

УДК: 539.3/.6(075.8)

**В.М. Лушніков, доц., канд. техн. наук, О.Б. Чайковський, доц., канд. техн. наук, В.В. Пирогов, асист., О.Ю. Кравченко, ст. гр. ЕЕ 08**  
*Кіровоградський національний технічний університет*

## Теоретичне обґрунтування експериментальних досліджень вільних коливань систем з двома степенями вільності

Аналітичні дослідження коливальних систем з двома степенями вільності, складених з двох вантажів різних мас, показують, що сумарний рух системи структурований двома незалежними коливаннями. Рівняння, складені згідно закону руху кожного вантажу, враховують пропорційну залежність з їх віддаленості від стану рівноваги. Знаки зміщень протилежні, коли коливання вантажів знаходяться в протилежних фазах.

**коливальна система, степінь вільності, головне коливання, амплітуда, колова частота, координата**

На даний момент опубліковані лише відомості про найпростішу коливальну систему з одним ступенем вільності. Це установка, де рухомий вантаж, підвішений на вертикально розташованій пружині [1]. Відсутні, також, дані які експериментально підтверджують результати аналітичних досліджень вільних коливань систем з одним та двома степенями вільності.

Схожі проблеми виникають і при випробуваннях циліндричних гвинтових пружин. При таких дослідженнях прикладають навантаження, які поступово змінюють у часі як статично, так і динамічно [2].

Для комплексного підходу при дослідженні коливальних систем надамо теоретичне обґрунтування методики лабораторного дослідження вільних коливань для більш загального випадку, а саме – з двома степенями вільності.

Найпростішою коливальною механічною системою, що має два степеня вільності, є два вантажі масами  $m_1$  та  $m_2$ , підвішені на вертикально розташованих пружинах жорсткістю  $c_1$  та  $c_2$ . Аналітичні дослідження такої коливальної системи наведені в підручниках з теоретичної механіки [3-5], з яких видно, що рух системи з двома степенями вільності складається з двох незалежних коливань:

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2); \\x_1 &= \mu_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + \mu_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2).\end{aligned}\quad (1)$$

Ці коливання, що відбуваються з частотами, відповідно,  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , називають головними коливаннями. Коефіцієнти  $\mu_1$  і  $\mu_2$  визначають форми коливань. Вони показують, у скільки разів амплітуда відповідного головного коливання в одній з координат більша (або менша) від амплітуди в другій координаті.

Колові частоти власних коливань  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , а також, коефіцієнти  $\mu_1$  і  $\mu_2$  форм коливань є основними характеристиками коливань систем з двома степенями вільності.  $A_1, A_2, \varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$  – довільні сталі, що визначаються з початкових умов.

Рівняння (1) відповідають диференціальним рівнянням руху системи [4]:

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 + c_2 (x_1 - x_2) &= 0; \\m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) &= 0.\end{aligned}\quad (2)$$

Рівняння (2) складені згідно закону руху кожного вантажу з урахуванням того, що, при відхиленні вантажів від стану рівноваги, на них діють реакції пружин, пропорційні їх відхиленню від цього стану. При цьому,  $x_1$  і  $x_2$  відраховуються від стану рівноваги вантажів. Знаки  $x_1$  і  $x_2$  у першому головному коливанні однакові, тобто, вантажі рухаються в один бік; в другому головному коливанні знаки різні. Це означає, що коефіцієнти форми можуть бути додатними і від'ємними. Якщо ( $\mu_1 > 0$ , то  $x_1$  і  $x_2$  мають однакові фази; якщо  $\mu_2 < 0$ , то їх фази відрізняються на  $\pi$  рад.

Частоти власних коливань системи для рівнянь (1) і (2) визначаються з рівняння частот:

$$[(c_1 + c_2) - m_1\omega^2] \cdot (c_2 - m_2\omega^2) - c_2^2 = 0. \quad (3)$$

У частинному випадку, коли  $c_1 = c_2 = c$  і  $m_1 = m_2 = m$ , рівняння (3) матиме вигляд

$$\omega^4 - 3\frac{c}{m}\omega^2 + \left(\frac{c}{m}\right)^2 = 0. \quad (4)$$

Звідки теоретичні значення частот головних коливань:

$$\omega_1^2 = 2,618\frac{c}{m}; \quad \omega_2^2 = 0,382\frac{c}{m}; \quad (5)$$

або

$$\omega_1 = 1,618\sqrt{\frac{c}{m}}; \quad \omega_2 = 0,618\sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (6)$$

Коефіцієнти форм коливань у цьому випадку мають значення:

$$\mu_1 = 1,618; \quad \mu_2 = -0,618. \quad (7)$$

Перше головне коливання з частотою  $\omega_1$  складається з  $x_1^{(1)}$  і  $x_2^{(1)} = \mu_1 \cdot x_1^{(1)}$ . Так як  $\mu_1 > 0$ , то знаки зміщення  $x_1^{(1)}$  і  $x_2^{(1)}$  в першому головному коливанні однакові і коливання вантажів співпадають по фазі. Друге головне коливання з частотою  $\omega_2$  включає в себе зміщення  $x_1^{(2)}$  і  $x_2^{(2)} = \mu_2 \cdot x_1^{(2)}$ . Так як  $\mu_2 < 0$ , то знаки зміщень  $x_1^{(2)}$  і  $x_2^{(2)}$  протилежні. Коливання вантажів відрізняються по фазі на  $180^\circ$ .

При проведенні експериментальних досліджень на установці коливальні рухи вантажів можуть фіксуватися і оброблятися комп'ютером. За змінами  $x_1$  і  $x_2$  в довільний момент часу можна визначати  $\ddot{x}_1$  і  $\ddot{x}_2$  та порівнювати з теоретичними значеннями, отриманими з рівнянь (2). Експериментальні значення частот головних коливань визначаються кількістю коливань кожного вантажу за секунду та порівнюються з даними рівнянь (6). Експериментальні значення коефіцієнтів форм коливань визначаються за амплітудами коливань кожного вантажу у першому і другому головних коливаннях. Перевірка точності проводиться за даними рівнянь (7). Визначаються похибки за усіма досліджуваними характеристиками.

Наступним етапом нашого дослідження буде створення установки для дослідження вільних коливань систем з двома степенями вільності. Можлива модель такої установки буде відноситись до галузі випробувальної техніки. Для вимірювання параметрів коливальних рухів будуть застосовані сучасні інструменти: лазерна указка, дискретна світлочутлива лінійка, перетворювач сигналів та швидкодійний інтерфейс, з'єднаний з комп'ютером.

## Список літератури

1. Патент ІА № 51381 від 12.07.2010. Бюл. № 13, 2010 р.
2. Патент ІА № 59149 від 10.05.2011. Бюл. № 9, 2011 р.
3. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. II Динамика. – 6-е изд. М.: Наука. 1983. – 640 с. (с. 547 - 560).

4. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 502 с. (с. 429 - 431).
5. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. Учебник. 5-е изд. – М.: Высш. шк., 1990. – 607 с.

Одержано 28.11.12

УДК: 539.3/.6(075.8)

**В.М. Лушніков, доц., канд. техн. наук, О.Б. Чайковський, доц., канд. техн. наук, В.В. Пирогов, асист., Є.О. Лементя, ст. гр. БП 09**

*Кіровоградський національний технічний університет*

## Дослідження вільних коливань систем з двома степенями вільності

Запропонована експериментальна установка, яка дозволяє коливальні рухи вантажів фіксувати та обробляються комп'ютером за сигналами дискретних світлочутливих лінійок. За рахунок пружності пружин вантажі здійснюють коливальні рухи. За змінами параметрів коливань в довільний момент часу можна визначати частоти головних коливань, амплітуди та коефіцієнти форм. Отримані дані порівнюються з теоретичними значеннями.

**установка, вільні коливання, степені вільності, механічна система, світлочутлива лінійка**

Відомі лабораторні установки для дослідження вільних коливань систем з одним ступенем вільності [1, 2]. В той же час, відсутні дані про установки для досліджень вільних коливань механічної системи з двома степенями вільності.

Метою даної наукової роботи стало створення такої установки. Комплектація установки, та її робота полягає у наступному (рис. 1).

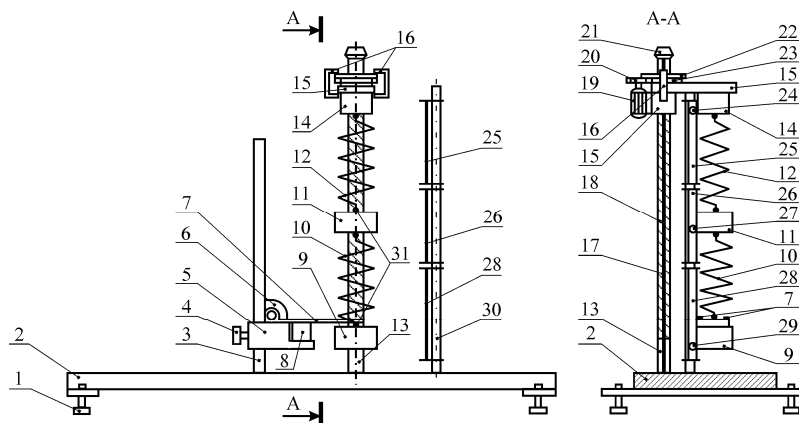


Рисунок 1 – Установка для дослідження вільних коливань

До основи 2 з регульованими гвинтами-ніжками 1 прикріплені перпендикулярно основі три штанги – 3, 13, 30. На штанзі 13, з різьбою 18 та шліцьовою канавкою 17, встановлений кронштейн 15 з механізмом підйому в корпусі 16, який складається з електродвигуна 19, циліндричної шестерні 20, закріпленої на валу електродвигуна 19, яка зчеплена з циліндричною гайкою-шестернею 23. По різьбі 18 штанги 13, при обертанні гайки-шестерні 23, відбувається підйом кронштейна 15. Торцева шайба 22 призначена для забезпечення зчеплення шестерень 20 та 23 при русі кронштейна 15 по штанзі 13 до обмежувача 21. На кронштейні 15 закріплений цифровий датчик сили 14,