

The design of the screw loader-mixer is presented and resonance oscillations of the horizontal working body of this loader are investigated. The defining parameter of the dynamics of the worker screw of the mixer loader is the amplitude and frequency of its nonlinear oscillations.

The laws of changing these parameters are determined by the geometric, physical and mechanical properties of its material, the velocity along its grain mixture, the angular velocity of its rotation, and external factors (forces of resistance and external periodic forces). The dependence of the resonance oscillations on various values of the speed of the grain mixture, its linear mass, and the various angular velocities of the rotation of the horizontal working body for different frequencies of external perturbation is derived.

It is established that if the process of mixing or transporting materials takes place in the pre-resonant zone of oscillation, then by reducing the angular velocity of rotation of the GS can be obtained for a short time on the resonant frequency.

**amplitude, screw spiral, screw loader mixer, oscillation, resonance**

Одержано 04.12.17

**УДК 681.513.5**

**Б.М. Гончаренко, д-р техн. наук, О.П. Лобок, канд. фіз.-мат. наук, М.А. Сич, асп.**

*Національний університет харчових технологій, м. Київ, Україна*

*E-mail: goncharenkobn@i.ua*

**Л.Г. Віхрова, проф. канд. техн. наук**

*Центральноукраїнський національний технічний університет, м.Кропивницький, Україна*

## Математичне моделювання процесу біологічного очищення забруднених вод як об'єкта автоматичного керування

Наведені та обґрунтовані прийняті припущення при складанні математичної моделі процесу. Представлена і розглянута структурно-параметрична схема технологічного процесу біологічного очищення забруднених вод. Наведена в диференціальному вигляді математична модель та дані роз'яснення складових. Вибрані вхідна (керувальна) та вихідна (керована) величини моделі за каналом керувального діяння. З метою подальшого полегшення розв'язку наводяться вираз математичної моделі у векторному вигляді та вираз керованої величини. Проведена лінеаризація моделі та наведений її лінеаризований вигляд. Наведені вирази дискретних операторів критерія якості керування процесом очищення, дробового  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ - регулятора та системи керування вцілому. Наведені результати чисельного моделювання системи керування процесом очищення води на основі розробленої моделі.

**біологічне очищення води, математичне моделювання, оптимальне керування, чисельне моделювання, дробовий регулятор**

**Б.Н. Гончаренко, проф., д-р техн. наук, А.П. Лобок, канд. фіз.-мат. наук, М.А. Сыч, асп.**

*Національний університет пищевых технологий, г. Киев, Украина*

**Л.Г. Вихрова, проф., канд. техн. наук**

*Центральноукраинский национальный технический университет, г.Кропивницкий, Украина*

**Математическое моделирование процесса биологической очистки загрязненных вод как объекта автоматического управления**

Приведены и обоснованы принятые допущения при составлении математической модели процесса. Представлена и рассмотрена структурно-параметрическая схема технологического процесса биологической очистки загрязненных вод. Приведена в дифференциальном виде математическая модель и даны разъяснения её составляющих. Избраны входная (управляющая) и выходная (управляемая) величины модели по каналу управляющего воздействия. Для дальнейшего облегчения решения приводятся в векторном виде выражения математической модели и управляемой величины. Проведена линеаризация модели и приведен ее линеаризованный вид. Приведены выражения дискретных операторов критерия качества управления процессом очистки, дробного  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  - регулятора и системы управления, а также результаты численного моделирования системы управления процессом очистки воды на основе разработанной модели.

**биологическая очистка воды, математическое моделирование, оптимальное управление, численное моделирование, дробный регулятор**

**Вступ.** Математичні моделі динаміки технологічних процесів в класичному вигляді передбачаються у формі системи диференціальних рівнянь. Але наразі застосування при синтезі автоматичних систем керування регуляторів дробових порядків в складі системи вимагає певного перетворення системи диференціальних рівнянь, оскільки дробове числення має одночасно справу з похідними і інтегралами довільного порядку (раціонального, дійсного і навіть комплексного). Тому приклад перетворення системи диференціальних рівнянь, а заодно і супутніх виразів дробового регулятора і критерія якості керування процесом очищення води уявляється досить актуальним.

**Постановка проблеми.** Традиційно теорія і практика автоматичного керування орієнтовані на застосування при синтезі автоматичного керування технологічними процесами математичних моделей у вигляді системи класичних диференціальних рівнянь. Навіть з розвитком дробового числення, що фактично об'єднує диференціальне з інтегральним численням, і з застосуванням дробових законів керування, побудови дробових регуляторів і систем керування на їх основі залишається потреба у складанні математичних моделей у класичному диференціальному, хоч і перетвореному вигляді для синтезу сучасних систем автоматичного керування різноманітними технологічними процесами.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Початком розвитку теорії інтегро-диференціального числення дробового порядку [1] слід вважати її застосування в задачах керування технологічними процесами, що з'явилися близько 50 років тому [2]. Доведено, що дробове числення ефективно для опису численних динамічних систем та  $PID$ -регуляторів [3], що відтак стають дробового порядку і тому позначаються як  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , де  $\lambda$  і  $\mu$  – порядки інтегрування і диференціювання сигналу похибки, які можуть бути як дійсними цілими, так і дробовими [4].

**Постановка завдання.** Метою статті є складання математичної моделі технологічного процесу на прикладі біологічного очищення забруднених вод та її відповідне перетворення до придатного при синтезі автоматичної системи керування вигляду.

**Виклад основного матеріалу.** У даній роботі розглянуто задачу математичного моделювання процесу біологічного очищення забруднених стічних вод активним мулом. Процес біоочищення як об'єкт керування будемо розглядати при наступних припущеннях:

- система працює в стаціонарному режимі, тобто вхідна і вихідна швидкості потоків постійні ( $F_{in} = F_{out} = F$ );

- швидкість подання рециркулюючого мулу пропорційна швидкості потоку процесу ( $F$ ), тобто  $F_r = r \cdot F$ , де  $r$  – коефіцієнт (ступінь, частка) рециркуляції активного мулу;
- потік видаляемого мулу з біореактора (надлишковий мул) вважається також пропорційним швидкості потоку ( $F$ ), тобто  $F_\beta = \beta \cdot F$ , где  $\beta$  – коефіцієнт видалення надлишкового мулу;
- в рециркуляційному потоці активного мулу в біореактор відсутні субстрат і розчинений кисень;
- вихідний потік з аеротенка дорівнює сумі вихідного потоку відстійника і потоку рециркулюючого мулу;
- концентрація розчиненого кисню змінюється швидше в порівнянні зі зміною інших параметрів очисної системи і може вважатися постійною;
- очисна система складається з реактора-аеротенка і відстійника (рис. 1).

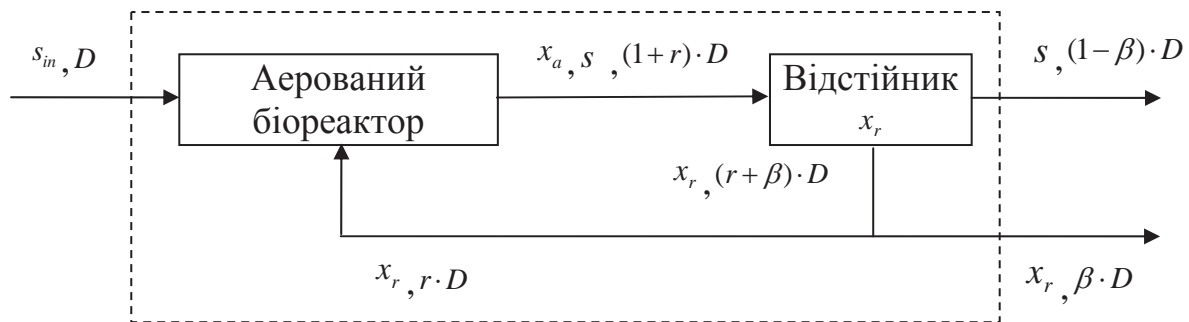


Рисунок 1 – Схема процесу очищення стічних вод

На рис. 1 зображений біореактор з сумішшю рідини і зважених твердих частинок. У біореакторі мікроорганізми розвиваються за рахунок органічних речовин субстрату. В результаті із забрудненої води видаляються органічні сполуки. Біореактором є перемішуваний аеротенк, в якому біологічно активні мікроорганізми (активний мул, біомаса) розчиняють (споживають) субстрат (органічні забруднюючі речовини). Зважені активні мікроорганізми відокремлюються в відстійнику (декантаторі). Частину концентрованої біомаси (мулу) повертають в біореактор, щоб підтримувати процес в системі. Для біосинтезу використовується кисень, що подається в біореактор. У відстійнику відбувається осадження твердих частинок біомаси, активний мул і очищена вода розділяються. Передбачається, що в відстійнику відсутня біореакція, а аеротенк є об'єктом ідеального змішування.

Математична модель, що описує очищення води за даною схемою, отримана на основі матеріального балансу для аератора і відстійника у вигляді наступної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx_a(t)}{dt} = \mu(t)x_a(t) - D(t)(1+r)x_a(t) + rD(t)x_r(t), \\ \frac{ds(t)}{dt} = -\frac{\mu(t)}{Y}x_a(t) - D(t)(1+r)s(t) + D(t)s_{in}(t), \\ \frac{dx_r(t)}{dt} = -D(t)(\beta+r)x_r(t) + D(t)(1+r)x_a(t), \end{cases} \quad (1)$$

де  $x_a(t)$ ,  $s(t)$  – відповідно концентрація біомаси і субстрату в біореакторі;

$x_r(t)$  – концентрація рециркуляційної біомаси;

$D(t)$  – ступінь розведення, який визначається як  $D(t) = F(t)/V$ , де  $F(t)$  – об'ємна швидкість потоку,  $V$  – обсяг біореактора;

$s_{in}(t)$  – концентрація субстрату у вхідному потоці;

$Y$  – фактор виходу (прибутковості) біомаси;

$\mu(t)$  – питома швидкість росту біомаси, яка визначається за формулою Моно [3],

$$\mu(t) = \mu_{\max} \frac{s(t)}{k_s + s(t)}, \quad (2)$$

де  $\mu_{\max}$  – максимальна питома швидкість росту біомаси;

$k_s$  – константа насичення, що визначається експериментальним шляхом;

$r, \beta$  – коефіцієнти, що визначають відповідно відношення рециркуляційного потоку і потоку відходів біомаси до вхідного потоку;

$x_{a0}, s_0, x_{r0}$  – відповідно концентрація біомаси, субстрату і рециркуляційної біомаси в початковий момент часу  $t_0$ ;

$t_0 < t \leq T$ ,  $T$  – кінцевий момент часу керування процесом.

В якості керованого параметра (вихід моделі) виберемо величину  $s(t)$  – концентрацію субстрату в біореакторі, яка визначає якість очищення води. В якості керовального впливу (дії) на систему виберемо функцію ступіню розведення  $D(t)$ .

Для зручності систему (1) запишемо у векторному вигляді [4]

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)), & t_0 < t \leq T, \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad (3)$$

де

$$f(x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} f_1(x(t), u(t)) \\ f_2(x(t), u(t)) \\ f_3(x(t), u(t)) \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a(t) \\ s(t) \\ x_r(t) \end{pmatrix}, \quad u(t) = D(t), \quad (4)$$

$$f_1(x(t), u(t)) = \mu(x(t))x_1(t) - (1+r)x_1(t)u(t) + rx_3(t)u(t),$$

$$f_2(x(t), u(t)) = -\frac{\mu(x(t))}{Y}x_1(t) - (1+r)x_2(t)u(t) + s_{in}(t)u(t),$$

$$f_3(x(t), u(t)) = -(\beta+r)x_3(t)u(t) + (1+r)x_1(t)u(t),$$

$$\mu(x(t)) = \mu_{\max} \frac{x_2(t)}{k_s + x_2(t)}.$$

Керований параметр при цьому запишеться так

$$s(t) = x_2(t) = c^T x(t), \quad (5)$$

де  $c = (0 \ 1 \ 0)^T$ .

Лінеаризуючи перетворену систему (3) в околі заданого номінального керування  $u^*$  і відповідного йому вектора рівноважного стану  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)^T$ , при якому

$f(x^*, u^*) = 0$  і який визначається як розв'язок системи нелінійних рівнянь  $f(x, u^*) = 0$  щодо вектора  $x$ , введемо позначення

$$\Delta x(t) = \begin{pmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \\ \Delta x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) - x_1^* \\ x_2(t) - x_2^* \\ x_3(t) - x_3^* \end{pmatrix} = x(t) - x^*, \quad \Delta u(t) = u(t) - u^*. \quad (6)$$

Тоді лінеаризована система рівнянь моделі (3) представляється у вигляді

$$\begin{cases} \frac{d\Delta x(t)}{dt} = A\Delta x(t) + b\Delta u(t), \\ \Delta x(t_0) = x^0 - x^*, \end{cases} \quad (7)$$

З огляду на співвідношення (3) і позначення (7), рівняння для керованої змінної (вихід моделі) запишеться у вигляді

$$\Delta s(t) = c^T \Delta x(t), \quad (8)$$

де  $\Delta s(t) = s(t) - c^T x^*$ .

Лінеаризована модель керування (7) процесу біоочищення має один вхід  $\Delta u(t)$  і один вихід у вигляді оператора від стану  $\Delta x(t)$ . Відомим способом стабілізації потрібних (вихідних) параметрів об'єкта керування є застосування регуляторів у зворотному зв'язку об'єкта в складі контура автоматизованої системи керування. Використаємо дробовий  $PI^\lambda D^\mu$ - регулятор [1,2], який представимо у вигляді

$$\Delta u(t) = k_p (\Delta s(t)) + k_I \left( {}_{t_0} D_t^{-\lambda} \Delta s(t) \right) + k_D \left( {}_{t_0} D_t^\mu \Delta s(t) \right), \quad (9)$$

За критерій якості автоматичного керування функціонуванням системи біологічного очищення води доцільно прийняти наступний оператор, з урахуванням якого знайдеться оптимальний розв'язок задачі.

$$J_p = \int_{t_0}^T |\Delta s(t)|^p dt = \int_{t_0}^T |c^T \Delta x(t)|^p dt, \quad (10)$$

де  $p > 0$  – параметр, який на практиці приймають рівним  $p = 1$  (модуль похибки) або  $p = 2$  (середньоквадратична похибка).

Для чисельної реалізації сформульованої задачі оптимального регулювання дискретизуємо систему (7), дробовий  $PI^\lambda D^\mu$ - регулятор (9) і критерій (10), розбивши часовий інтервал  $[t_0, T]$  на  $n$  частин з кроком  $h = (T - t_0) / n$  ( $h$  – період квантування). Точки розбиття в  $[t_0, T]$  позначимо через  $t_k$ , а стан системи (7) в ці моменти часу  $t_k$  – через  $z_k = \Delta x(t_k)$ .

Апроксимувавши неперервний вхідний сигнал  $\Delta u(t)$  кусочно постійною функцією:  $\Delta u(t) = u_k$  при  $t_k \leq t < t_{k+1}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  і, використовуючи матрицю лінійної неперервної системи (7), отримаємо наступний її дискретний аналог

$$\begin{cases} z_{k+1} = e^{Ah} z_k + A^{-1}(E - e^{-Ah}) b u_k, & k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ z_0 = x^0 - x^*, \end{cases} \quad (11)$$

де  $E$  – одинична матриця;  $e^{Ah}$  – матрична експонента.

Далі дискретний дробовий  $PI^\lambda D^\mu$ - регулятор представимо у вигляді

$$u_k = c^T \left( k_p(z_k) + k_I \left( h^\lambda \sum_{j=0}^k w_j^{(-\lambda)} z_{k-j} \right) + k_D \left( h^{-\mu} \sum_{j=0}^k w_j^{(\mu)} z_{k-j} \right) \right). \quad (12)$$

Критерій якості (10) запишемо в дискретизованому вигляді

$$J_p = \frac{h}{2} \left( |c^T z_0|^p + 2 \sum_{j=1}^{n-1} |c^T z_j|^p + |c^T z_n|^p \right). \quad (13)$$

Чисельне моделювання керованої системи біоочищення і пошук оптимального регулятора здійснювалися при наступних вихідних даних:  $s_{in} = 200$  [мг/л],  $Y = 0.65$ ,  $\mu_{\max} = 0.15$  [год<sup>-1</sup>],  $k_s = 100$  [мг/л],  $r = 0.6$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $u^* = 0.05$  [год<sup>-1</sup>],  $t_0 = 0$ ,  $T = 1$  [год], вектор початкового стану системи (7) приймався рівним  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)^T = (286, 17, 568)^T$  [мг/л].

Використовувався метод повного перебору з рівномірним кроком для розв'язання завдання мінімізації критерію

$$I_p(\lambda, \mu) = \min_{k_p, k_I, k_D} J_p(k_p, k_I, k_D, \lambda, \mu) \quad (14)$$

відносно параметрів  $\lambda$  і  $\mu$ . Результати оптимізації методом повного перебору критерія (13) представлені в табл. 1.

Таблиця 1 – Оптимальні налаштування дробового  $PI^\lambda D^\mu$  та класичного  $PID$  - регуляторів

$p$	$\lambda$	$\mu$	$k_p$	$k_I$	$k_D$	$I_p(\lambda, \mu)$
1	1	1	-0.1381	-3.3019	-0.0016	0.0963
1	0.9750	0.750	-0.2231	0.0072	$-1.0847 \cdot 10^{-5}$	0.0854
2	1	1	-0.1294	-3.6445	-0.0015	0.1184
2	0.9875	0.600	-0.2234	0.0068	$-3.1249 \cdot 10^{-6}$	0.0855

В стовпчиках  $\lambda$  і  $\mu$  наведені порядки похідних і інтегралів дробових регуляторів, в шпальтах  $k_p, k_I, k_D$  – оптимальні налаштування цих регуляторів, в останньому стовпчику – мінімальне значення критерію (13). Тут же для порівняння наведені результати оптимізації для класичного  $PID$ -регулятора при  $\lambda = 1$  і  $\mu = 1$ .

Результати показують, що значення цільової функції  $I_p(\lambda, \mu)$  ( $p = 1, p = 2$ ) при оптимальному дробовому  $PI^\lambda D^\mu$  - регуляторі менші, ніж при класичному  $PID$  - регуляторі.

Порівняльний аналіз динаміки перехідних процесів показує більш високу швидкість і якість загасання при оптимальному дробовому  $PI^\lambda D^\mu$  - регуляторі ( $\lambda = 0.965, \mu = 0.5375$ ) в порівнянні з оптимальним класичним  $PID$  - регулятором ( $\lambda = 1, \mu = 1$ ). Видно, що оптимальні дробові регулятори з точним налаштуванням параметрів  $\lambda$  (порядок дробового інтеграла) і  $\mu$  (порядок дробової похідної) є більш ефективними порівняно з класичним  $PID$  - регулятором.

**Висновки.** Ступінь ефективності дробових регуляторів при застосуванні в складі системи автоматичного керування на основі класичної математичної моделі технологічного процесу і причини високої чутливості критерію оптимальності та перехідних процесів щодо порядків дробових похідних і інтегралів вимагають подальших досліджень.

## Список литературы

1. Авсиевич, А.В. Моделирование систем автоматического управления с дробным ПИД-регулятором [Текст] / А.В. Авсиевич, В.В. Авсиевич // Вестник Самарского государственного технического университета, сер. техническое науки. – 2010. – №1(26). – С. 6-59.
2. Бутковский, А.Г. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. II. Дробные динамические системы: моделирование и аппаратная реализация [Текст] / А.Г. Бутковский, С.С. Постнов, Е.А. Постнова // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 5. – С. 3-34.
3. Васильев, В.В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. [Текст] / В.В. Васильев, Л.А. Симак // Научное издание – Киев, НАН Украины, 2008. – 256 с.
4. Нахушев, А.М. Дробное исчисление и его применение [Текст] / А.М. Нахушев // – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

**Boris Goncharenko, Prof., PhD tech. sci., Olexsiy Lobok, Doctor of Phys&Math., Maryna Sych, post-graduate**

*National University of Food Technologies, Kiev, Ukraine*

**Larysa Vihrova, Prof., PhD tech. sci.**

*Central Ukrainian National Technical University, Kropyvnytskyi, Ukraine*

### **Mathematical Modeling of the Process of Biological Purification of Polluted Waters as an Object of Automatic Control**

The assumptions made in the compilation of the mathematical model of the process are given and justified. The structural-parametric scheme of the technological process of biological treatment of polluted waters is presented and considered. A mathematical model is given in a differential form and explanations of its components are given. The input (control) and output (controlled) values of the model along the control action channel are selected. The expression of the mathematical model in vector form and the expression for the controlled quantity are given for further facilitating the solution. The linearization of the model is carried out and its linearized form is given. Expressions of discrete operators of the quality criterion for control of the cleaning process, fractional regulator and control system are given. The results of numerical simulation of the water treatment process control system based on the developed model are presented.

The degree of efficiency in the application of fractional regulators as part of the automatic control system based on classical mathematical model of the process and the reasons for the high sensitivity of optimality criterion and transients on the order of fractional derivatives and integrals require further research.

**biological water purification, mathematical modeling, optimal control, numerical simulation, fractional regulator**

Одержано 21.11.17

**УДК 631.316.33**

**В.А. Дейкун, доц., канд. техн. наук, В.І. Носуленко, проф., д-р техн. наук, С.В.Боцюн, магістрант**

*Центральноукраїнський національний технічний університет, м.Кропивницький, Україна, E-mail: flora-84@mail.ru*

## **Вплив параметрів туюконапрямника на швидкість потоку часток добрив**

© В.А. Дейкун, В.І. Носуленко, С.В.Боцюн, 2017