УДК 656

В.И. Кравцов, проф., д-р техн. наук, А.Ю. Лысых, асп., С.В. Дубовенко, асп.
Херсонский национальный технический университет

Механика элементов подводных стержневых конструкций при нелинейном пространственном деформировании

Рассмотрен метод расчета составных стержневых конструкций, который позволяет получить характеристики напряженно-деформированного состояния в целом для конструкции и для фрагмента стержневой конструкции в отдельности при нелинейном деформировании. Процесс пространственного деформирования описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые решаются численно методом продолжения по параметру совместно с применением метода Ньютона-Канторовича. Приведены результаты численных расчетов.
метод граничных элементов, составные стержневые конструкции, нелинейное пространственное деформирование, численные методы

Освоение нефтяных и газовых ресурсов континентального шельфа Украины является одной из важнейших народнохозяйственных задач, решение которой связано со строительством и эксплуатацией специальных сооружений в условиях шельфа, а также разработкой современных прогрессивных технологий проведения таких работ в условиях открытого моря. На основании опыта проектирования, строительства и эксплуатации объектов морских нефтегазопромыслов разработаны рекомендации по определению их основных параметров. Однако детальная разработка проекта возможна только на основании расчетов, учитывающих индивидуальные особенности конструкций, их отличие от уже существующих, конкретные условия внешней среды, в которой будет работать сооружение [1]. Основные виды сооружений нефтегазопромыслов – самоподъемные плавающие установки, железобетонные гравитационные платформы, стационарные платформы со сквозным опорным блоком и полупогружные платформы. Типовым конструктивным элементом таких сооружений является составная стержневая конструкция. Построенные 30-40 лет назад, морские платформы становятся объектом дополнительных исследований, так как износ и устарение многих деталей делает невозможным применение существующих норм и правил, рассчитанных при проектировании на стандартизированные узлы и детали. Поэтому задача определения несущей способности составных стержневых конструкций, решение вопроса о целесообразности и способах восстановления отказных узлов или о ликвидации сооружения в целом является актуальной как из-за высокой стоимости работ, так и из соображений экологической безопасности.

При расчете составных стержневых конструкций используются различные расчетные схемы. Наибольшее приближение к реальным условиям составных стержневых конструкций обеспечивает метод конечных элементов (МКЭ). Этот метод и соответствующие ему расчетные схемы используются в проектной практике только в конечном рабочем проекте, что объясняется трудоемкостью подготовки входных и выходных данных и высокой стоимостью расчетов на ЭВМ, с помощью которых только и возможна реализация программ [1]. История метода конечных элементов насчитывает несколько десятилетий, – совместными усилиями математиков, инженеров и программистов его удалось сделать универсальным средством решения краевых задач математической физики. В настоящее время библиография по методу конечных элементов включает десятки тысяч наименований. В основном выделяются два взаимосвязанных направления – теоретическое и прикладное. Теоретики занимаются разработкой новых схем метода, доказательством сходимости, оценками точности и т.д., прикладники рассчитывают реальные конструкции. В данной работе представлены два направления.

Говоря об МКЭ в механике, как правило, подразумевают его классический вариант – метод перемещений. В частности, этот метод описан в [1] для расчета морских платформ. Однако метод перемещений обладает несколькими недостатками: невысокой точностью определения напряжений, сложностью расчета трехмерных тел [2].

Достигнутый прогресс в разработке неклассических вариационных постановок краевых задач механики стимулировал проявление вариантов МКЭ, которые обычно называют методом гибридных конечных элементов (МГКЭ). Одним из таких разновидностей является метод равновесных граничных элементов (МГКЭ), построенный на основе классических вариационных принципов механики. Поэтому разрешающие дискретные уравнения являются аналогами соответствующих непрерывных уравнений теории упругости. Высокая вычислительная эффективность этого метода обусловлена существенным сокращением (в десятки раз) порядка разрешающей системы уравнений за счет того, что рассматриваются только граничные узлы системы [2].

Рассмотрим некоторую подобласть тела и выберем на ее границе два узла. Назовем эту область суперэлементом, используя известную терминологию [3]. В отличие от конечного элемента суперэлемент может иметь произвольную форму и переменное число граничных узлов. В нашем случае (подводная составная конструкция) таким суперэлементом является стержень с двумя граничными узлами (закрепленными концами). Расчет таких стержней при произвольном векторе нагружения и любой пространственной конфигурацией продольной оси в линейной постановке затруднений не вызывает. Однако для расчетов при нелинейном и упругом пространственном деформировании, а также для попутного контроля возможной потери устойчивости при продольном нагружении целесообразно использовании методики, описанной в [4], которая в данном случае является универсальной. Отметим, что здесь стержень рассматривается в общем случае нелинейного пространственного деформирования и описан системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 18$^{\text{ого}}$ порядка, которые решаются численно методом продолжения решений по параметру совместно с применением метода Ньютона-Канторовича.

Если необходимо рассчитать кусочно-однородное тело, то нужно использовать несколько суперэлементов, отожествляя каждый из них с однородной подобластью тела (составной стержневой конструкции). В связи с этим возникает проблема сопряжения соседних суперэлементов. Отметим, что в ряде случаев, например при большом разнообразии нагрузок в каждом из элементов составной стержневой конструкции, для избежания работы с большими суперэлементами рекомендуется разбить их на несколько меньших, обеспечив их соответствующее сопряжение. Принципиально методика сопряжения суперэлементов не отличается от методики, применяемой для конечных элементов. Здесь следует подчеркнуть, что простая подстановка и замена граничных условий в местах сопряжения еще не обеспечивает автоматически переход от одной задачи к другой; в каждом новом случае появляются свои особенности решений (задание нагрузок, величина шага интегрирования, количество шагов и др.).

Рассмотрим два соседних суперэлемента с номерами i и r и запишем для каждого из них условия сопряжения:

$$\begin{cases} K_{11}^i\{u_i\}+K_{12}^i\{u_{ir}\}=\{Q_i\}, \\ K_{21}^i\{u_i\}+K_{22}^i\{u_{ir}\}=\{Q_{ir}\}, \end{cases} \begin{cases} K_{11}^r\{u_r\}+K_{12}^r\{u_{ri}\}=\{Q_i\}, \\ K_{21}^r\{u_r\}+K_{22}^r\{u_{ri}\}=\{Q_{ri}\}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\{u_i\},\{u_r\}$ – граничные условия, принадлежащие i - му и только r - му элементам; $\{u_{ir}\},\{u_{ri}\}$ – граничные условия на общей границе элементов. K_i, Q_i – матрицы базисных функций и граничных условий на концах элемента. Если в местах сопряжения действует сосредоточенная сила P или сосредоточенный момент M, то граничные условия следует дополнить соотношениями:

$$\begin{aligned} &F_u(s_+^p)-F_v(s_-^p)=(P_x n_x+P_y n_y+P_z n_z)q/\sqrt{p^2+q^2}+ \\ &+(P_x b_x+P_y b_y+P_z b_z)p/\sqrt{p^2+q^2}, \\ &F_v(s_+^p)-F_v(s_-^p)=-(P_x n_x+P_y n_y+P_z n_z)p/\sqrt{p^2+q^2}+, \\ &+(P_x b_x+P_y b_y+P_z b_z)q/\sqrt{p^2+q^2}, \\ &F_w(s_+^p)-F_w(s_-^p)=P_x\tau_x+P_y\tau_y+P_z\tau_z \end{aligned} \tag{2}$$

где S – граница интервала интегрирования, n,b,τ – единичные векторы подвижного трехгранника. Аналогично формулируются условия разрыва функций p,q,r в точке приложения момента M:

$$\begin{aligned} &p(s_+^M)-p(s_-^M)=M_u/A, \\ &q(s_+^M)-q(s_-^M)=M_v/B, \\ &r(s_+^M)-r(s_-^M)=M_w/C, \end{aligned} \tag{3}$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к одновременному дифференцированию интегральных уравнений для каждого элемента в отдельности с соблюдением условий сопряжения.

Составная стержневая конструкция является пространственной в системе координат X,Y,Z, состоящей из элементов (прямолинейных или пространственно изогнутых стержней), жестко соединенных между собой. Для описания равновесия и деформирования отдельно взятого элемента будем различать его внутреннюю и внешнюю геометрию в следующей системе координат: неподвижная (x_i, y_i, z_i), подвижный трехгранник (u_i, v_i, w_i), естественный трехгранник (n_i, b_i, τ_i), принимая для их определения соответственно подходы Лагранжа и Эйлера [4]. Внутренняя геометрия при деформировании элемента вследствие неизменяемости его длины остается неизменной. Она задается координатой S, измеряемой расстоянием вдоль осевой линии от начальной точки до текущей, и подвижной, жестко связанной с рассматриваемым поперечным сечением системой координат (u_i, v_i, w_i). Главный трехгранник, принадлежащий какой-нибудь точке упругой линии, будет ориентироваться в пространстве как угодно (перемещаться поступательно и вращаться) в процессе деформирования с изменением нагрузки. Координата S индивидуализирует точки упругой линии и вследствие неизменяемости ее длины в процессе деформирования для каждой ее точки остается неизменной. Координата S в данном случае является сопутствующей, вместе с временем Т она составляет переменные Лагранжа. Внешняя геометрия определяет положение каждой точки и всей упругой линии элемента в неподвижной системе координат O *xyz*, позволяющей индивидуализировать точки пространства, в которых могут находиться точки элемента в процессе деформирования. Геометрические координаты O ***xyz*** являются переменными Эйлера. Основная задача сведется к установлению связи между переменными Лагранжа и Эйлера:

$$x = x(s,t), \quad y = y(s,t), \quad z = z(s,t), \tag{4}$$

Если деформирование во времени происходит медленно и силы инерции пренебрежимо малы, то задачу упругого формоизменения можно считать статической, а время t формально заменить параметром λ, характеризующим интенсивность внешнего возмущения, действующего на элемент.

Для численной реализации поставленной задачи представим равновесие механической системы функциональным уравнением $F(x) = 0$, где x – вектор состояния; F – дифференцируемый по x необходимое количество раз нелинейный оператор. Введем параметр $0 \le \lambda \le 1$ и построим оператор $G(x;\lambda) = \Phi(x) - \lambda b$ такой, чтобы выполнялось равенство $G(x;\lambda) = \Phi(x) - \lambda b = F(x)$ и при λ=0 уравнение $G(x;0) = 0$ имело очевидное решение x^0. Пусть уравнение $G(x;\lambda) = 0$ имеет непрерывное решение $x = x(\lambda)$, определенное при $0 \le \lambda \le 1$ и удовлетворяющее условию $x(0) = x^0$. Разобьем промежуток [0,1] точками $\lambda_{(0)} = 0 < \lambda_{(1)} < ... < \lambda_{(m)} = 1$. По формуле Тейлора в окрестности точки $x_{(n)}(0 \le n \le m)$, удерживая в разложении некоторое число членов и имея элемент $x_{(n)}$, можно приближенно найти $x_{(n+1)}$. Равенство $x_{(0)} = x^0$ описывает последовательность операций, приводящих к элементу $x_{(m)}$. Каждый этап процесса представляет собой один шаг итерационного метода Ньютона-Канторовича. Условия сходимости являются одновременно и достаточными условиями существования решения в некоторой окрестности рассматриваемого состояния. Для реализации этого подхода составлен пакет прикладных программ, позволяющий определить напряженно-деформированное состояние (НДС) стержня произвольной пространственной геометрии [4] при произвольном векторе действующих статических, квазистатических или динамических нагрузок. Отличительной особенностью методики является возможность изменения геометрии объекта и (или) действия нагрузок (их добавление или снятие) в процессе неограниченного упругого нелинейного деформирования.

Покажем реализацию сформулированного подхода на примере расчета элемента составной стержневой конструкции, изображенного на рис.1. Здесь участок подводной составной конструкции состоит из двух жестко соединенных стержней, один из которых прямолинейный (АВ), а другой – пространственно криволинейный (ВС). Нагрузим эти стержни равномерно распределенной по всей длине нагрузкой и одной сосредоточенной силой (рис.1).

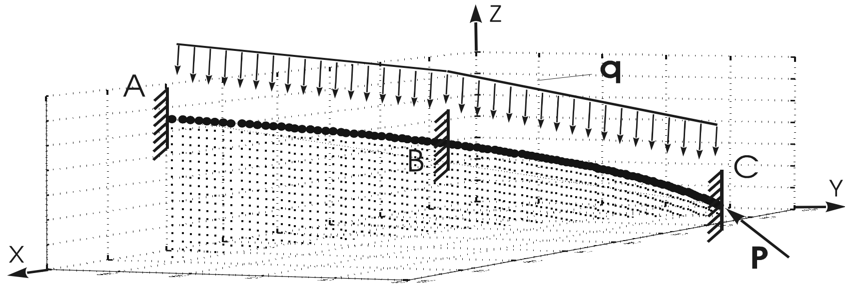
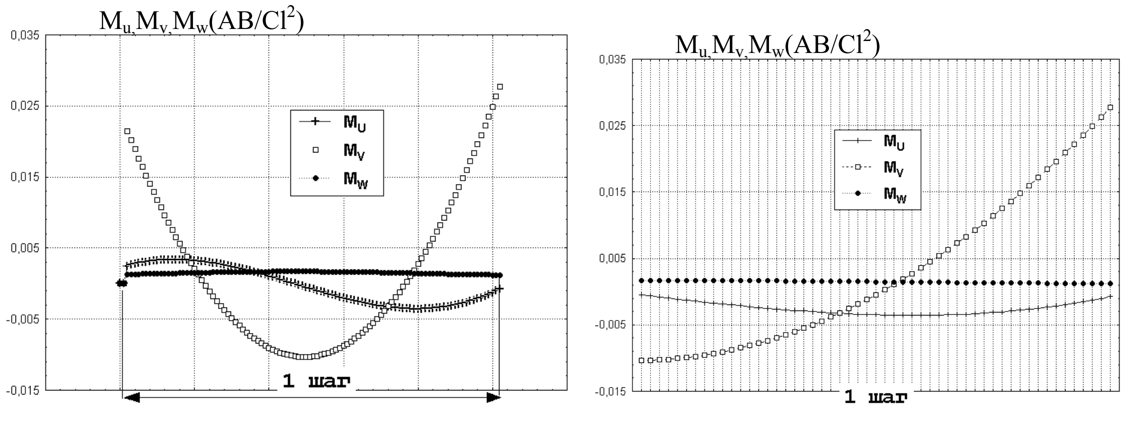


Рисунок 1 – Пространственно изогнутый фрагмент составной стержневой конструкции, нагруженный распределенной и сосредоточенной нагрузкой

Если принять, что деформирование будет линейно, а значит справедлив принцип суперпозиции действия сил, то решение такой задачи особых затруднений не вызывает. Однако, здесь необходимо показать возможность применения методики [4] для использования модификации МКЭ. Решение поставленной задачи сведем к одновременному дифференцированию интегральных уравнений для каждого элемента (АВ и ВС) в отдельности с соблюдением условий сопряжения (1) - (3). В результате численного решения получены характеристики напряженно-деформированного состояния для конструкции в целом и для элемента ВС в отдельности. На рис.2, а и 2, б это соответственно изгибающие моменты относительно собственных осей. Заметим, что вектор НДС в точке В для элемента ВС является граничными условиями для элемента АВ в точке В.



а) б)

Рисунок 2 – Характер распределения изгибающих моментов в сопряженных стержнях АС (а) и в отдельно взятом стержне ВС (б)

Сформулированный подход реализован в виде компьютерной программы, написанной на алгоритмическом языке СИ$^{++}$ с использование подпрограмм FORTRAN – 77. Для решения конкретной задачи достаточно задать координаты узлов составной конструкции, приняв координаты конца какого-нибудь стержня за начало отсчета глобальной системы координат, жесткости стержней и нагрузки, расположенные как угодно в пространстве. Следует отметить, что нагружение может быть осуществлено на любой стержень (стержни) подводной составной конструкции, а нагрузки (сосредоточенные, распределенные, моментные) отображаются при этом визуально на экране дисплея.

В результате численного расчета по методике, описанной в [1], выходные данные могут быть получены в удобном для пользователя виде. Например, возможно отслеживание на мониторе любой характеристики НДС отдельно выбранного стержня подводной составной конструкции или несколько стержней, или всех стержней одновременно, возможна также постановка автоматического ограничения в счете, например, по допускаемым напряжениям или по критическим продольным усилиям для любого из стержней. При этом время счета составной стержневой конструкции, состоящей из 200 стержней, при использовании компьютера с тактовой частотой 2000 МГц и оперативной памятью 256 Мгб составляло 30 сек. С учетом подготовки входных данных время на расчет реальной составной стержневой конструкции, составляющей основу морских платформ, может составлять от одного до двух часов, поэтому решение задачи возможно с помощью бортового компьютера. Практика использования методики при решении тестовых задач показала, что для достаточной уверенности в достоверности получаемых результатов необходимо убедиться в сходимости интегрирования разрешающих уравнений. Одним из таких признаков является визуальное наблюдение с помощью компьютерной графики за геометрией объекта непосредственно в процессе решения на любом шаге интегрирования. Если по каким-то причинам (неправильно выбраны начальные условия, неправильно выбрана величина шага нагрузки и тому подобное) задача численно не решается, то это, кроме программного контроля, сразу отображается на дисплее компьютера в виде нелогично расположенных геометрических форм объекта.

Список литературы

1. Возний В.Р., Ільницький М.К., Любимцев В.О. Проектування, будівнитцтво та екслуатація морських нафтогазових споруд: Підручник. – К.: Українська книга, 1999. – 231 с.
2. Еременко С.Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. – Х.: Харьк. ун-т, 1991. – 272 с.
3. Кравцов В.І. Механіка гнучких морських конструкцій. – К.: Наукова думка, 1999. – 131 с.
4. Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений/ Под ред. В.А. Постнова. – Л.: Судостроение, 1979. – 288 с.

Розглянуто метод розрахунку складених стержньових конструкцій, який дозволяє отримати характеристики напружено-деформованого стану для конструкції в цілому і для фрагмента конструкції окремо при нелінійній деформації. Процес просторової деформації описується системою нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, які розв'язуються числовим методом продовження по параметру сумісно із застосуванням методу Ньютона-Канторовіча. Приведено результати числових розрахунків.

The method of computation of component pivotal constructions, which allows to get characteristics of the tense-deformed state on the whole for construction and for the fragment of construction separately at nonlinear deformation, is considered. The process of spatial deformation is described by the system of nonlinear usual differential equalizations which decide numeral by the method of continuation on a parameter jointly with the use of the Nyutona-Kantorovicha method. The results of numeral computations are resulted.