

УДК 531.36:534.1:62-755

Ірина І. Філімоніхіна\*, асистент

### Усталені рухи і умови самозрівноваження одного типу ізольованої системи

Одержані узагальнені рівняння усталених рухів ізольованої системи, складеної з обертового несучого тіла і приєднаних до нього твердих тіл, відносно руху яких перешкоджають сили в'язкого опору. Наведений алгоритм оцінки стійкості усталених рухів. Визначені умови зрівноваження автобалансирами статично і динамічно незрівноваженого несучого тіла.

Ключові слова: обертове тіло, усталений рух, стійкість.

\*E-mail: fii@online.ua

Представлено д.ф.-м.н., проф. В.В.Мелешко

#### Вступ.

Енергетичний підхід знайшов застосування при дослідженні динаміки ізольованої системи, складеної із обертового несучого тіла і приєднаних до нього тіл, утворюючих демпфер кута нутації обертового тіла [3-5]. У роботах [6-8] була показана ефективність цього метода при дослідженні динаміки незрівноваженого обертового несучого тіла із приєднаними тілами, утворюючими автобалансири (АБ). Останні призначені для зрівноваження несучого тіла [2]. В роботі [8] з використанням енергетичного підхода досліджувалося динамічне зрівноваження двома двохмятниковими АБ обертового тіла, що здійснює просторовий рух і входить в ізольовану систему. При цьому виділялися основні і побічні рухи системи, і оцінювалася їх стійкість. В результаті було встановлено, що сплюснуті несучі тіла зрівноважити динамічно неможливо, а випадок витягнутого несучого тіла вимагає додаткових досліджень. Дослідження, проведені у роботах [6-8], стосуються конкретних систем, і методи, які в них використані, потребують узагальнення і обґрунтування. Тому у даній роботі одержуються узагальнені рівняння усталених рухів вказаних вище систем, обґрунтовується методика оцінки стійкості різних усталених рухів. Також встановлюються узагальнені умови зрівноваження АБ будь-якого типу несучого тіла у випадках статичного зрівноваження одним АБ, і динамічного зрівноваження – двома АБ.

I.I. Filimonikhina, assistant professor

I.I. Filimonikhina, assistant professor

### The steady-state motions and conditions of self-balancing of one type isolated system

Are received the generalized equations of the steady-state motions of the isolated system which consist of a rotating bearing body and attached to them firm bodies which relative motion is interfered by forces of viscous resistance. Is resulted the algorithm of an estimation of stability of the steady-state motions. Are received conditions of balancing by autobalancers of the statically and dynamically unbalanced bearing body

Key Words: rotating body, steady-state motion, stability.

#### §1. Опис системи, основні допущення

Ізольована матеріальна система складається з несучого обертового тіла (рис., а) і приєднаних тіл, які можуть рухатися відносно несучого тіла. Відносно руху тіл перешкоджають сили в'язкого опору. В системі немає елементів, здатних накопичувати потенціальну енергію і тому її повна енергія співпадає із кінетичною.

Оскільки система ізольована, то її центр мас – точка  $G$  рухається рівномірно і прямолінійно. Не обмежуючи загальності вважаємо, що він нерухомий. Також має місце закон збереження моменту кількості руху системи  $\mathbf{K}_G = \text{const}$ . Введемо в розглядання осі  $Gx_Gy_Gz_G$ , в яких вісь  $z_G$  направлена уздовж вектора  $\mathbf{K}_G$ . Нехай вони обертаються навколо осі  $z_G$  з кутовою швидкістю  $\omega$ , яка відповідає першому повороту несучого тіла в просторі. Тоді відповідний кут  $\gamma$  є циклічною координатою, і в рівняння руху входить не буде. В процесі подальшого руху осі  $Gx_Gy_Gz_G$  переходять в осі  $O\xi\eta\zeta$ , які визначають кінцеве положення несучого тіла, таким чином. Спочатку осі  $Gx_Gy_Gz_G$  повертаються на кути Ейлера - Крилова  $\alpha, \beta$ , як це показано на рис., б, внаслідок чого переходять в осі  $G\xi_G\eta_G\zeta_G$ . Потім осі  $G\xi_G\eta_G\zeta_G$  переміщуються поступально на  $-\xi_G, -\eta_G, -\zeta_G$ , внаслідок чого переходять в осі  $O\xi\eta\zeta$ , як це показано на рис., в. Очевидно, що

$\xi_G, \eta_G, \zeta_G$  – координати центра мас системи щодо осей  $O\xi\eta\zeta$ .

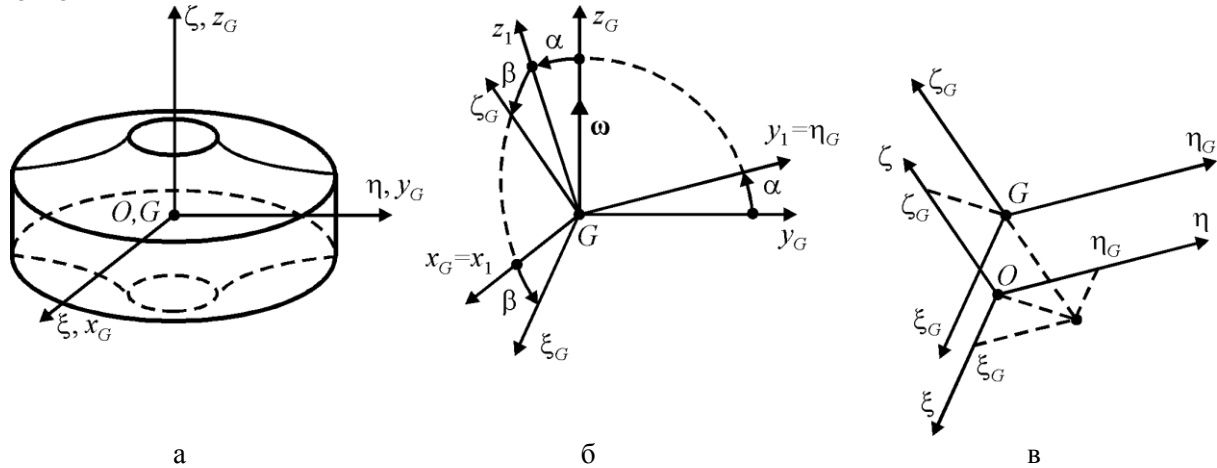


Рис. Визначення руху несучого тіла

Оскільки на систему діють тільки дисипативні сили і її повна енергія співпадає з кінетичною, то

$$dT/dt = -2R, \quad (1.1)$$

де  $T$  – кінетична енергія системи,  $R$  – дисипативна функція Релея. В зв'язку з тим, що під час перехідних процесів до системи не підводиться зовнішня і внутрішня енергія, то з часом система прийде до усталеного руху, у якому відносний рух приєднаних тіл припиниться і система буде обертатися як одне жорстке ціле навколо осі  $z_G$ .

Тензор інерції системи утворений несучим тілом і приєднаними тілами. Відносно осей  $O\xi\eta\zeta$  його можна представити у вигляді

$$\mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\xi\eta} & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\xi\zeta} & -J_{\eta\zeta} & J_\zeta \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

де відцентрові моменти інерції системи  $J_{\xi\zeta}$ ,  $J_{\eta\zeta}$  характеризують моментну незрівноваженість системи.

Тензор інерції системи щодо центральних осей системи  $G\xi_G\eta_G\zeta_G$ :

$$\mathbf{J}_G = \mathbf{J}_O - M_\Sigma \begin{pmatrix} (\eta_G^2 + \zeta_G^2) & -\xi_G\eta_G & -\xi_G\zeta_G \\ -\xi_G\eta_G & (\xi_G^2 + \zeta_G^2) & -\eta_G\zeta_G \\ -\xi_G\zeta_G & -\eta_G\zeta_G & (\xi_G^2 + \eta_G^2) \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

де  $M_\Sigma$  – маса всієї системи. Зауважимо, що координати  $\xi_G$ ,  $\eta_G$  характеризують статичну незрівноваженість системи.

Нехай  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  – узагальнені координати, які

задають відносні положення приєднаних тіл відносно несучого тіла. Тоді

$$\begin{aligned} \xi_G &= \xi_G(\varphi_1, \dots, \varphi_n), & \eta_G &= \eta_G(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \\ J_{\xi\xi} &= J_{\xi\xi}(\varphi_1, \dots, \varphi_n), & J_{\eta\zeta} &= J_{\eta\zeta}(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \\ \mathbf{J}_G &= \mathbf{J}_G(\varphi_1, \dots, \varphi_n). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Рух системи цілком визначають такі незалежні параметри

$$\alpha, \beta, \omega, \varphi_1, \dots, \varphi_n. \quad (1.5)$$

На усталених рухах системи вони – сталі. Параметр  $\omega = \dot{\gamma}$  – відповідає циклічній кутовій координаті  $\gamma$ . На усталених рухах він визначає кутову швидкість обертання системи.

## §2. Узагальнені рівняння усталених рухів

Кінетична енергія системи є функцією вигляду

$$T = T(\omega, \alpha, \beta, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_n). \quad (2.1)$$

Рівняння Лагранжа II роду дають такі диференціальні рівняння руху системи

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} = 0, & \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0, & \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_j} = Q_j, & \quad / j = \overline{1, n} / , \end{aligned} \quad (2.2)$$

де  $Q_j$  – узагальнена сила в'язкого опору, яка діє на приєднане тіло  $j$ . Вона стає рівною нулю, коли відносний рух тіла припиняється ( $\dot{\varphi}_j = 0$ ).

На усталених рухах кінетична енергія системи є енергією обертального руху системи навколо центра мас і визначається за формулою

$$T_0 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_0^T \mathbf{J}_G \boldsymbol{\omega}_0, \quad (2.3)$$

де

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \omega(-\cos\alpha \sin\beta, \sin\alpha, \cos\alpha \cos\beta)^T \quad (2.4)$$

- вектор кутової швидкості обертання системи на усталеному русі, знайдений в проєкціях на осі  $G\xi_G\eta_G\zeta_G$ .

Введемо у розглядання одиничні вектори  $\mathbf{x}_G, \mathbf{y}_G, \mathbf{z}_G$ , направлені по осях  $x_G, y_G, z_G$ . В проєкціях на осі  $G\xi_G\eta_G\zeta_G$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_G &= (\cos\beta, 0, \sin\beta)^T, \\ \mathbf{y}_G &= (\sin\alpha \sin\beta, \cos\alpha, -\sin\alpha \cos\beta)^T, \\ \mathbf{z}_G &= (-\cos\alpha \sin\beta, \sin\alpha, \cos\alpha \cos\beta)^T. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Оскільки  $\boldsymbol{\omega}_0 = \omega \mathbf{z}_G$ , то з (2.3) знаходимо, що

$$T_0 = \frac{1}{2} J_{z_G} \omega^2, \quad J_{z_G} = \mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{z}_G. \quad (2.6)$$

де  $J_{z_G}$  - осьовий момент інерції системи відносно осі  $z_G$ .

Рівняння Лагранжа II роду (2.2) дають такі рівняння усталених рухів системи

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial \omega} &= 0, \quad -\frac{\partial T_0}{\partial \alpha} = 0, \quad -\frac{\partial T_0}{\partial \beta} = 0, \\ -\frac{\partial T_0}{\partial \varphi_j} &= 0, \quad / j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Перше рівняння в (2.7) відповідає циклічній координаті  $\gamma$  і виражає закон збереження моменту кількості руху системи на усталеному русі. З врахуванням (2.6) з нього знаходимо, що

$$\omega = K_G / J_{z_G}, \quad (2.8)$$

де  $K_G$  - стала величина, яка дорівнює модулю моменту кількості руху системи  $\mathbf{K}_G$ . Тоді з (2.6) знаходимо, що

$$T_0 = K_G^2 / (2J_{z_G}). \quad (2.9)$$

З (2.7) випливає, що на усталених рухах кінетична енергія  $T_0$  приймає екстремальне, або критичне значення.

З врахуванням (2.9) решта рівнянь в (2.7) будуть еквівалентні наступним рівнянням

$$\begin{aligned} \partial J_{z_G} / \partial \alpha &= 0, \quad \partial J_{z_G} / \partial \beta = 0, \\ \partial J_{z_G} / \partial \varphi_j &= 0, \quad / j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Звідки випливає, що на усталених рухах осьовий момент інерції системи  $J_{z_G}$  приймає екстремальне, або критичне значення.

Перетворимо перші два рівняння в (2.10). В силу симетрії тензора  $\mathbf{J}_G$

$$\begin{aligned} \partial J_{z_G} / \partial \alpha &= 2\mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \partial \mathbf{z}_G / \partial \alpha, \\ \partial J_{z_G} / \partial \beta &= 2\mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \partial \mathbf{z}_G / \partial \beta. \end{aligned} \quad (2.11)$$

З врахуванням (2.5) знаходимо

$$\partial \mathbf{z}_G / \partial \alpha = \mathbf{y}_G, \quad \partial \mathbf{z}_G / \partial \beta = -\mathbf{x}_G \cos\alpha. \quad (2.12)$$

Підставляючи це в (2.11), а (2.11) в (2.10), одержимо

$$\begin{aligned} \partial J_{z_G} / \partial \alpha &= 2\mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{y}_G = -2J_{y_G z_G} = 0, \\ \partial J_{z_G} / \partial \beta &= -2\mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{x}_G \cos\alpha = \\ &= 2J_{x_G z_G} \cos\alpha = 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

де  $J_{x_G z_G}, J_{y_G z_G}$  - відцентрові моменти інерції системи.

Зауважимо, що коли  $\cos\alpha \approx 0$ , кути Ейлера-Крилова мають особливість. В цьому випадку переозначенням осей і введенням нових кутів  $\alpha', \beta'$ , таких, що  $\cos\alpha' \neq 0$  можна показати, що рівняння (2.13) еквівалентні вимозі, щоб відцентрові моменти інерції  $J_{x_G z_G}, J_{y_G z_G}$  дорівнювали 0. З цього випливає загальновідомий факт, що якщо на усталеному русі ізольована система обертається навколо осі  $z_G$ , то це головна центральна вісь інерції системи [1].

Остаточно одержуємо узагальнені рівняння усталених рухів системи у такій формі:

$$\begin{aligned} \omega &= K_G / J_{z_G}, \quad J_{z_G} = \mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{z}_G; \\ J_{y_G z_G} &= -\mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{y}_G = 0, \quad J_{x_G z_G} = -\mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{x}_G = 0; \\ \partial J_{z_G} / \partial \varphi_j &= 0, \quad / j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Зробимо наступні зауваження.

1. Вигляд рівнянь (2.14) не залежить від кутів повороту, визначаючих перехід осей  $Gx_G y_G z_G$  в осі  $G\xi_G \eta_G \zeta_G$ , а залежить від одиничних векторів  $\mathbf{x}_G, \mathbf{y}_G, \mathbf{z}_G$ , спрямованих по координатним осям  $x_G, y_G, z_G$ . Тому іншим кутам будуть відповідати інші вирази для одиничних векторів, ніж (2.5).

2. Рівняння (2.14) - це система нелінійних алгебраїчних рівнянь. Одержання всіх розв'язків цієї системи в аналітичному вигляді - важка задача. В роботі [8] для пошуку всіх усталених рухів був використаний числовий метод повного перебору. Останній дозволяє знаходити для конкретних систем у числовому вигляді всі усталені рухи системи.

### §3. Оцінка стійкості усталених рухів

Для оцінки стійкості усталених рухів будемо використовувати те, що коли кінетична енергія усталеного руху  $T_0$  набуде: абсолютного мінімального значення, то рух стійкий і це – достатня умова стійкості; локального мінімального значення, то це – необхідна умова стійкості і цей випадок потребує подальших досліджень; критичного, максимального, або локального максимального значення, то рух нестійкий [3-5].

Тоді з (2.9) можна зробити наступні висновки. Коли осьовий момент інерції  $J_{z_G}$  на усталеному русі набуде:

- абсолютного максимального значення, то рух стійкий і це – достатня умова стійкості;
- локального максимального значення, то це – необхідна умова стійкості і цей випадок потребує подальших досліджень;
- критичного, мінімального, або локального мінімального значення, то рух нестійкий.

Стійкість усталених рухів зручніше оцінювати за осьовим моментом інерції  $J_{z_G}$ .

Введемо позначення

$$a_{ij} = -\partial^2 J_{z_G} / \partial q_i \partial q_j, \quad q = (\alpha, \beta, \varphi_1, \dots, \varphi_n), \quad / i, j = \overline{1, n}. \quad (3.1)$$

Нехай на певному усталеному русі

$$q = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n), \quad a_{ij} = \tilde{a}_{ij}, \quad / i, j = \overline{1, n}. \quad (3.2)$$

Тоді, відповідно до критерію Сильвестра умовами максимуму осьового моменту інерції  $J_{z_G}$  на цьому усталеному русі будуть [1]:

$$\tilde{a}_{ii} > 0, \quad / i = \overline{1, n}, \quad \Delta_j = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{j1} & \dots & \tilde{a}_{jj} \end{vmatrix} > 0, \quad / j = \overline{2, n}. \quad (3.3)$$

### §4. Умови зрівноваження АБ обертового тіла

#### 1. Динамічне зрівноваження несучого тіла.

Нехай тіла АБ можуть усунути динамічну незрівноваженість несучого тіла. Нехай система здійснює основний рух – у якому обертове тіло зрівноважене і система обертається як одне ціле навколо осі  $z_G$ . Нехай на основному русі осі  $O\xi\eta\zeta$  і  $Gx_Gy_Gz_G$  співпадають і відносно них система має головні центральні осьові моменти інерції  $A, B, C$ . Нехай тіла АБ дещо відхилилися від положення, в якому зрівноважують несуче тіло. Тоді тензор інерції та координати центра

мас системи щодо осей  $O\xi\eta\zeta$ , можна представити у вигляді

$$\mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} A + \varepsilon \tilde{J}_\xi & -\varepsilon \tilde{J}_{\xi\eta} & -\varepsilon \tilde{J}_{\xi\zeta} \\ -\varepsilon \tilde{J}_{\xi\eta} & B + \varepsilon \tilde{J}_\eta & -\varepsilon \tilde{J}_{\eta\zeta} \\ -\varepsilon \tilde{J}_{\xi\zeta} & -\varepsilon \tilde{J}_{\eta\zeta} & C \end{pmatrix}, \quad \xi_G = \varepsilon \tilde{\xi}_G, \quad \eta_G = \varepsilon \tilde{\eta}_G, \quad \zeta_G = \varepsilon \tilde{\zeta}_G, \quad (4.1)$$

де  $|\varepsilon| \ll 1$ , і врахована властивість тіл АБ не змінювати осьовий момент інерції  $C$  [2].

Шукаємо  $\alpha, \beta$  у вигляді

$$\alpha \approx \alpha_1 \varepsilon, \quad \beta \approx \beta_1 \varepsilon. \quad (4.2)$$

Тоді з врахуванням (1.3), (2.5) із (2.14), з точністю до величин другого порядку малості включно, знаходимо

$$J_{z_G} \approx C + \varepsilon^2 \{ [(B - C)\alpha_1^2 + (A - C)\beta_1^2 - M_\Sigma(\tilde{\xi}_G^2 + \tilde{\eta}_G^2) + 2(\beta_1 \tilde{J}_{\xi\zeta} - \alpha_1 \tilde{J}_{\eta\zeta})] \}, \quad J_{x_G z_G} \approx [(A - C)\beta_1 + \tilde{J}_{\xi\zeta}] \varepsilon = 0, \quad J_{y_G z_G} \approx [-(B - C)\alpha_1 + \tilde{J}_{\eta\zeta}] \varepsilon = 0. \quad (4.3)$$

Розглядатимемо параметри незрівноваженості  $\tilde{\xi}_G, \tilde{\eta}_G, \tilde{J}_{\xi\zeta}, \tilde{J}_{\eta\zeta}$  як узагальнені координати, що характеризують рух системи. На основному русі вони дорівнюють нулю. Відмітимо, що вони незалежні (бо АБ може усунути динамічну незрівноваженість несучого тіла) і виражаються через узагальнені координати  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , які задають положення тіл АБ щодо несучого тіла.

Розв'язком останніх двох рівнянь системи (4.3) відносно  $\tilde{J}_{\xi\zeta}, \tilde{J}_{\eta\zeta}$  буде

$$\tilde{J}_{\xi\zeta} = -(A - C)\beta_1, \quad \tilde{J}_{\eta\zeta} = (B - C)\alpha_1. \quad (4.4)$$

Підставляючи  $\tilde{J}_{\xi\zeta}, \tilde{J}_{\eta\zeta}$  в осьовий момент інерції  $J_{z_G}$  з (4.3), отримаємо

$$J_{z_G} \approx C - \varepsilon^2 [(B - C)\alpha_1^2 + (A - C)\beta_1^2 + M_\Sigma(\tilde{\xi}_G^2 + \tilde{\eta}_G^2)]. \quad (4.5)$$

З (4.5) видно, що осьовий момент інерції  $J_{z_G}$  матиме максимум, коли

$$A, B > C, \quad (4.6)$$

тобто у випадку витягнутого складеного тіла, утвореного несучим тілом і АБ. При цьому  $J_{z_G}$  приймає на основному русі локальне

максимальне значення і тому отримані умови є необхідними умовами настання динамічного зрівноваження.

## 2. Статичне зрівноваження несучого тіла.

Нехай статичну незрівноваженість несучого тіла усуває один АБ. Нехай площина зрівноваження (і статичної незрівноваженості) паралельна площині  $O\xi\eta$  і зміщена на координату  $b$  по осі  $\zeta$ . Тоді

$$\tilde{J}_{\xi\xi} = M_{\Sigma}\tilde{\xi}_G b, \quad \tilde{J}_{\eta\zeta} = M_{\Sigma}\tilde{\eta}_G b. \quad (4.7)$$

Тоді система (4.3) прийме вигляд

$$\begin{aligned} J_{zG} &\approx C + \varepsilon^2 \{[(B-C)\alpha_1^2 + (A-C)\beta_1^2 - \\ &- M_{\Sigma}(\tilde{\xi}_G^2 + \tilde{\eta}_G^2) + 2M_{\Sigma}b(\beta_1\tilde{\xi}_G - \alpha_1\tilde{\eta}_G)]\}. \\ J_{xGzG} &\approx [(A-C)\beta_1 + M_{\Sigma}\tilde{\xi}_G b]\varepsilon = 0, \\ J_{yGzG} &\approx [-(B-C)\alpha_1 + M_{\Sigma}\tilde{\eta}_G b]\varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

З останніх двох рівнянь знаходимо

$$\alpha_1 = M_{\Sigma}\tilde{\eta}_G b / (B-C), \quad \beta_1 = -M_{\Sigma}\tilde{\xi}_G b / (A-C). \quad (4.9)$$

Підставляючи (4.9) в  $J_{zG}$  з (4.8), отримаємо

$$\begin{aligned} J_{zG} &\approx C - \varepsilon^2 M_{\Sigma} \left( \frac{A + b^2 M_{\Sigma} - C}{A - C} \tilde{\xi}_G^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B + b^2 M_{\Sigma} - C}{B - C} \tilde{\eta}_G^2 \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Умовами, що  $J_{zG}$  приймає на основному русі максимальне значення, будуть

$$\begin{aligned} (A + b^2 M_{\Sigma} - C) / (A - C) &> 0, \\ (B + b^2 M_{\Sigma} - C) / (B - C) &> 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

З них знаходимо такі два випадки, при яких теоретично можливе статичне зрівноваження несучого тіла

$$\begin{aligned} 1) A, B > C, \\ 2) C > A + b^2 M_{\Sigma}, \quad C > B + b^2 M_{\Sigma}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

У першому випадку складене тіло – витягнуте, а в другому – сплюснуте, і площина зрівноваження знаходиться поблизу центра мас системи.

У разі витягнутого несучого тіла  $J_{zG}$  приймає на основному русі локальне максимальне значення і тому отримані умови є необхідними умовами настання зрівноваження.

У разі сплюснутого несучого тіла  $J_{zG}$  приймає на основному русі абсолютне максимальне значення і тому отримані умови є достатніми умовами настання зрівноваження.

Зауважимо, що у проведених дослідженнях тип АБ не обумовлювався. Тому одержані умови зрівноваження АБ обертового тіла застосовні для АБ будь-якого типу, тобто є узагальненими.

## Список використаних джерел

1. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.
3. Likins P.W. Effects of energy dissipation on the free body motions of spacecraft // Technical Report No. 32.860, NASA, California Institute of Technology Pasadena, California, 1966, – p. 70.
4. Пожарицкий Г.К., Румянцев В.В. Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью // ПММ, т. XXVII, вып. 1, 1963. – С. 16-26.
5. Алтер Дж. Р. Теория маятникового демпфера нутационных колебаний спутника // Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 3, – С. 170-176.
6. Горошко О.О., Філімоніхін Г.Б., Пирогов В.В., Філімоніхіна І.І. Стабілізація положення осі обертання абсолютно твердого тіла багатомаятниковим (багатокульовим) автобалансиром // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2005. – №4. – С. 67-76.
7. Філімоніхін Г.Б., Пирогов В.В. Стабілізація положення осі вращения твердого тела связанными абсолютно твердыми телами. // Прикл. механика. – 2005. – 41, №8. – С. 122-129.
8. Філімоніхін Г.Б., Пирогов В.В., Філімоніхіна І.І. Пространственная стабилизация положения оси вращения несущего тела маятниковыми демпферами // Збірник наукових праць КНТУ, 2006. Вип. №17, – С. 234-240.