УДК 621.664

Ю.В. Кулешков, проф., канд. техн. наук, А.А. Матвиенко, инж.,
Т.В. Руденко, канд. техн. наук, В.В. Русских, канд. техн. наук
Кировоградский национальный технический университет

Математическая модель торцевых радиально направленных утечек в шестеренном насосе типа НШ

Разработана математическая модель торцевых радиально направленных утечек рабочей жидкости шестеренного насоса путем определения эквивалентного угла зоны высокого давления и эквивалентного радиуса кольцевого торцевого зазора, что отвечает прерывистому профилю шестерен.
шестеренный насос, торцевой зазор, торцевые утечки, переходная зона, постоянная зона высокого давления, переменная зона высокого давления

Базовой моделью торцевых радиально направленных утечек (ТРН) является выражение, полученное А.Ф. Осиповым [1] для случая двух колец, сопрягающихся своими торцами, одно из которых вращается с постоянной угловой скоростью:

$$Q_{кольц} = \left[\Delta P - \frac{3\rho\cdot\omega^2}{20}(R^2 - r^2)\right]\frac{2\pi\cdot\delta^3}{12\mu\cdot\ln\frac{R}{r}}, \text{ мм}^3/\text{с}, \tag{1}$$

где $\frac{3\rho\cdot\omega^2}{20}(R^2 - r^2)$ – центробежная составляющая, препятствующая утечкам;

ρ – плотность рабочей жидкости, кг/м^3;

R – внешний радиус кольца, м;

r – внутренний радиус кольца, м;

μ – динамическая вязкость, Па с.

Применяя эту модель к шестеренным насосам, мы можем пренебречь центробежной составляющей, поскольку $\frac{3\rho\omega^2}{20}(R^2 - r_ц^2) << \Delta P$, а также заменить полный угол кольца 2π некоторым углом $\Delta\beta$, на котором происходят утечки:

$$Q_{кольц} = \Delta P\cdot\frac{\Delta\beta\cdot\delta^3}{12\mu\cdot\ln\frac{R}{r}}, \text{ мм}^3/\text{с}. \tag{2}$$

А.Ф. Осипов [1] не ставил своей целью адаптировать зависимость (1) к нуждам расчета ТРН утечек шестеренного насоса, а поэтому целью настоящего исследования является разработка математической модели торцевых радиально направленных утечек рабочей жидкости в сопряжении шестерен с втулками шестеренного насоса.

Объект исследования – внутренние утечки рабочей жидкости через торцевой зазор шестеренного насоса типа НШ, протекающие в радиальном направлении.

Предмет исследования – разработка и исследование математической модели радиально направленных утечек рабочей жидкости через торцевой зазор шестерен с втулками шестеренного насоса.

Прежде чем перейти к изложению материала, отметим ряд особенностей разрабатываемой математической модели торцевых радиально направленных утечек рабочей жидкости шестеренного насоса.

Первой особенностью является то, что зона высокого давления не распространяется по всему периметру окружности, а составляет только часть ее.

Вторая особенность состоит в том, что протяженность камеры высокого давления является величиной переменной, зависящей от фазы поворота шестерен насоса.

Третья заключается в том, что вращающееся "кольцо-шестерня" по своей конфигурации не является кольцом, а представляет собой прерывистую зубчатую поверхность, т.е. поверхность с переменным радиусом, что во многом является определяющим для ТРН утечек.

В качестве радиуса внешнего кольца все исследователи в формулу подставляли радиус окружности впадин R_i.

Относительно угловой протяженности зоны высокого давления у исследователей нет определенного мнения. Большинство исследователей следуют мнению авторов работы [2], которые рекомендуют в качестве угла подставлять величину ($\beta_{наг} + \beta_{вс}$). Для шестеренных насосов с удлиненной зоной высокого давления такая сумма будет равна без малого 2π, поскольку в области зацепления зоны высокого давления разделяются в точке, а в переходной зоне их разделяет вершинка зуба. Однако разные авторы подставляют самые разнообразные значения в интервале от 100° до 310°.

Рассмотрим условия протекания торцевых радиально направленных утечек на примере шестеренного насоса НШ-32УКФ-3. Следует отметить, что характер и направленность ТРН утечек прежде всего обуславливается конструкцией втулки и шестерни. В частности, как видно из рисунка 1 втулка насоса НШ-32УКФ-3 имеет кольцевую канавку (КК) и канавку охлаждения (КО), которая напрямую соединяет кольцевую канавку втулки с камерой всасывания. В связи с этим, за внутренний радиус кольца в выражении (2) следует принимать не радиус цапфы шестерни, а внешний радиус кольцевой канавки, который в насосе НШ-32УКФ-3 равен $r = 18$ мм. Таким образом, схему ТРН утечек можно представить в виде рисунка 1.

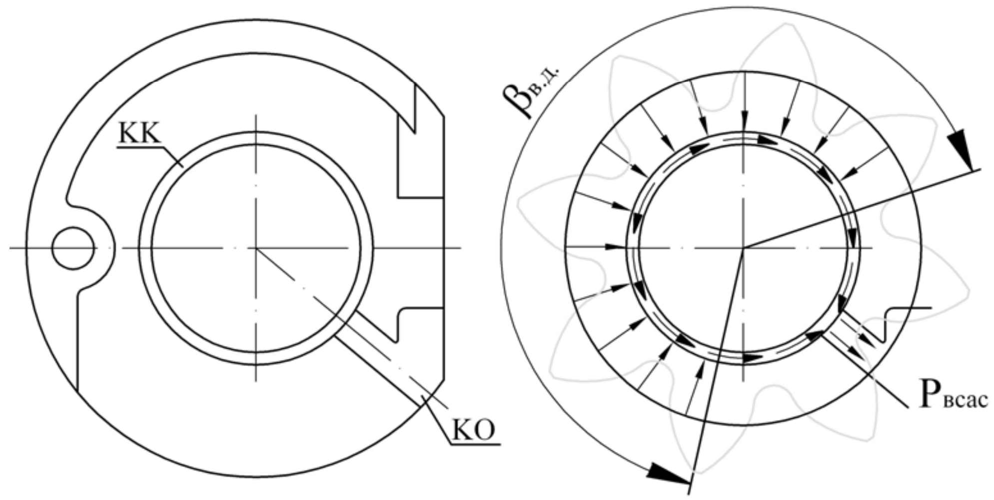

Рисунок 1 – Конструкция втулки и схема торцевых радиально направленных утечек

Разрабатывая математическую модель ТРН утечек рабочей жидкости в шестеренном насосе, следует учитывать, что утечки являются периодической функцией, зависящей от шестерни и от фазы ее поворота. Это объясняется тем, что профиль шестерен отличен от цилиндрической поверхности, т.е. имеют прерывистый характер, а фазы поворота ведущей и ведомой шестерни различны.

За начало цикла принимаем момент смены пары уплотняющих зубьев, то есть момент, когда защемленный объем, находящийся между двумя парами зубьев, дошел до своего минимального значения. В шестеренных насосах с одинаковыми шестернями этот момент наступает в средине существования защемленного объема. Таким образом, если угловая протяженность существования защемленного объема выражается как $\varphi_{з.об} = \frac{2\pi}{z} \cdot (\varepsilon - 1)$, то для определения угла начала цикла, нужно к углу, соответствующему моменту образования новой пары зубьев прибавить угол, равный $\frac{\varphi_{з.об}}{2} = \frac{\pi}{z} \cdot (\varepsilon - 1)$.

Как отмечено выше зона высокого давления шестеренного насоса является переменной величиной, которую можно представить в виде трех слагаемых (рис. 2):

$$\Delta\beta(\varphi_{пов}) = \Delta\beta_{пост} + \Delta\beta_{о.з.}(\varphi_{пов}) + \Delta\beta_{п.з.}(\varphi_{пов}), \qquad (3)$$

где $\Delta\beta_{пост}$ – угол постоянной зоны высокого давления, рад;

$\Delta\beta_{о.з.}$ – угол переменной зоны высокого давления в области зацепления, рад;

$\Delta\beta_{п.з.}$ – угол переменной зоны высокого давления в переходной зоне, рад.

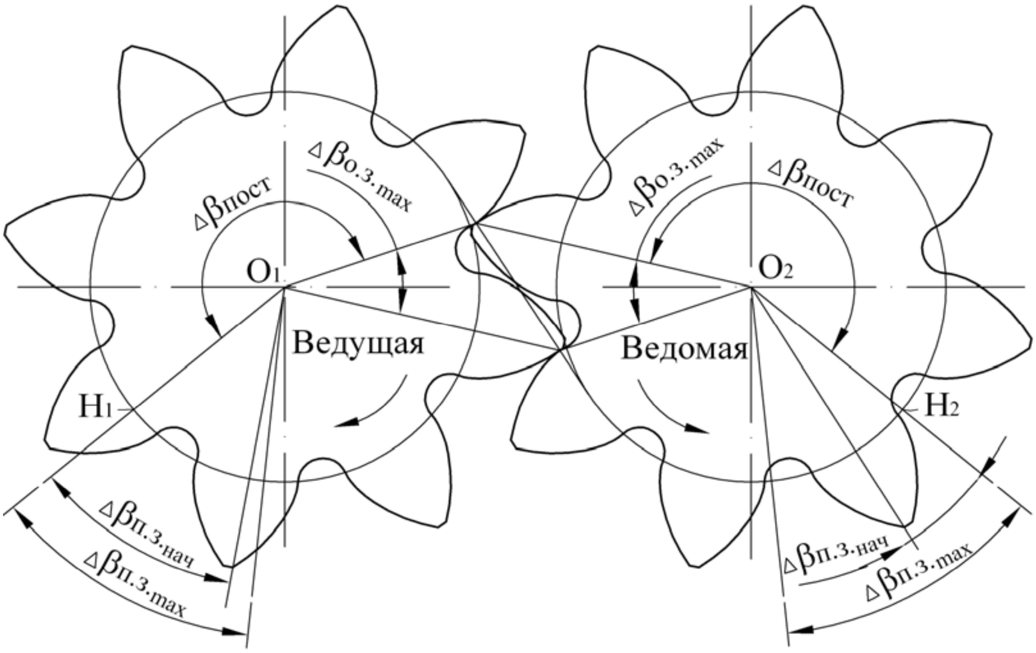

Рисунок 2 – Зоны высокого давления ведущей и ведомой шестерен на примере насоса НШ-32УКФ-3

В зоне высокого давления существует определенный участок, который остается неизменным при работе насоса. Угол, соответствующий этому участку назовем углом постоянной зоны высокого давления $\Delta\beta_{пост}$ (рис. 2). Он распространяется от точки разделения камер высокого и низкого давления в области зацепления в момент смены пары уплотняющих зубьев до точки конструктивного завода высокого давления (точки H_1, H_2).

Угол переменной зоны высокого давления в области зацепления $\Delta\beta_{о.з.}$ в начальный момент цикла равен нулю и за угол поворота шестерни $\frac{2\pi}{z}$ доходит до своего максимального значения $\Delta\beta_{о.з._{\max}}$ (см. рис. 2), после чего все повторяется.

Максимальный угол переменной зоны высокого давления в переходной зоне $\Delta\beta_{п.з.}$ равен $\Delta\beta_{п.з._{\max}} = \dfrac{2\pi}{z}$. Однако в начале цикла его значение не максимальное и равно $\Delta\beta_{п.з._{нач}}$.

Чтобы найти углы постоянной зоны высокого давления ведущей и ведомой шестерни, нам нужны углы наклона радиус-векторов этих шестерен в точке зацепления в момент средины существования защемленного объема и угол конструктивного завода высокого давления.

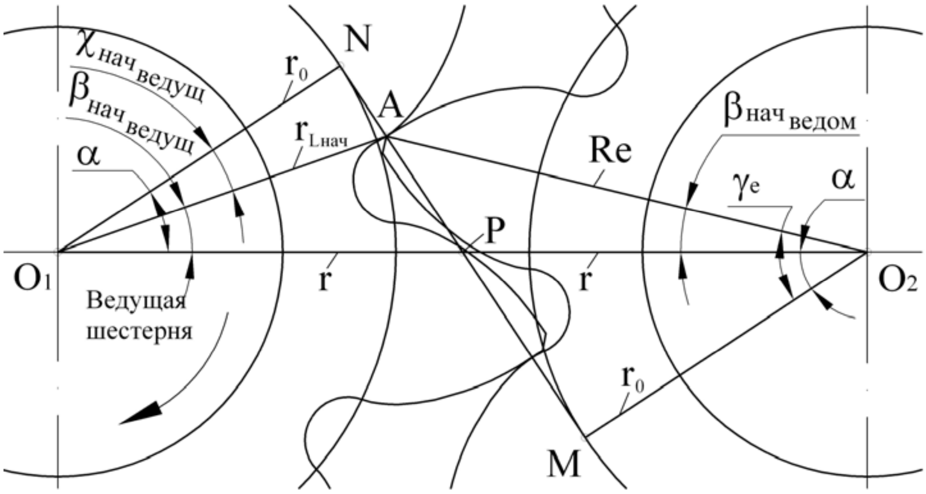

Рисунок 3 – Углы наклона радиус-векторов ведущей и ведомой шестерен в момент начала зацепления новой пары зубьев

Угол наклона радиус-вектора ведомой и ведущей шестерен в точке зацепления в момент начала зацепления новой пары зубьев (рис. 3):

Аналізуючи формулу (1) автор праці [3] стверджує, що при її виведенні допущенна помилка, внаслідок якої вдвічі перебільшена фрикційна складова. На його думку формула повинна мати такий вигляд:

$$\beta_{нач_{ведом}} = \gamma_e - \alpha ;$$

$$\beta_{нач_{ведущ}} = \alpha - \chi_{нач} = \alpha - \arccos\frac{r_o}{r_{нач}} .$$

Но разделение зон высокого и низкого давления происходит не в этой точке, а на угол $\dfrac{\varphi_{з.об}}{2}$ позже. Воспользуемся функциями перевода угла поворота шестерни $\varphi_{пов}$ в угол по линии зацепления χ:

- для ведомой шестерни:

$$\chi = arctg\left(tg\,\gamma_e - \varphi_{пов}\right);$$

- для ведущей шестерни:

$$\chi = arctg\left(\frac{\sqrt{r_{L_{нач}}^2 - r_o^2}}{r_o} + \varphi_{пов}\right).$$

В нашем случае $\varphi_{пов} = \frac{\varphi_{з.об}}{2} = \frac{\pi}{z} \cdot (\varepsilon - 1)$. Таким образом:

$$\chi_{ср.з.об_{ведом}} = arctg\left(tg\, \gamma_e - \frac{\pi}{z} \cdot (\varepsilon - 1) \right);$$

$$\chi_{ср.з.об_{ведущ}} = arctg\left(\frac{\pi}{z} \cdot (\varepsilon - 1) + \frac{\sqrt{r_{L_{нач}}^2 - r_o^2}}{r_o} \right).$$

Таким образом, угол наклона радиус-вектора в точке зацепления ведомой и ведущей шестерен в момент средины существования защемленного объема находится из выражений:

$$\beta_{ср.з.об_{ведом}} = \chi_{ср.з.об} - \alpha;$$

$$\beta_{ср.з.об_{ведом}} = arctg\left(tg\, \gamma_e - \frac{\pi}{z} \cdot (\varepsilon - 1) \right) - \alpha;$$

$$\beta_{ср.з.об_{ведущ}} = \alpha - \chi_{ср.з.об};$$

$$\beta_{ср.з.об_{ведущ}} = \alpha - arctg\left(\frac{\pi}{z} \cdot (\varepsilon - 1) + \frac{\sqrt{r_{L_{нач}}^2 - r_o^2}}{r_o} \right).$$

Со стороны камеры всасывания угол постоянной зоны высокого давления определяется конструктивным заводом высокого давления, который выполняется в виде выточки на втулке. Например, в насосе НШ-32УКФ-3 этот угол равен 219° ($\beta_{констр} = \frac{219}{180}\pi$). Таким образом, постоянный угол зоны высокого давления будет равен:

$$\Delta\beta_{пост_{ведом}} = \beta_{констр} - \beta_{ср.з.об_{ведом}};$$

$$\Delta\beta_{пост_{ведом}} = \beta_{констр} + \alpha - arctg\left(tg\, \gamma_e - \frac{\pi}{z} (\varepsilon - 1) \right);$$

$$\Delta\beta_{пост_{ведущ}} = \beta_{констр} - \beta_{ср.з.об_{ведущ}};$$

$$\Delta\beta_{пост_{ведущ}} = \beta_{констр} - \alpha + arctg\left(\frac{\pi}{z} \cdot (\varepsilon - 1) + \frac{\sqrt{r_{L_{нач}}^2 - r_o^2}}{r_o} \right).$$

Рассмотрим теперь, как изменяются переменные зоны высокого давления.

Угол переменной зоны высокого давления ведущей и ведомой шестерни в области зацепления $\Delta\beta_{о.з}$ можно найти, используя формулы перевода угла поворота шестерни $\varphi_{пов}$ в угол по линии зацепления χ.

Для ведомой шестерни:

$$\Delta\beta_{пост_{ведом}} = \beta_{констр} - \beta_{ср.з.об_{ведом}};$$

$$\Delta\beta_{о.з}(\varphi_{пов}) = arctg\left(tg\, \gamma_e - \frac{\pi}{z} \cdot (\varepsilon - 1) \right) - arctg\left(tg\, \gamma_e - \frac{\pi}{z} \cdot (\varepsilon - 1) - \varphi_{пов} \right).$$

Для ведущей шестерни:

$$\Delta\beta_{о.з}(\varphi_{пов}) = arctg\left(tg\, \chi_{ср.з.об_{ведущ}} + \varphi_{пов}\right) - \chi_{ср.з.об_{ведущ}};$$

$$\Delta\beta_{о.з}(\varphi_{пов}) = arctg\left(\frac{\pi}{z} \cdot (\varepsilon - 1) + \frac{\sqrt{r_{L_{нач}}^2 - r_o^2}}{r_o} + \varphi_{пов} \right) - arctg\left(\frac{\pi}{z} \cdot (\varepsilon - 1) + \frac{\sqrt{r_{L_{нач}}^2 - r_o^2}}{r_o} \right).$$

Начальный угол $\Delta\beta_{о.з}$ равен нулю, а максимального значения угол $\Delta\beta_{о.з}$ будет достигать при $\varphi_{пов} = \frac{2\pi}{z}$.

Угол переменной зоны высокого давления в переходной зоне изменяется по линейному закону, согласно углу повороту:

$$\Delta\beta_{п.з.}(\varphi_{пов}) = \frac{2\pi}{z} - \varphi_{пов}.$$

Зная законы изменения углов зоны высокого давления на протяжении цикла, найдем эквивалентный угол высокого давления:

$$\Delta\beta_{в.д.экв} = \frac{z}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{z}}\left[\Delta\beta_{пост} + \Delta\beta_{п.з.}(\varphi_{пов}) + \Delta\beta_{о.з.}(\varphi_{пов})\right]d\varphi_{пов}.$$

Интегрируя эти функции, мы получим окончательные выражения эквивалентного угла зоны высокого давления ведущей и ведомой шестерен.

Эквивалентный угол зоны высокого давления ведомой шестерни:

$$\Delta\beta_{в.д.экв} = \Delta\beta_{пост} + \frac{\pi}{z} + \frac{z}{4\pi}\cdot\ln\left(\frac{1+\left(tg\gamma_e - \frac{\pi}{z}(\varepsilon-1)\right)^2}{1+\left(tg\gamma_e - \frac{\pi}{z}(\varepsilon+1)\right)^2}\right) -$$

$$-\left(\frac{z\cdot tg\gamma_e}{2\pi} - \frac{\varepsilon+1}{2}\right)\cdot\left(arctg\left(tg\gamma_e - \frac{\pi}{z}(\varepsilon-1)\right) - arctg\left(tg\gamma_e - \frac{\pi}{z}(\varepsilon+1)\right)\right).$$

Эквивалентный угол зоны высокого давления ведущей шестерни:

$$\Delta\beta_{в.д.экв} = \Delta\beta_{пост} + \frac{\pi}{z} - \frac{z}{4\pi}\cdot\ln\left(\frac{1+\left(\frac{\sqrt{r_{L_{нач}}^2 - r_o^2}}{r_o} + \frac{\pi}{z}(\varepsilon+1)\right)^2}{1+\left(\frac{\sqrt{r_{L_{нач}}^2 - r_o^2}}{r_o} + \frac{\pi}{z}(\varepsilon-1)\right)^2}\right) -$$

$$-\left(\frac{z}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{r_{L_{нач}}^2 - r_o^2}}{r_o} + \frac{\varepsilon+1}{2}\right)\cdot\left[arctg\left(\frac{\sqrt{r_{L_{нач}}^2 - r_o^2}}{r_o} + \frac{\pi}{z}(\varepsilon+1)\right) - arctg\left(\frac{\sqrt{r_{L_{нач}}^2 - r_o^2}}{r_o} + \frac{\pi}{z}(\varepsilon-1)\right)\right].$$

На примере насоса НШ-32УКФ-3 получаем такие результаты:

- для ведущей шестерни $\Delta\beta_{в.д._{экв}} = 240{,}58°$;

- для ведомой шестерни $\Delta\beta_{в.д._{экв}} = 242{,}42°$.

Как было отмечено выше, рассматриваемый торцевой зазор шестеренного насоса в действительности не является кольцевым, а имеет зубчатый профиль.

При этом исследуемый элемент шестерни можно разбит на четыре сектора (см. рис. 4):

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \frac{2\pi}{z},$$

где φ_1 – отрезок, отвечающий межзубовой впадине, $\varphi_1 = \frac{2\pi}{z} - 2inv\gamma_e - \varphi_e$;

φ_2, φ_4 – отрезки, отвечающие эвольвентным частям зуба, $\varphi_2 = \varphi_4 = inv\gamma_e$;

φ_3 – отрезок, отвечающий вершине зуба, $\varphi_3 = \varphi_e = \varphi + 2inv\alpha - 2inv\gamma_e$;

γ_e – угол радиус-вектора эвольвенты в вершине зуба, $\gamma_e = \arccos\dfrac{r_o}{R_e}$, рад;

φ – центральный угол, соответствующий дуге начальной окружности, рад;

α – угол зацепления передачи, рад.

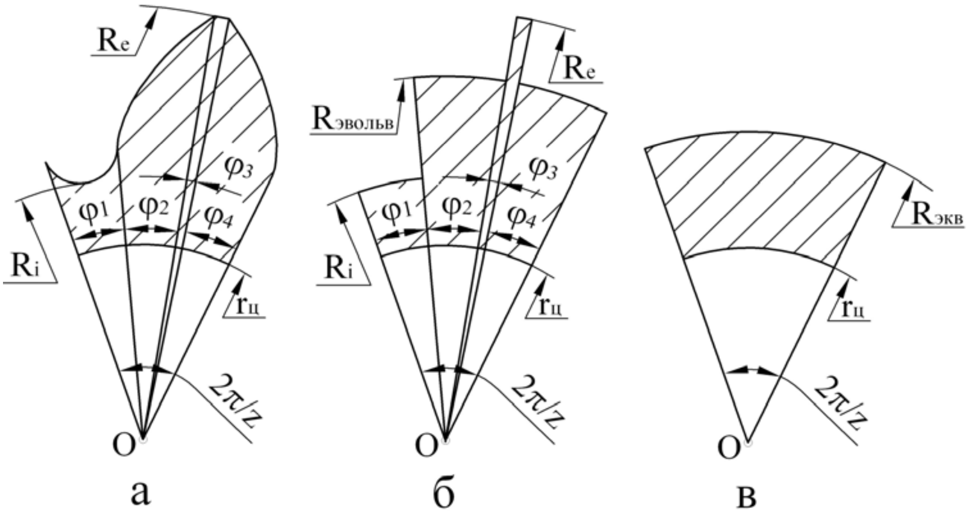

Рисунок 4 – Поэтапный переход от реальной к эквивалентной схеме математической модели торцевых радиально направленных утечек

На первом этапе перейдем к эквивалентной схеме (рисунок 4, б), у которой эвольвентные участки заменены кольцевыми, через которые проходит такая же величина утечек.

Разделив угол, соответствующий эвольвентной части на бесконечное число секторов и воспользовавшись формулами эвольвентной геометрии получаем формулу ТРН утечек через эвольвентную часть:

$$Q = \frac{\Delta p \cdot \delta_{TPH}^3}{12 \cdot \mu} \cdot \int_0^{\gamma_e} \frac{tg^2\gamma}{\ln\frac{r_o}{r} - \ln\cos\gamma} d\gamma .$$

Получить аналитическое решение данного интеграла не удается, но числовыми методами данный интеграл подсчитывается. Найдем эквивалентный радиус эвольвентной части, приравняв выражения:

$$\frac{\Delta p \cdot \delta_{TPH}^3 \cdot inv\gamma_e}{12 \cdot \mu \cdot \ln\frac{R_{эвольв}}{r}} = \frac{\Delta p \cdot \delta_{TPH}^3}{12 \cdot \mu} \cdot \int_0^{\gamma_e} \frac{tg^2\gamma}{\ln\frac{r_o}{r} - \ln\cos\gamma} d\gamma ;$$

$$R_{эвольв} = r \cdot e^{\frac{inv\gamma_e}{\int_0^{\gamma_e} \frac{tg^2\gamma}{\ln\frac{r_o}{r} - \ln\cos\gamma} d\gamma}} . \quad (4)$$

Найдем теперь утечки через весь угловой шаг $\dfrac{2\pi}{z}$ как сумму утечек через все сектора углового шага:

$$Q_{шага} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 .$$

Учитывая, что утечки через эвольвентные сектора Q_2 и Q_4 равны между собой, можем записать:

$$Q_{шага} = \frac{\Delta P \cdot \varphi_1 \cdot \delta_{TPH}^3}{12 \cdot \mu \cdot \ln \frac{R_i}{r}} + 2 \cdot \frac{\Delta P \cdot \varphi_2 \cdot \delta_{TPH}^3}{12 \cdot \mu \cdot \ln \frac{R_{эвольв}}{r}} + \frac{\Delta P \cdot \varphi_3 \cdot \delta_{TPH}^3}{12 \cdot \mu \cdot \ln \frac{R_e}{r}}.$$

Найдем эквивалентный внешний радиус сектора кольцевого зазора всего углового шага, через который протекает такая же величина утечек (рис. 4, в):

$$\frac{\Delta P \cdot \frac{2\pi}{z} \cdot \delta_{TPH}^3}{12\mu \cdot \ln \frac{R_{экв}}{r}} = \frac{\Delta P \cdot \varphi_1 \cdot \delta_{TPH}^3}{12\mu \cdot \ln \frac{R_i}{r}} + 2 \cdot \frac{\Delta P \cdot \varphi_2 \cdot \delta_{TPH}^3}{12\mu \cdot \ln \frac{R_{эвольв}}{r}} + \frac{\Delta P \cdot \varphi_3 \cdot \delta_{TPH}^3}{12 \cdot \mu \cdot \ln \frac{R_e}{r}}.$$

Подставим соответствующие значения углов φ_1, φ_2, φ_3 и упростив выражение:

$$\frac{\frac{2\pi}{z}}{\ln \frac{R_{экв}}{r}} = \frac{\frac{2\pi}{z} - 2 \cdot inv\gamma_e - \varphi_e}{\ln \frac{R_i}{r}} + \frac{2 \cdot inv\gamma_e}{\ln \frac{R_{эвольв}}{r}} + \frac{\varphi_e}{\ln \frac{R_e}{r}}.$$

Выразим эквивалентный радиус и упростим выражение:

$$R_{экв} = r \cdot e^{\frac{\pi \cdot \ln \frac{R_{эвольв}}{r} \cdot \ln \frac{R_i}{r} \cdot \ln \frac{R_e}{r}}{\pi \cdot \ln \frac{R_{эвольв}}{r} \cdot \ln \frac{R_e}{r} - z \cdot inv\gamma_e \cdot \ln \frac{R_e}{r} \cdot \ln \frac{R_{эвольв}}{R_i} - \frac{z\varphi_e}{2} \cdot \ln \frac{R_{эвольв}}{r} \cdot \ln \frac{R_e}{R_i}}}. \quad (5)$$

Таким образом, математическая модель торцевых радиально направленных утечек:

$$Q = \frac{\Delta p \cdot \Delta\beta_{в.д._{экв}} \cdot \delta_{TPH}^3}{12 \cdot \mu \cdot \ln \frac{R_{экв}}{r}},$$

где $\Delta\beta_{в.д._{экв}}$ описывается уравнениями (2), (3), а $R_{экв}$ описывается уравнениями (4), (5).

Сравним полученную модель ТРН утечек, моделью, которая применялась до сих пор (рисунок 5). У этой модели за радиус внешнего кольца принимался радиус впадин R_i, а угловая протяженность принималась 5,36 радиана.

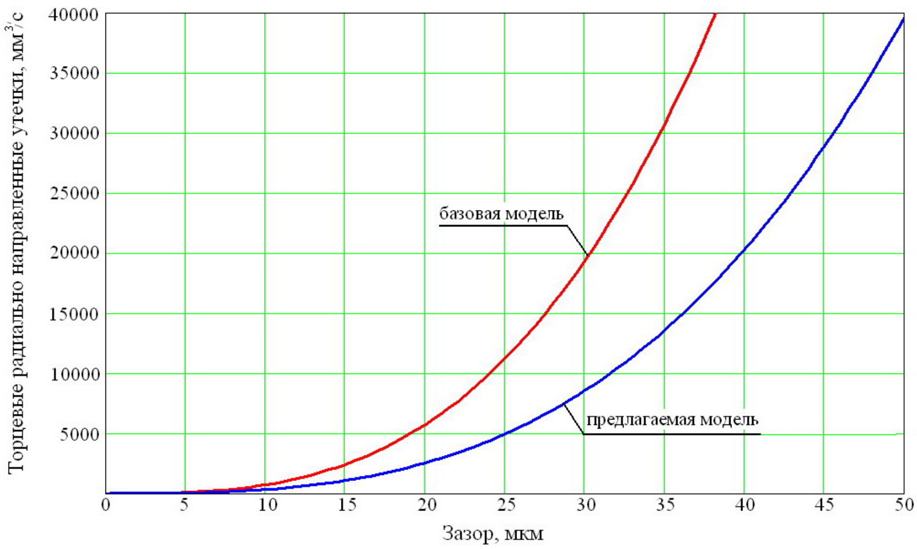

Рисунок 5 – Графические зависимости, соответствующие базовой и предлагаемой математическим моделям ТРН утечек на примере шестеренного насоса НШ-32УКФ-3

Из рисунка 5 видим, что предлагаемая модель, учитывающая особенности ТРН утечек в шестеренном насосе позволяет уточнить величину этих утечек.

Выводы

1. Анализ математических моделей утечек рабочей жидкости через торцовый зазор в радиальном направлении показал, что известные модели не адаптированы в полной мере к условиям утечек рабочей жидкости через этот зазор в шестеренном насосе.

2. Разработанная математическая модель радиальных утечек рабочей жидкости через торцовый зазор шестеренного насоса, позволяет учитывать переменный характер угла высокого давления и зубчатый профиль шестерен насоса.

3. Указанные особенности условий радиальных утечек через торцовый зазор шестеренного насоса учтены путем определения эквивалентного угла переменной зоны высокого давления, зависящего от угла поворота шестерен и путем определения эквивалентного радиуса, соответствующего зубчатому профилю шестерен насоса.

4. Разработанная математическая модель позволила уточнить величину ТРН утечек в шестерном насосе.

5. Полученная математическая модель утечек рабочей жидкости предполагает возможность анализа влияния параметров зубчатого зацепления шестеренного насоса на утечки через этот зазор.

Список літератури

1. А.Ф. Осипов. Объемные гидравлические машины. М.: «Машиностроение», 1966. – 159 с.
2. Рыбкин Е.А., Усов А.А. Шестеренные насосы для металлорежущих станков. – М.: Машгиз, 1960. – 189 с.
3. Юдин Е.М. Шестеренные насосы. – М.: Машиностроение, 1964. – 236 с.

Розроблена математична модель торцевих радіально направлених втрат робочої рідини шестеренного насоса шляхом визначення еквівалентного кута зони високого тиску і еквівалентного радіуса кільцевого торцевого зазора, що відповідає переривистому профілю шестерень.

The mathematical model of the radially directed losses of butt ends of working liquid of gear pump is developed by determination of equivalent corner of area of high pressure and equivalent radius of circular butt end gap, that answers the irregular type of cog-wheels.