

SUMMARY. Peculiarities of the generalized boundary effects are studied for their effect on the stressed-strained state of thin shells of zero Gaussian curvature. Moment-free and moment shells are considered, regularities in the change of the reduction coefficients are studied. Solutions for the moment-free shell are compared with the published data.

1. Аксельрад Э. Л. Гибкие оболочки.— М.: Наука, 1976.—376 с.
2. Власов В. З. Общая теория оболочек.— М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.—784 с.
3. Головешкин Ю. В. К расчету стрингерных цилиндрических оболочек с помощью метода усреднения // Прикл. механика.—1989.—23, № 11.— С. 116—119.
4. Головешкин Ю. В. Решение задачи о концентрации напряжений около отверстий в тонких оболочках нулевой гауссовой кривизны с использованием приведения разрешающего уравнения к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно комплексного переменного / Пробл. прочности.—1989.— № 11.— С. 114—118.
5. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек.— М.: ГИТТЛ, 1953.—544 с.
6. Папкович П. Ф. Теория упругости.— М.; Л.: Оборонгиз, 1939.—544 с.

Санкт-Петербург

Поступила 03.12.90

УДК 539.376

И. К. Сенченков, В. И. Козлов,
С. Н. Якименко, Н. П. Нестеренко

К РАСЧЕТУ ПЛАНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ И ВИБРОРАЗОГРЕВА ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

В ультразвуковой технике широко используются элементы пластинчатой формы, совершающие изгибные или планарные колебания [1, 2]. К основным задачам их проектирования относятся расчет резонансных частот и форм колебаний, а также оценка их усталостной долговечности. При интенсивных, в частности резонансных, колебаниях возрастает роль виброразогрева, с точки зрения как его связи с долговечностью [1], так и с принципиальной возможностью реализации технологических процессов. Например, при сварке пластмасс ультразвуком разогрев рабочего торца инструмента может вызвать оплавление наружных поверхностей свариваемых деталей. Даже несмотря на широкое применение высокочастотных алюминиевых и титановых сплавов в качестве материалов элементов акустических систем, необходимость оценки уровня разогрева возникает, например, в случае длительных непрерывных режимов их эксплуатации.

В данной работе изложен конечно-элементный метод исследования планарных колебаний и виброразогрева плоских тел из линейно-вязкоупругого изотропного материала. В качестве примера проведен расчет резонансных характеристик и температурного поля прямоугольной пластины переменной толщины.

§ 1. Постановка задачи. Общая система уравнений связанной динамической теории термовязкоупругости, описывающая термомеханическое поведение гармонически деформируемых вязкоупругих тел, представлена в работах [3, 9]. В работе [7] для пластин малой, но конечной толщины, дана модифицированная постановка задачи о планарных колебаниях. Применяя аналогичный подход к краевой задаче теплопроводности, получаем в системе координат (x_1, x_2) соотношения связанной термовязкоупругости, которые включают уравнения

$$\tilde{\sigma}_{ij,j}^* + \rho^* \omega^2 \tilde{u}_i = 0; \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}) \quad i, j, k \leftrightarrow x_1, x_2;$$

$$\tilde{\sigma}_{ij}^* = 2\tilde{G}^* \left(\tilde{\varepsilon}_{ij} + \frac{\tilde{\nu}^*}{1 - 2\tilde{\nu}^*} \tilde{\varepsilon}_{kk} \delta_{jj} \right); \quad (1.1)$$

$$c_v^* \dot{\theta} = (k^* \theta_{,i})_{,i} - 2\alpha_1 (\theta - \theta_c) + \bar{D}^*; \quad \bar{D}^* = \frac{\omega}{2} (\sigma_{ij}^{*'} \varepsilon_{ij}' - \sigma_{ij}^{*''} \varepsilon_{ij}''),$$

граничные условия

$$\tilde{\sigma}_{ij}^* n_j = \tilde{f}_i^*; \quad (1.2)$$

$$-k^* \theta_{,i} n_i = \alpha_2^* (\theta - \theta_c) \text{ на } L,$$

и начальное условие

$$\theta = \theta_0 \text{ при } t = 0. \quad (1.3)$$

Здесь приняты обозначения

$$\tilde{G}^* = h\tilde{G}, \quad \rho^* = h\rho, \quad k^* = hk, \quad c_v^* = hc_v, \quad \alpha_1^* = h\alpha_1;$$

$$\tilde{f}_i^* = hf_i, \quad \tilde{\nu}^* = \tilde{\nu}(1 - \tilde{\Delta})/[1 + \tilde{\nu}(1 - 2\tilde{\Delta})]; \quad (1.4)$$

$$\tilde{\Delta} = \rho h^2 \tilde{\nu} \omega^2 / 24 (1 - \tilde{\nu}) \tilde{G},$$

причем \tilde{G} и $\tilde{\nu}$ — комплексные модуль сдвига и коэффициент Пуассона; $\tilde{G} = G' + iG''$, $\tilde{\nu} = \nu' - i\nu''$; \tilde{u}_i , $\tilde{\sigma}_{ij}$ и $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ — амплитуды компонент вектора перемещений, тензоров напряжений и деформаций; h — толщина тела в точке (x_1, x_2) , $h = h(x_1, x_2)$; ρ — плотность; k и c_v — коэффициенты теплопроводности и объемной теплоемкости; $\alpha_{1,2}$ — коэффициенты теплоотдачи; ω — круговая частота; \tilde{f}_i — компоненты нагрузки на граничном контуре L срединной поверхности пластины; \vec{n} — внешняя нормаль к L , $\vec{n} = (n_i)$; θ_0 — начальная температура; θ_c — температура окружающей среды; $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$; $(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial t$.

Соотношения (1.1) — (1.3) дают замкнутую систему уравнений для определения амплитуд перемещений, деформаций, напряжений и температуры виброразогрева.

§ 2. Метод решения задачи. Для решения задачи используется метод конечных элементов (МКЭ). Соответствующая вариационная формулировка имеет вид [3, 9]

$$\delta \Theta = 0, \quad \delta I = 0, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \Theta = \frac{1}{2} \int_S [\tilde{A}_1^* (\tilde{\varepsilon}_{11}^2 + \tilde{\varepsilon}_{22}^2) + \tilde{A}_2^* \tilde{\varepsilon}_{12}^2 + \tilde{A}_3^* \tilde{\varepsilon}_{11} \tilde{\varepsilon}_{22} - \rho^* \omega^2 (\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2)] ds - \\ - \int_L (\tilde{f}_1^* \tilde{u}_1 + \tilde{f}_2^* \tilde{u}_2) dl; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{2} \int_S [k^* (\theta_{,x_1}^2 + \theta_{,x_2}^2) + 2 \int_{\theta_0}^{\theta} c_v^* \dot{\theta} d\theta - 2\alpha_1 (\theta - \theta_c)^2 - \\ - 2\theta \bar{D}^*] ds + \frac{1}{2} \int_L \alpha_2^* (\theta - \theta_c)^2 dl. \end{aligned}$$

Для изотропных материалов

$$\tilde{A}_1^* = (3\tilde{K}^* + 4\tilde{G}^*)/3, \quad \tilde{A}_2^* = 4\tilde{G}^*, \quad \tilde{A}_3^* = 2(3\tilde{K}^* - 2\tilde{G}^*)/3;$$

$$\bar{D}^* = \frac{\omega}{2} \left[2G^{**} (|\tilde{\varepsilon}_{11}|^2 + |\tilde{\varepsilon}_{22}|^2 + 2|\tilde{\varepsilon}_{12}|^2) + \frac{1}{3} (3K^{**} - 2G^{**}) |\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22}|^2 \right];$$

$$\tilde{K}^* = 2\tilde{G}^* (1 + \tilde{\nu}^*) / 3(1 - 2\tilde{\nu}^*). \quad ||$$

Область S представляется в виде объединения восьмиузловых криволинейных четырехугольников $S_i, i=1, 2, \dots, K$. После изопараметрических отображений областей S_i на $\hat{S}_i = (\xi, \eta : -1 \leq \xi, \eta \leq 1)$ выражения для компонент вектора перемещений и температуры в пределах четырехугольника записываются в виде:

$$\tilde{u}_1 = \sum_{i=1}^8 \varphi_i(\xi, \eta) \tilde{u}_{1i}, \quad \tilde{u}_2 = \sum_{i=1}^8 \varphi_i(\xi, \eta) \tilde{u}_{2i}, \quad \theta = \sum_{i=1}^8 \varphi_i(\xi, \eta) \theta_i,$$

где φ_i — биквадратные полиномы серендипового типа, $\tilde{u}_{1,2}$ и θ_i — значения неизвестных узловых перемещений и температуры.

Реализуя стандартную процедуру МКЭ (2, 5), из условия стационарности функционала $\Theta, \delta\Theta = 0$, получаем систему комплексных линейных алгебраических уравнений относительно вектора \tilde{U} узловых перемещений

$$\tilde{C}\tilde{U} - \omega^2 M\tilde{U} = \tilde{F}, \quad (2.3)$$

где \tilde{C} и M — матрицы жесткости и масс, \tilde{F} — узловые значения вектора нагрузки.

При вычислении компонент матриц интегрирование производится численно с использованием квадратурных формул Гаусса для трех точек интегрирования в каждом направлении. Система решается методом Гаусса. По известным соотношениям находятся деформации, напряжения и диссипативная функция в точках интегрирования. При необходимости указанные величины экстраполируются в другие точки конечного элемента с использованием билинейных функций формы.

Аналогично из условий стационарности функционала теплопроводности I для определения узловых значений температуры (на той же сетке конечных элементов) получаем систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка по времени. Для ее решения используется метод Бубнова—Галеркина [5].

Полагая $G'' = K'' = \nu'' = 0$ и $\tilde{F} = 0$, получаем задачу на собственные значения для определения собственных (резонансных) частот и форм колебаний. Результаты, тестирования программной реализации этой задачи приведены в работе [7].

Возможности разработанной методики проиллюстрируем на примере пластины, форма которой в двух проекциях показана на рис. 1.

В качестве материала использовался титановый сплав ВТ-6, физико-механические характеристики которого оценивались по данным работ [4, 8] и принимались следующими:

$$\tilde{G} = (0,439 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, 0,878 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2), \quad \tilde{\nu} = \nu = 0,3; \quad (2.4)$$

$$\rho = 0,442 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3, \quad k = 20,3 \text{ Вт/м.с.}$$

Расчету подлежит конфигурация для заданной резонансной частоты $f, f = 22 \pm 0,05$ кГц; коэффициента усиления $k_u, k_u = \langle |u_2| \rangle_{OC} / \langle |u_2| \rangle_{AB}, k_u = 3,5 \div 4,0$; коэффициента однородности $k_g, k_g = \min_{OC} |u_2| / \max_{OC} |u_2|, k_g = 0,7 \div 0,8$, а также геометрических параметров $a = 0,07$ м, $h_2 = 0,008$ м.

§ 3. Резонансные характеристики. Рассмотрим сначала планарные симметричные относительно прямой $x_2 = l/2$ колебания пластины $0 < x_1 < a$, $0 < x_2 < l$ постоянной толщины ($h_1 = h_2 = h$). Высоту пластины примем $l = 0,1149$ м, близкой к величине $\lambda_E/2$, где λ_E — длина волны стержневой моды, $\lambda_E = f^{-1}[2(1 + \nu)G'/\rho]^{1/2} = 0,231$ м. Полагая $h = 0,03$ м, для коэффициента Пуассона согласно (1.4) получаем $\nu^* = 0,227$.

Результаты расчетов, представленные в таблице, показывают, что при заданной высоте l резонансная частота f и коэффициент k_g на по-

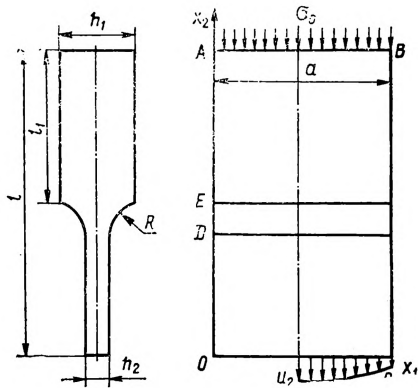


Рис. 1

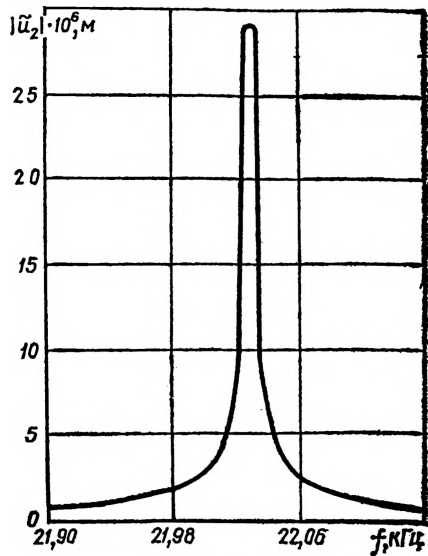


Рис. 2

верхности $x_2 = 0$ снижаются с увеличением ширины пластины a . Распределение перемещения u_2 (рис. 1) показывает характер отличия движения торца OC от требуемого поршневого. При $a = 0,11$ м ($\approx \lambda_E/2$) перемещение u_2 имеет узлы при $x_1 = 0, a$. Если в качестве предельно допустимого значения принять $k_g = 0,7$, то для предельной ширины пластинки имеем значение $a \approx 0,075$ м, примерно равное $\lambda_E/3$ ($\lambda_E/3 = 0,077$ м). Таким образом, для $a = 0,07$ м величина k_g находится в требуемых пределах. Корректировка размера на резонансную частоту 22 кГц при $a = 0,07$ м дает $l = 0,1130$ м. На втором этапе расчетов учитываем изменение толщины пластины, необходимое для получения требуемого усиления нормальных перемещений от поверхности AB к поверхности OC . Если для пластины ступенчатой толщины ($R = 0$) принять $h_1 = 0,03$ м и $l_1/l = 0,5$, то, согласно теории стержней (10) для коэффициента усиления получаем лежащую в требуемых пределах оценку $k_u \approx h_1/h_2 = 3,75$. Конечноэлементный расчет для $f = 22$ кГц дает следующие значения резонансных характеристик:

$$l = 0,1136 \text{ м}, k_u = 3,35, k_g = 0,84, f_{,l} = -181,7 \text{ кГц/м}.$$

Здесь $f_{,l}$ — коэффициент чувствительности частоты f к длине l , $f_{,l} = df/dl$, а коэффициент k_g отвечает «тонкому» торцу OC . Согласно

$a, \text{ м}$	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,11
$f, \text{ кГц}$	22,108	22,054	21,906	21,655	21,051	19,772
k_g	0,998	0,973	0,924	0,779	0,493	узел

этим данным ступенчатое при $x_2=l/2$ изменение толщины пластины приводит к незначительному ($\sim 50\%$) повышению резонансной частоты f и заметному ($\sim 8\%$) увеличению коэффициента k_g .

Учет закругления $R=0,011$ м в области изменения толщины, необходимого для снижения концентрации напряжений, приводит к окончательным значениям резонансных характеристик $f=22$ кГц, $l=0,1190$ м, $k_u=3,30$, $k_g=0,84$, $f_{,1}=-192,2$ кГц/м, которые несую-

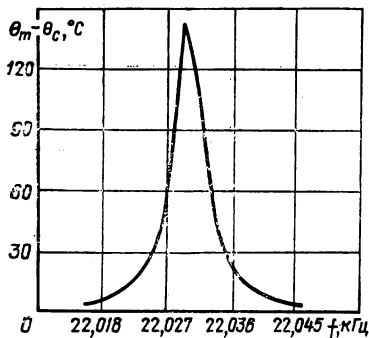


Рис. 3

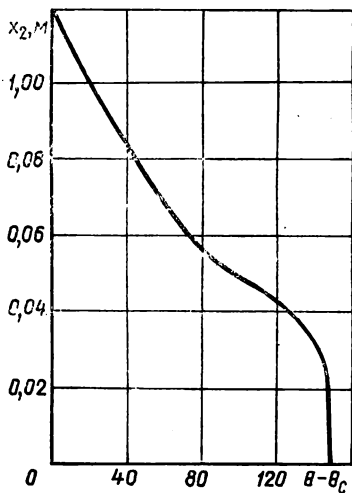


Рис. 4

щественно (за исключением увеличения l на 5%) отличаются от случая ступенчатого изменения толщины.

После определения резонансной конфигурации, полагая модуль сдвига комплексной величиной $\tilde{G} = G' + iG''$ рассчитываем амплитудно-частотную характеристику (АЧХ).

Предположим, что колебания пластины возбуждаются равномерно распределенной на торце AB (рис. 1) нормальным напряжением с амплитудой σ_0 . Характеристика для перемещения $\tilde{u}_2(0, 0)$, отвечающая $\sigma_0 = 1,74 \cdot 10^4$ Н/м² и параметрам (2.4), приведена на рис. 2. Она дает представление о ширине резонансной области для рассматриваемого класса объектов, а также точности методики расчета.

§ 4. Температурное поле виброразогрева. Расчет стационарного температурного поля проводился для рассмотренной выше конфигурации, условий нагружения и параметров (2.4). Принимаются следующие условия теплообмена: $\theta = \theta_c$, $x_2 = l$, $0 < x_1 < a$; $\theta, x_2 = 0$, $x_2 = 0$, $0 < x_1 < a$. Теплообмен на остальных поверхностях определяется соотношениями (1.1), (1.2) и (1.4) при $\alpha_1 = \alpha_2 = 8,8$ Вт/м²·с.

Эти соотношения моделируют условия теплообмена пластинчатого волновода, верхний торец (рис. 1) которого контактирует с металлическими элементами акустической системы, а нижний — со свариваемым телом. Остальная поверхность охлаждается путем естественной конвекции. На рис. 3 приведена температурно-частотная характеристика пластины. Здесь θ_m — максимальное по объему тела значение температуры. График демонстрирует уровень виброразогрева пластины при резонансном перемещении торца OC около 30 мкм. Распределение температуры вдоль прямой $x_1 = a/2$, $0 < x_2 < l$, $l = 0,1190$ м, показано на рис. 4. Таким образом, при длительных колебаниях с резонансными перемещениями порядка 30 мкм температура пластинчатых полуволновых резонаторов даже из высокооборотных материалов может достигать температуры вязкотекучего перехода для многих конструкционных

пластмасс, соединенных методом ультразвуковой сварки. Это обстоятельство, а также влияние разогрева на усталостную долговечность делает необходимым проведение соответствующего термомеханического анализа при проектировании элементов мощных ультразвуковых систем.

В заключение сделаем ряд замечаний. Полученные результаты, отвечающие линейно-вязкоупругой модели материала, дают лишь приближенную, существенно завышенную оценку резонансных амплитуд и температуры. Дальнейшее уточнение методики расчета состоит в учете зависимости физико-механических характеристик материала от температуры, а также механических характеристик амплитуд деформаций или напряжений. Согласно результатам работы [6], последний из указанных факторов оказывает определяющее влияние на термомеханическое состояние тел в резонансной области колебаний.

РЕЗЮМЕ. В рамках зв'язаної лінійної термов'язкопружності дається постановка задачі про планарні коливання і вібророзігрів елементів конструкцій, які мають форму пластин змінної товщини. Розроблено скінченно-елементну методику розрахунку вимушених, а саме резонансних коливань та температурного поля дисипативного розігріву. Наведено результати розрахунку резонансної конфігурації, амплітудно- і температурно-частотних характеристик пластинчатого хвилепроводу для ультразвукового зварювання пластмас.

SUMMARY. A refined statement of the problem on planar oscillations and vibroheating of the members as plates of variable thickness is given in the frames of the bound linear thermoviscoelasticity. A finite-element procedure is developed for calculation of forced, particularly resonance oscillations and the temperature field of the dissipative heating. Results for calculation of the resonance configuration, amplitude- and temperature-frequency characteristics of the plate waveguide for ultrasound welding of plastic are presented.

1. Войцеховский Н. И. Расчетный метод определения усталостной долговечности элементов конструкций, основанный на анализе их разогрева / Ин-т техн. механики АН УССР.— Днепропетровск, 1983.— 29 с.— (Деп. в ВИНТИ, № 6101—83 Деп.)
2. Гуменюк Б. П., Карнаухова В. Г., Козлов В. И. Численное исследование термомеханического поведения вязкоупругих тел при плоском гармоническом деформировании // Прикл. механика.— 1985.— 21, № 1.— С. 10—16.
3. Карнаухова В. Г., Сенченко И. К., Гуменюк Б. П. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении.— Киев: Наук думка, 1985.— 288 с.
4. Кожевников И. Г., Новицкий Л. А. Теплофизические свойства материалов при низких температурах: Справочник.— М.: Машиностроение, 1982.— 328 с.
5. Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Х. С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов.— М.: Высш. шк., 1985.— 391 с.
6. Сенченко И. К. Резонансные колебания и виброразогрев нелинейновязкоупругого стержня, взаимодействующего с вязкоупругим элементом // Прикл. механика.— 1991.— 27, № 10.— С. 56—63.
7. Сенченко И. К., Беспалова Е. И., Козлов В. И. О возможностях уточненного метода расчета планарных колебаний пластинчатых тел // Прикл. механика.— 1991.— 27, № 11.— С. 48—53.
8. Силин Л. Л., Баландин Г. Ф., Коган М. Г. Ультразвуковая сварка.— М.: ГНТИ машиностр. лит., 1962.— 252 с.
9. Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении / Потураев В. Н., Дырда В. И., Карнаухова В. Г. и др.; Под ред. Потураева В. Н.— Киев: Наук. думка, 1987.— 288 с.
10. Теумик И. И. Ультразвуковые колебательные системы.— М.: ГНТИ машиностр. лит., 1959.— 332 с.
11. Andoh E., Kagawa Y. Finite element simulation of a ultrasonic vibrator for plastic welding // IEEE Ultrasonic Symp. Proc. San Francisco, Calif.— 1985.— 1.— P. 563.
12. Rawson F. F. Ultrasonic joining of Plastics // Join. and Mater. 1988.— 1, N 5.— P. 227—229.