

УДК 531.36+629.78.001+62-755

Ірина І. Філімоніхіна*, асистент
Олег О. Горошко, д.ф.-м.н., професор

Умови стійкості основних рухів чотирьох обертюваних ізольованих систем*

За допомогою методики, заснованої на теоремі Рауса, одержані достатні умови стійкості, які із точністю до меж співпадають із необхідними, основних рухів чотирьох обертюваних ізольованих систем, складених із обертюваного несучого тіла і приєднаних до нього тіл.

Ключові слова: обертюване тіло, демпфер, автобалансир, усталений рух, стійкість.

*E-mail: fii@online.ua

Представлено д.ф.-м.н., проф. В.В.Мелешко

Вступ.

В роботах [1-4] визначалися умови, за яких пасивні автобалансири (АБ) зможуть усунути кут нутації незрівноваженого обертюваного несучого тіла, що входить до складу ізольованої системи. Ця задача актуальна для штучних супутників Землі, космічних апаратів, положення яких у просторі стабілізується обертанням [5-7]. В роботах [1-3] із застосуванням енергетичного підходу і емпіричного методу були знайдені узагальнені необхідні умови усунення АБ кута нутації, придатні для АБ будь-якого типу. В роботі [4], із застосуванням теореми Рауса, були одержані аналогічні достатні умови, які із точністю до меж співпадають із необхідними. Також були одержані узагальнені рівняння усталених рухів вказаних вище систем, зокрема для випадку, коли система має елементи, здатні накопичувати потенціальну енергію, обґрунтована методика оцінки стійкості різних усталених рухів. В цій роботі методика, розвинута у роботі [4], застосовується до визначення умов стійкості так званих основних рухів чотирьох ізольованих обертюваних систем, складених із несучого обертюваного тіла і приєднаних до нього тіл. В цих рухах система обертається як одне жорстке ціле навколо повздовжньої осі несучого тіла. В розглядуваних системах приєднані тіла утворюють двохмаятниковий демпфер, чи АБ Кларка [8,9], рідинний АБ „Дункан” [8], рідинний демпфер, чи АБ Леблана [5-9], і невагомий стержень із зосередженою масою на кінці, який моделює штиркову антену [7].

I.I. Filimonikhina, assistant professor
I.I. Filimonikhina, assistant professor
O.O.Goroshko, Dt.Sci (Phys.-Math.), professor

Conditions of stability of the main motions of fore rotating isolated systems

By means of method based on the Routh theorem are received the sufficient conditions which coincide with necessary conditions within borders, of stability of the main motions of fore rotating isolated systems built from a rotating bearing body and added to him bodies.

Key Words: rotating body, damper, autobalancer, steady-state motion, stability.

§1. Опис системи, основні допущення, необхідні умови стійкості

Ізольовані механічні системи, що розглядаються, складені із обертюваного несучого тіла (тіла), масою M і приєднаних до нього тіл, загальною масою m . Тіло має центр мас у точці O , та осьові моменти інерції A, B, C відносно власних головних центральних осей інерції $O\xi\eta\zeta$. Вид приєднаних тіл для кожної задачі оговорюється окремо. Відносному руху приєднаних тіл перешкоджають сили в'язкого опору. Для ізольованих систем мають місце закони збереження руху центра мас і кінетичного момента системи. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що центр мас системи нерухомий. Тоді на усталених рухах система обертається як одне жорстке ціле навколо нерухомої у просторі осі z_G , що проходить через центр мас системи – точку G і спрямована вздовж вектора кінетичного момента системи. На основному русі вісь ζ співпадає із віссю z_G , а на побічних – ні.

Нехай на основному русі система має головні центральні осьові моменти інерції A_G, B_G, C_G (C_G відповідає осі z_G). З теорії обертюваних штучних супутників Землі відомо, що для стійкості основного руху необхідно, щоб складене тіло, утворене несучим тілом і приєднаними тілами, було на цьому русі сплюснутим [5-7]

$$\max(A_G, B_G) < C_G. \quad (1.1)$$

Нижче визначаються умови стійкості основних рухів зазначених систем, і вони порівнюються із умовами (1.1).

Відповідно до результатів робіт [3,4] для стійкості основного руху системи, у якій немає елементів, здатних накопичувати потенціальну енергію, необхідно і достатньо, щоб на ньому осьовий момент інерції системи J_{z_G} мав максимум. Якщо система має такі елементи, то для стійкості основного руху необхідно і достатньо, щоб на ньому потенціальна енергія приведеної системи W мала мінімум.

Нижче J_{z_G} і W визначаються як функції позиційних координат. При цьому враховується особливість кожної розглядуваної системи, робляться припущення щодо механізму втрати стійкості основним рухом і в результаті використовується найменша кількість координат, що впливають на втрату стійкості.

§2. Присіднані тіла утворюють

двохмаятниковий демпфер або АБ Кларка

Опис системи, її осьовий момент інерції.

Модель двухмаятникового демпфера або АБ Кларка показана на рис. 1. На дві осі, паралельні осі ζ , розташовані на відстані a від неї, насаджені два математичних маятника довжиною l і масою $m/2$. Маятники рухаються у площині $O_1\xi_1\eta_1$, паралельній площині $O\xi\eta$, розташованій на відстані b від неї.

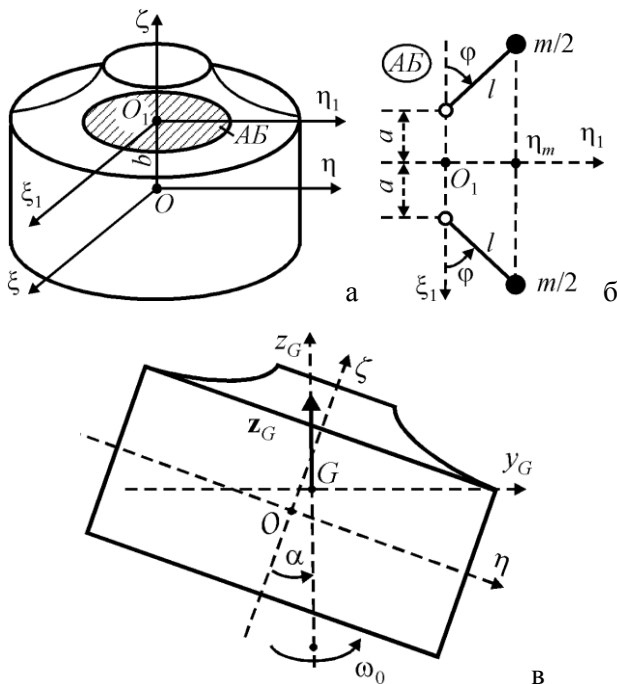


Рис. 1 Модель обертового тіла із двухмаятниковим демпфером або АБ Кларка

Приймаємо такий механізм втрати стійкості. В основному русі маятники лежать на осі ξ_1 і система обертається як одне жорстке ціле

навколо повздовжньої осі тіла ζ . На побічному русі, який стає стійким, коли основний рух втрачає стійкість, маятники утворюють з віссю ξ_1 рівні кути φ і система обертається як одне жорстке ціле навколо осі z_G , з якою вісь ζ утворює кут α (рис. 1, в). Отже, на основному русі $\varphi = 0, \alpha = 0$, а на побічному $\varphi \neq 0, \alpha \neq 0$. Надалі вважаємо, що $B_G > A_G$. Тільки в цьому разі при втраті стійкості основним рухом система почне повертатися навколо осі x_G , що відповідає побудованій схемі втрати стійкості. Таке співвідношення має місце, наприклад, у випадку осесиметричного несучого тіла ($A = B$).

У системи немає елементів, здатних накопичувати потенціальну енергію. Тому оцінюємо стійкість по J_{z_G} . Шукаємо J_{z_G} як функцію координат φ, α . З рис. 1, а знаходимо координати центра мас системи відносно осей $O\xi\eta\zeta$

$$\xi_G = 0, \quad \eta_G = \frac{ml \sin \varphi}{M_\Sigma}, \quad \zeta_G = \frac{mb}{M_\Sigma}. \quad (2.1)$$

Осьові і відцентрові моменти інерції системи відносно осей $O\xi\eta\zeta$:

$$\begin{aligned} J_\xi &= A + m(l^2 \sin^2 \varphi + b^2), \\ J_\eta &= B + m[(a + l \cos \varphi)^2 + b^2], \\ J_\zeta &= C + m[l^2 \sin^2 \varphi + (a + l \cos \varphi)^2], \\ J_{\xi\eta} = J_{\xi\zeta} &= 0, \quad J_{\eta\zeta} = m\eta_m \zeta_m = mlb \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Відносно центральних осей $O\xi_G\eta_G\zeta_G$, паралельних осям $O\xi\eta\zeta$, тензор інерції має вигляд

$$\mathbf{J}_G = \mathbf{J}_O - M_\Sigma \begin{pmatrix} (\eta_G^2 + \zeta_G^2) & -\xi_G\eta_G & -\xi_G\zeta_G \\ -\xi_G\eta_G & (\xi_G^2 + \zeta_G^2) & -\eta_G\zeta_G \\ -\xi_G\zeta_G & -\eta_G\zeta_G & (\xi_G^2 + \eta_G^2) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

або у розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} J_{\xi_G} &= A_G + \frac{mMl^2}{M_\Sigma} \sin^2 \varphi, \\ J_{\eta_G} &= B_G - ml[2a(1 - \cos \varphi) + l \sin^2 \varphi], \\ J_{\zeta_G} &= C_G - 2mla(1 - \cos \varphi) - \frac{m^2 l^2}{M_\Sigma} \sin^2 \varphi, \\ J_{\xi_G\eta_G} = J_{\xi_G\zeta_G} &= 0, \quad J_{\eta_G\zeta_G} = \frac{mMlb}{M_\Sigma} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (2.4)$$

де

$$A_G = A + \frac{mMb^2}{M_\Sigma}, \quad B_G = B + m(a + l)^2 + \frac{mMb^2}{M_\Sigma},$$

$$C_G = C + m(a+l)^2. \quad (2.5)$$

Одиничний вектор \mathbf{z}_G , спрямований по осі z_G , має в проекціях на осі $O\xi_G\eta_G\zeta_G$ такі складові (рис. 1, в)

$$\mathbf{z}_G = (0, -\sin \alpha, \cos \alpha)^T. \quad (2.6)$$

Тоді

$$\begin{aligned} J_{z_G} &= \mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{z}_G = \\ &= \{B_G - ml[2a(1 - \cos \varphi) + l \sin^2 \varphi]\} \sin^2 \alpha + \\ &+ \frac{mMlb}{M_\Sigma} \sin \varphi \sin 2\alpha + \\ &+ \left[C_G - 2mla(1 - \cos \varphi) - \frac{m^2 l^2}{M_\Sigma} \sin^2 \varphi \right] \cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Умови стійкості основного руху системи. В околі основного руху $\varphi = 0, \alpha = 0$ із точністю до величин другого порядку малості включно

$$J_{z_G} \approx k[a_0 - (a_{11}\varphi^2 + 2a_{12}\varphi\alpha + a_{22}\alpha^2)], \quad (2.8)$$

де

$$\begin{aligned} k &= ml^2, \quad a_0 = \frac{C_G}{ml^2}, \quad a_{11} = \frac{a}{l} + \frac{m}{M_\Sigma}, \\ a_{22} &= \frac{C_G - B_G}{ml^2}, \quad a_{12} = -\frac{b}{l} \cdot \frac{M}{M_\Sigma}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для стійкості основного руху необхідно і достатньо, щоб квадратична форма $a_{11}\varphi^2 + 2a_{12}\varphi\alpha + a_{22}\alpha^2$ мала мінімум. Критерій Сильвестра дає такі умови стійкості

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad \Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0. \quad (2.10)$$

З цих умов знаходимо

$$C_G > B_G, \quad \Delta_2 > 0,$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{ml^2} \left\{ (C_G - B_G) \frac{a}{l} + \left[(C_G - B_G) - M_\Sigma b'^2 \frac{m}{M_\Sigma} \right] \right\}, \quad (2.11)$$

де

$$b' = Mb / M_\Sigma \quad (2.12)$$

- відстань від центра мас системи до площини маятників.

У випадку, коли відстань $a \sim l$ (відстані a і l - величини одного порядку) і маса маятників набагато менша маси несучого тіла $m \ll M$, умови стійкості приймають вигляд

$$C_G > B_G. \quad (2.13)$$

Тобто для стійкості основного руху достатньо, щоб складене тіло було сплюснуте. Зауважимо, що в цьому випадку маятниковий демпфер майже не працює як АБ, бо не здатний істотно зменшувати незрівноваженість системи [8,9].

У випадку, коли маятники насаджені на повздовжню вісь тіла, то $a = 0$ і умови стійкості приймають вигляд

$$C_G - B_G - M_\Sigma b'^2 > 0. \quad (2.14)$$

Тобто для стійкості основного руху недостатньо, щоб складене тіло було сплюснуте, а потрібно, щоб відстань b' не перевищувала певного граничного значення (площина маятників знаходилась поблизу від центра мас системи). Зауважимо, що в цьому випадку маятниковий демпфер найкраще працює як АБ, бо здатний повністю усунути статичну незрівноваженість системи, розташовану у площині маятників [8,9].

Зауважимо, що у випадку, коли $A_G > B_G$ і $a \neq 0$ при втраті стійкості основним рухом система повертається навколо осі y_G . В цьому разі для стійкості основного руху необхідно і достатньо, щоб складене тіло на основному русі було сплюснутим ($B_G < A_G < C_G$).

§3. Приєднані тіла утворюють рідинний АБ „Дункан”

Опис системи, її осьовий момент інерції. Модель АБ „Дункан” показана на рис. 2.

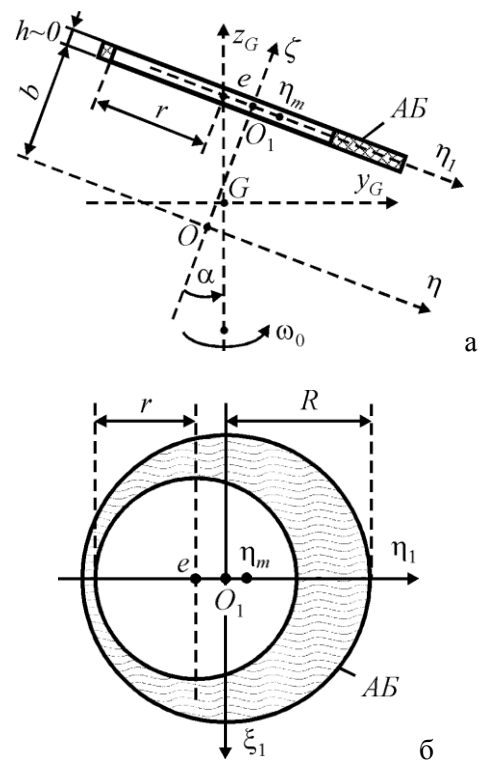


Рис. 2 Рідинний АБ „Дункан”

Загальна маса рідини - m , її товщина h незначна ($h \sim 0$) і тому вважаємо, що рідина рухається у площині $O_1 \zeta_1 \eta_1$. Рідину зовні обмежує циліндрична ємність радіуса R . Всередині рідини плаває порожній циліндр радіуса r . Його масою

нехтуємо. Вважаємо, що на усталених руках центр циліндра знаходиться на відстані e від осі ζ , але на осі z_G . На рис. 2 показаний механізм втрати стійкості основним рухом для випадку, коли $B \geq A$.

З рис. 2 знаходимо координати центра мас рідини відносно осей $O\xi\eta\zeta$

$$\xi_m = 0, \quad \eta_m = \eta_m, \quad \zeta_m = b. \quad (3.1)$$

Тоді координати центра мас системи відносно осей $O\xi\eta\zeta$ матимуть вигляд

$$\xi_G = 0, \quad \eta_G = \frac{m\eta_m}{M_\Sigma}, \quad \zeta_G = \frac{m\zeta_m}{M_\Sigma} = \frac{mb}{M_\Sigma}. \quad (3.2)$$

Введемо позначення

$$a = r/R. \quad (3.3)$$

Враховуючи розташування мас системи, можна знайти, що

$$e = \eta_m(1-a^2)/a^2. \quad (3.4)$$

Тоді осьові і відцентрові моменти інерції системи відносно осей $O\xi\eta\zeta$ матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} J_\xi &= A + \frac{mR^2}{4}(1+a^2) + mb^2 - m\eta_m^2 \frac{1-a^2}{a^2}, \\ J_\eta &= B + \frac{mR^2}{4}(1+a^2) + mb^2, \\ J_\zeta &= C + \frac{mR^2}{2}(1+a^2) - m\eta_m^2 \frac{1-a^2}{a^2}, \\ J_{\xi\eta} &= J_{\xi\zeta} = 0, \quad J_{\eta\zeta} = mb\eta_m. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Відносно центральних осей $O\xi_G\eta_G\zeta_G$, паралельних осям $O\xi\eta\zeta$, тензор інерції має вигляд (2.3), або у розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} J_{\xi_G} &= A_G - \frac{m^2\eta_m^2}{M_\Sigma}, \quad J_{\eta_G} = B_G, \\ J_{\zeta_G} &= C_G - m\left(\frac{1}{a^2} - \frac{M}{M_\Sigma}\right)\eta_m^2, \\ J_{\xi_G\eta_G} &= J_{\xi_G\zeta_G} = 0, \quad J_{\eta_G\zeta_G} = \frac{mMb}{M_\Sigma}\eta_m, \end{aligned} \quad (3.6)$$

де

$$\begin{aligned} A_G &= A + \frac{1}{4}mR^2(1+a^2) + \frac{mMb^2}{M_\Sigma}, \\ B_G &= B + \frac{1}{4}mR^2(1+a^2) + \frac{mMb^2}{M_\Sigma}, \\ C_G &= C + \frac{1}{2}mR^2(1+a^2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Зауважимо, що $B_G \geq A_G$.

Осьовий момент інерції J_{z_G} системи

$$\begin{aligned} J_{z_G} &= \mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{z}_G = \\ &= B_G \sin^2 \alpha + \frac{2mMb}{M_\Sigma} \eta_m \sin \alpha \cos \alpha + \\ &+ \left[C_G - m\left(\frac{1}{a^2} - \frac{M}{M_\Sigma}\right)\eta_m^2 \right] \cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (3.8)$$

З геометричних міркувань з рис. 2, а знаходимо такий вираз для ексцентриситету e

$$e = (b - \zeta_G) \operatorname{tg} \alpha - \eta_G. \quad (3.9)$$

З (3.4) і (3.9) знаходимо

$$\eta_m = \frac{a^2 Mb \operatorname{tg} \alpha}{M_\Sigma - a^2 M}. \quad (3.10)$$

Підставляючи це у (3.8), одержуємо такий вираз для осьового моменту інерції

$$J_{z_G} = C_G - \Delta \sin^2 \alpha, \quad (3.11)$$

де

$$\Delta = C_G - B_G - \frac{a^2 mb^2 M^2}{M_\Sigma(M_\Sigma - a^2 M)}. \quad (3.12)$$

Умови стійкості основного руху системи.

З (3.11) випливає, що J_{z_G} матиме максимум на основному русі $\alpha = 0$ тоді і тільки тоді, коли

$$\Delta > 0. \quad (3.13)$$

У випадку, коли рідина майже повністю заповнює камеру AB $r \rightarrow 0$, $a \rightarrow 0$ і умова стійкості приймає вигляд

$$C_G - B_G > 0. \quad (3.14)$$

Тобто для стійкості основного руху достатньо, щоб складене тіло було сплюснуте ($C_G > B_G$). Зауважимо, що в цьому випадку AB „Дункан” майже не працює як AB [8,9].

У випадку, коли товщина кільця рідини прямує до нуля $r \rightarrow R$, $a \rightarrow 1$ і умова стійкості приймає вигляд

$$C_G - B_G - M_\Sigma b'^2 > 0, \quad (3.15)$$

де

$$b' = Mb/M_\Sigma \quad (3.16)$$

- відстань від центра мас системи до площини рідини. Таким чином, для стійкості основного руху недостатньо, щоб складене тіло було сплюснуте ($C_G > B_G$), а потрібно, щоб площина рідини знаходилась поблизу від центра мас системи. Зауважимо, що в цьому випадку AB „Дункан” найкраще працює як AB , бо при зрівноваженні статичного дисбалансу у своїй площині майже не залишає залишкового дисбалансу [8,9].

§4. Присіднані тіла утворюють рідинний демпфер, або АБ Леблана

Модель рідинного демпфера, чи АБ Леблана зображена на рис. 3.

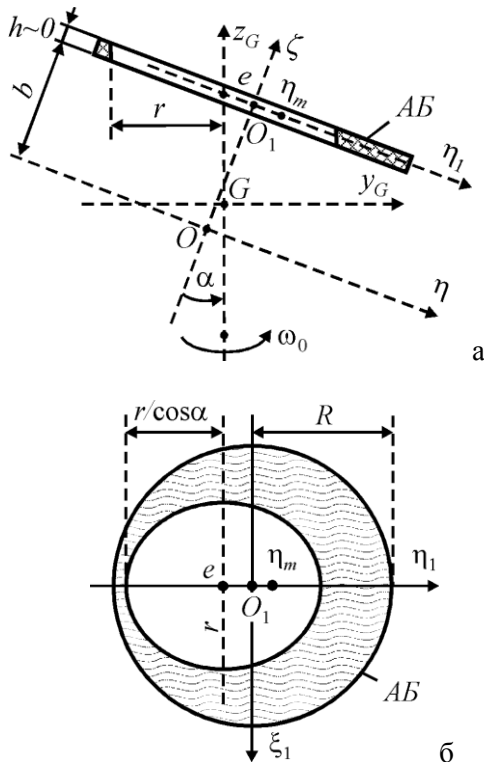


Рис. 3 Рідинний демпфер чи АБ Леблана

Загальна маса рідини – m , її товщина h незначна ($h \sim 0$) і тому вважаємо, що рідина рухається у площині $O_1 \xi_1 \eta_1$. Рідину зовні обмежує циліндрична ємність, радіуса R (рис. 3). Площа суцільного круга радіуса R дорівнює πR^2 . Нехай порожнина у ньому, утворена повітрям, має площу $a^2 \pi R^2$, $0 < a^2 < 1$. На усталених рухах порожнина обмежена вільною поверхнею рідини – циліндричною поверхнею радіуса r із центральною віссю z_G . Тоді порожнина має форму еліпса із півосями $r, r/\cos \alpha$. Площа еліпса дорівнює площі порожнини, звідки випливає, що

$$\pi r^2 / \cos \alpha = a^2 \pi R^2, \quad r = aR \sqrt{\cos \alpha}. \quad (4.1)$$

Як і у випадку АБ „Дункан”

$$e = \eta_m (1 - a^2) / a^2, \quad \eta_m = \frac{a^2 M b \operatorname{tg} \alpha}{M_\Sigma - a^2 M}. \quad (4.2)$$

Тензор інерції системи відносно осей $O \xi \eta \zeta$, за умови, що еліпс повністю усередині круга (рис. 3, б), має вигляд

$$\begin{aligned} J_\xi &= A + \frac{mR^2}{4} \cdot \frac{\cos \alpha - a^4}{(1 - a^2) \cos \alpha} + mb^2 - m\eta_m^2 \frac{1 - a^2}{a^2}, \\ J_\eta &= B + \frac{mR^2}{4} \cdot \frac{1 - a^4 \cos \alpha}{1 - a^2} + mb^2, \\ J_\zeta &= C + \frac{mR^2}{4} \cdot \frac{2 \cos \alpha - a^4 (1 + \cos^2 \alpha)}{(1 - a^2) \cos \alpha} - m\eta_m^2 \frac{1 - a^2}{a^2}, \\ J_{\xi\eta} &= J_{\xi\zeta} = 0, \quad J_{\eta\zeta} = mb\eta_m. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Відносно центральних осей $O \xi_G \eta_G \zeta_G$, паралельних осям $O \xi \eta \zeta$, тензор інерції має вигляд (2.3), або у розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} J_{\xi_G} &= A_G - m \left(\frac{1}{a^2} - \frac{M}{M_\Sigma} \right) \eta_m^2 - \frac{a^4 m R^2}{4} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{(1 - a^2) \cos \alpha}, \\ J_{\eta_G} &= B_G + \frac{a^4 m R^2}{4} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{1 - a^2}, \\ J_{\zeta_G} &= C_G - m \left(\frac{1}{a^2} - \frac{M}{M_\Sigma} \right) \eta_m^2 - \frac{a^4 m R^2}{4} \cdot \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{(1 - a^2) \cos \alpha}, \\ J_{\xi_G \eta_G} &= J_{\xi_G \zeta_G} = 0, \quad J_{\eta_G \zeta_G} = \frac{m M b}{M_\Sigma} \eta_m. \end{aligned} \quad (4.4)$$

де A_G, B_G, C_G – із (3.7), і як у попередній задачі вважається, що $B_G > A_G$.

Осьовий момент інерції J_{z_G} системи

$$\begin{aligned} J_{z_G} &= \mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{z}_G = -\frac{a^4 m R^2}{2(1 - a^2)} \cos \alpha + \\ &+ \left[B_G + \frac{a^4 m R^2}{4(1 - a^2)} \right] \sin^2 \alpha - \frac{2m M b}{M_\Sigma} \eta_m \sin \alpha \cos \alpha + \\ &+ \left[C_G + \frac{a^4 m R^2}{2(1 - a^2)} - m \left(\frac{1}{a^2} - \frac{M}{M_\Sigma} \right) \eta_m^2 \right] \cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Підставляючи сюди η_m з (4.2), перетворюємо J_{z_G} до вигляду

$$J_{z_G} = C_G - 4x^2 \left\{ \Delta - \left[\Delta + \frac{a^4 m R^2}{4(1 - a^2)} \right] x^2 \right\}, \quad (4.6)$$

де

$$x = \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (4.7)$$

На основному русі $x = 0$ і осьовий момент інерції J_{z_G} буде мати максимум за умови (3.13), з чого випливає, що умови стійкості основних рухів у випадках АБ Леблана і АБ „Дункан” – співпадають.

§5. Природні тіла утворюють стержень, спрямований по повздожній осі несучого тіла

Опис системи, потенціальна енергія приведеної системи. Модель обертового тіла із стержнем, спрямованим по повздожній осі тіла показана на рис. 4. Стержень – невагомий, несе зосереджену масу m на кінці. У першому випадку стержень абсолютно жорсткий, прикріплений в'язко-пружним сферичним шарніром до несучого тіла (рис. 4, а). В другому випадку стержень – пружний (рис. 4, б).

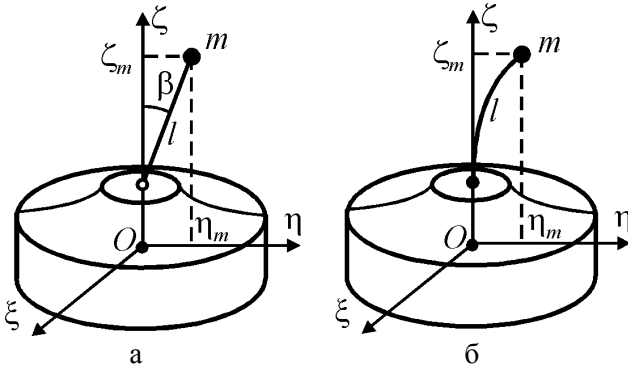


Рис. 4 Модель обертового тіла із стержнем, спрямованим по повздожній осі тіла

В основному русі маятник лежить на осі ζ , маса знаходиться на відстані b від точки O , і система обертається навколо осі ζ . На побічному русі, який стає стійким, коли основний рух втрачає стійкість, маса маятника має координати

$$\xi_m = 0, \quad \eta_m = \eta_m, \quad \zeta_m = \zeta_m, \quad (5.1)$$

причому це у випадку, коли $B_G \geq A_G$. Тоді координати центра мас системи відносно осей $O\xi\eta\zeta$ матимуть вигляд

$$\xi_G = 0, \quad \eta_G = \frac{m\eta_m}{M_\Sigma}, \quad \zeta_G = \frac{m\zeta_m}{M_\Sigma}. \quad (5.2)$$

Осьові і відцентрові моменти інерції системи відносно осей $O\xi\eta\zeta$:

$$J_\xi = A + m(\eta_m^2 + \zeta_m^2), \quad J_\eta = B + m\zeta_m^2, \quad J_\zeta = C + m\eta_m^2, \\ J_{\xi\eta} = J_{\xi\zeta} = 0, \quad J_{\eta\zeta} = m\eta_m\zeta_m. \quad (5.3)$$

Відносно центральних осей $O\xi_G\eta_G\zeta_G$, паралельних осям $O\xi\eta\zeta$, тензор інерції має вигляд (2.3), або у розгорнутому вигляді

$$J_{\xi_G} = A_G + \frac{mM}{M_\Sigma}(\eta_m^2 + \zeta_m^2 - b^2), \\ J_{\eta_G} = B_G + \frac{mM}{M_\Sigma}(\zeta_m^2 - b^2), \quad J_{\zeta_G} = C + \frac{mM}{M_\Sigma}\eta_m^2,$$

$$J_{\xi_G\eta_G} = J_{\xi_G\zeta_G} = 0, \quad J_{\eta_G\zeta_G} = \frac{mM}{M_\Sigma}\eta_m\zeta_m, \quad (5.4)$$

де

$$A_G = A + \frac{mMb^2}{M_\Sigma}, \quad B_G = B + \frac{mMb^2}{M_\Sigma}. \quad (5.5)$$

Осьовий момент інерції J_{z_G} системи

$$J_{z_G} = \mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{z}_G = \left[B_G + \frac{mM}{M_\Sigma}(\zeta_m^2 - b^2) \right] \sin^2 \alpha - \\ - \frac{mM}{M_\Sigma} \eta_m \zeta_m \sin 2\alpha + \left(C + \frac{mM}{M_\Sigma} \eta_m^2 \right) \cos^2 \alpha. \quad (5.6)$$

Кінетична енергія системи на усталеному русі

$$T_0 = \frac{K^2}{2J_{z_G}} = \frac{\omega_0^2 C^2}{2J_{z_G}}, \quad (5.7)$$

де K – модуль вектора кінетичного момента системи, ω_0 – швидкість обертання системи на основному русі.

З точністю до величин другого порядку малості включно потенціальна енергія системи має вигляд

$$\Pi = \frac{1}{2} c \eta_m^2, \quad (5.8)$$

де c – коефіцієнт жорсткості шарніра чи стержня.

Потенціальна енергія приведеної системи

$$W = T_0 + \Pi. \quad (5.9)$$

Умови стійкості основного руху системи.

Для гнучкого чи жорсткого стержня координату ζ_m , із точністю до величин другого порядку малості щодо η_m , можна подати у вигляді

$$\zeta_m \approx b - b_2 \eta_m^2, \quad (5.10)$$

де b_2 – деяка стала величина. Введемо у розглядання нову безрозмірну координату

$$\varphi = \eta_m / b. \quad (5.11)$$

Тоді з точністю до величин другого порядку малості щодо φ, α включно

$$2W \approx k(a_0 + a_{11}\varphi^2 + 2a_{12}\varphi\alpha + a_{22}\alpha^2), \quad (5.12)$$

де

$$k = mb^2\omega_0^2, \quad a_0 = \frac{C}{mb^2}, \quad a_{11} = \frac{cM_\Sigma - mM\omega_0^2}{mM_\Sigma\omega_0^2}, \\ a_{12} = -\frac{M}{M_\Sigma}, \quad a_{22} = \frac{C - B_G}{mb^2}. \quad (5.13)$$

З першої групи умов критерію Сильвестра знаходимо такі необхідні умови стійкості основного руху

$$\omega_0 < \omega_1, \quad C > B_G, \quad (5.14)$$

де

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{cM_\Sigma}{mM}}. \quad (5.15)$$

Друга група умов після перетворень дає

$$\Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \\ = \frac{M}{mb^2 M_\Sigma \omega_0^2} \left[(C - B_G)\omega_1^2 - (C - B)\omega_0^2 \right] > 0,$$

звідки знаходимо таку необхідну умову стійкості

$$\omega_0 < \omega_2. \quad (5.16)$$

де

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \sqrt{\frac{C - B_G}{C - B}} = \sqrt{\frac{c_0 M_\Sigma}{mM}} \cdot \sqrt{\frac{C - B_G}{C - B}}. \quad (5.17)$$

Разом умови (5.14) і (5.16) дають такі необхідні і достатні умови стійкості основного руху

$$C > B_G, \quad \omega_0 < \omega_2. \quad (5.18)$$

З одержаних умов випливає, що навіть у випадку сплюсненого складеного тіла ($C > B_G$) існує критична швидкість ω_2 , при перевищенні якої основний рух втрачає стійкість.

Висновки. Проведені дослідження дозволяють зробити такі висновки.

1. Умова стійкості усталеного руху обертової ізольованої системи, відповідно до якої на цьому русі складене тіло повинно обертатися навколо осі найбільшого момента інерції, є необхідною, але не є достатньою умовою стійкості.

2. Якщо приєднані тіла утворюють демпфери, що проявляють автобалансувальні властивості (маятникові, рідинні), то для стійкості основного руху необхідно і достатньо, щоб складене тіло було сплюснутим і щоб відстань від центра мас системи до площини зрівноваження не перевищувала певного граничного значення.

3. Якщо приєднане тіло – пружно закріплений стержень, орієнтований по повздовжній осі несучого тіла, то для стійкості основного руху необхідно і достатньо, щоб складене тіло було сплюснутим і система

оберталася з кутовими швидкостями, що не перевищують певне граничне значення.

Список використаних джерел

1. Філімоніхіна І.І. Умови зменшення автобалансирами кута нутації обертового супутника Землі // Всеукраїнський н.-т. журнал „Вібрації у техніці та технологіях”. – 2007. №1 (46), – С. 34–37.
2. Філімоніхіна І.І. Усталені рухи і умови самозрівноваження одного типу ізольованої системи // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. – 2007. №3, – С. 103–109.
3. Філімоніхіна І.І., Філімоніхін Г.Б. Условія урівноваження автобалансирами вращающегося тела в изолированной системе // Прикладная механика. – 2007. – т.43, №11, – С. 113–120.
4. Горошко О.О., Філімоніхіна І.І. Достатні умови усунення автобалансирами кута нутації незрівноваженого обертового тіла в ізольованій системі // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. – 2008. №1. – С. 53–58.
5. Артюхин Ю.П., Каргу Л.И. Симаев В.Л. Системы управления космических аппаратов, стабилизируемых вращением. – М.: Наука, 1979. – 295 с.
6. Попов В.И. Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1986. – 184 с.
7. Докучаев Л.В., Рабинович Б.И. Анализ возмущенного движения вблизи границы устойчивости вращающегося КА типа Авроральный зонд проекта Интербол // Космические исследования. – 1999. – т.37, №6. – С. 589–597.
8. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия. – М.: Наука, 2002. – 119 с.
9. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.

Надійшла до редколегії 19.09.08

***Філімоніхіна І.І., Горошко О.О., Умови стійкості основних рухів чотирьох обертових ізольованих систем // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. – 2008. №3. – С. 99-105.**