запропонував метод заміни незалежної змінної; а саме – замість t введена нова змінна ω. Згідно формули

$$d\,t = \Gamma\, d\,\omega\,, \tag{12}$$

де $$\Gamma = \left(1 - \overline{e}^{\frac{r_0}{l}}\right)\left(1 - \overline{e}^{\frac{r_1}{l}}\right)\left(1 - \overline{e}^{\frac{r_2}{l}}\right); \tag{13}$$

$l = \dfrac{1}{3}\sqrt{m}\,L$ – константа, яку отримано при проведені ряду апріорних оцінок правих частин диференціальних рівнянь руху типу (5), (6) і інших.

К.Зундман рекомендує і інший тип заміни змінної:

$$\omega = \frac{2\Omega}{\pi}\log\frac{1+t}{1-t}, \quad t = \frac{e^{\frac{\pi\omega}{2\Omega}} - 1}{e^{\frac{\pi\omega}{2\Omega}} + 1}. \tag{14}$$

Тут Ω, як і величина l у формулі (13), спочатку вводяться як довільна величина; потім після проведення великого числа оцінок коефіцієнтів рівнянь руху він встановлює, з яких міркувань слід вибирати l і Ω, щоб ряди типу (11) по новій змінній ω рівномірно збігались $\forall \quad t \geq 0$, включаючи моменти співудару і відштовхування пар тіл.

Заслуговує уваги на те, щоб тут навести формулу для величини Ω, значення якої

К. Зундманом одержані в результаті проведення нетривіальних досліджень на багатьох десятках сторінок свого математичного твору. Маємо

$$\Omega = \frac{æ_1\sqrt{\dfrac{3\,æ_1}{\mathrm{M}}}}{\dfrac{15}{8}\dfrac{M}{m} + \dfrac{3}{2m}G^2 æ_1 + \dfrac{9}{2m}G\sqrt{M\,æ_1} + \dfrac{3}{4}|K|\,æ_1 + 224\sqrt{16\dfrac{M}{m}3|K|\,æ_1}}\,,(15)$$

Значить для покращення збіжності рядів, аналітичного продовження необхідно робити певної аналітичної структури заміни незалежної змінної.

Список літератури
1. Sundman K.F. Mémoire sur le probleme des trois corps. // Acta math., 1917 № 36, p.14-179.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.Ф. Функциональный анализ в нормированных пространствах. – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
3. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа. – М., Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
4. Каудерер Г. Нелинейная механика. – М.: Издательство иностранной литературы, 1961. – 715 с.
5. Каюк Я.Ф. Некоторые вопросы методов разложения по параметру. – К.: Наукова думка, 1980. – 163 с.

Одержано 22.05.16

УДК 657

А. О. Корольова, студ. гр. ОА-12 •
Кіровоградський національний технічний університет

Аналіз проекту Закону України «Про аудиторську діяльність»

У статті проаналізовано зміст запропонованого 03.04.2015 р. проекту Закону України «Про аудиторську діяльність», який націлений на зближення національного законодавства з європейським, а саме з Директивою 2014/56/ЄС
закон, проект, аудит, суспільний нагляд, самоврядування

Існуюча модель регулювання аудиторської діяльності, визначена у Законі України «Про аудиторську діяльність», була сформована у 1993 році. За останні роки в європейських країнах докорінно змінились принципи регулювання аудиторської діяльності. Суттєві зміни відбулися на світових фінансових ринках, у банківському

• Науковий керівник: канд. екон. наук, доц. Пугаченко О. Б.