

УДК 62-752+62-755: 621.634

DOI: 10.15587/1729-4061.2016.85461

# ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ТА ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ ГНУЧКОГО ДВОХОПОРНОГО РОТОРА З АВТОБАЛАНСИРАМИ БІЛЯ ОПОР

*Дослідження проведено у рамках дискретної моделі гнучкого двохопорного ротора, що балансується двома пасивними автобалансирами, розташованими біля опор. Отримано систему диференціальних рівнянь, що описують процес автобалансування. Встановлено, що основні рухи, за умови їх існування, є стійкими на зарезонансних швидкостях обертання ротора. Проведено оцінку перебігу перехідних процесів за коренями характеристичного рівняння*

*Ключові слова: гнучкий ротор, автобалансири, автобалансування, основні рухи, стійкість, перехідні процеси*

*Исследования проведены в рамках дискретной модели гибкого двухопорного ротора, балансируемого двумя пассивными автобалансирами, расположенными возле опор. Получена система дифференциальных уравнений, описывающая процесс автобалансировки. Установлено, что основные движения, при условии их существования, устойчивы на зарезонансных скоростях вращения ротора. Проведена оценка протекания переходных процессов по корням характеристического уравнения*

*Ключевые слова: гибкий ротор, автобалансири, автобалансировка, основные движения, устойчивость, переходные процессы*

**В. В. Гончаров**

Кандидат фізико-математичних наук, доцент\*

E-mail: honchv@ukr.net

**А. Ю. Невдаха**

Кандидат технічних наук\*\*

E-mail: aunevdaha@ukr.net

**Ю. А. Невдаха**

Кандидат технічних наук, доцент\*\*

E-mail: kntudmpmnjua@yandex.ru

**В. І. Гуцул**

Кандидат технічних наук, доцент\*

E-mail: vgutsul@yandex.ru

\*Кафедра вищої математики та фізики\*\*\*

\*\*Кафедра деталей машин і прикладної механіки\*\*\*

\*\*\*Кіровоградський національний технічний університет  
пр. Університетський, 8, м. Кропивницький, Україна, 25006

## 1. Вступ

Ротори багатьох газотурбінних двигунів, турбоагрегатів, відцентрових машин тощо працюють на великих швидкостях обертання. У наслідку цього вони поводяться як гнучкі [1, 2]. Форма і незрівноваженість гнучкого ротора залежать від поточної швидкості обертання, змінюються від температури та зношення ротора тощо. Тому такі ротори доцільно постійно добалансовувати під час експлуатації пасивними автобалансирами (АБ) [3–13]. В останніх коригувальні вантажі (КВ) у вигляді маятників, куль чи роликів за певних умов самі приходять у положення, в яких зрівноважують ротор. Після чого здійснюють усталені рухи, які прийнято називати основними. Існують і побічні усталені рухи, на яких автобалансування не настає і АБ збільшують вібрації ротора.

Для балансування широкого класу гнучких двоопорних роторів пасивними АБ на практиці необхідно мати певний спосіб, працездатність якого теоретично обґрунтована. При обґрунтуванні способу визначають умови існування і стійкості основних рухів (умови настання автобалансування), та оцінюють перехідні процеси.

Найбільш перспективним способом балансування гнучких роторів на двох податливих опорах є спосіб,

у якому два АБ розташовуються як можна ближче до опор [3]. Нижче обґрунтовується працездатність цього способу.

## 2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

В роботі [3] запропоновано спосіб автоматичного балансування гнучких роторів на двох податливих опорах, у якому ротор балансується двома АБ, розміщеними як можна ближче до опор. Зауважимо, що при балансуванні гнучкого ротора в двох [4] і більше [5] площинах корекції, що не співпадають з опорами, реакції опор (вібрації в опорах) не усуваються. Також із зростанням кутової швидкості обертання ротора автобалансування почергово то настає, то зникає. У новому способі прогини ротора не усуваються, але усуваються вібрації в опорах. Очікується, що і автобалансування наставатиме на більш широкому діапазоні швидкостей обертання ротора, ніж при балансуванні ротора в неопорних площинах.

В роботі [6] побудована дискретна модель гнучкого ротора на двох податливих опорах з двома багатокульовими (багатороликівими, багатомаятниковими) АБ, розташованими біля опор. Отримано систему диференціальних рівнянь руху автобалансувальної сис-

теми і систему диференціальних рівнянь, що описує процес автобалансування. Остання складена відносно координат дискретних мас ротора та сумарних незрівноваженостей (від ротора і АБ) в двох площинах корекції (опор). Встановлено умови існування основних рухів. Показано, що при підході до критичних швидкостей може не вистачити балансувальної ємності АБ через значне збільшення сумарних незрівноваженостей приведених до двох площин корекції.

Для подальшого обґрунтування способу балансування гнучких роторів необхідно дослідити стійкість основних рухів, оцінити перехідні процеси (ПП) і вплив на їх перебіг параметрів автобалансувальної системи.

Одержана в роботі [6] система диференціальних рівнянь, що описує процес настання автобалансування має високий порядок і її важко досліджувати аналітично.

Слід відзначити, що найбільш ефективними методами визначення умов настання автобалансування є емпіричний критерій стійкості основних рухів [7] і емпіричний (інженерний) критерій настання автобалансування [8]. Але ці критерії дозволяють визначати тільки резонансні чи критичні швидкості обертання ротора, при переході через які настає чи втрачається автобалансування. Для дослідження перехідних процесів вони незастосовні.

Більш громіздким і тому менш придатним є метод визначення умов настання автобалансування, що ґрунтується на методі синхронізації динамічних систем [9]. З його застосуванням, наприклад, визначалися умови настання автобалансування при балансуванні ротора двохкульовими АБ в одній [10] і двох [11] площинах корекції. В роботі [12] остання задача досліджувалась при незначній анізотропії опор. Даний метод не дозволяє досліджувати стійкість сімей усталених рухів. При врахуванні сил опору стає занадто громіздким для застосування.

В роботах [13, 14] аналітично досліджувалися ПП в багатокульових АБ за мінімальною кількістю особливих параметрів, що задають основні рухи роторної системи, – узагальнених координатах ротора та особливих комбінаціях кутів, що описують положення куль. Використовувалася теорія стійкості стаціонарних рухів нелінійних автономних систем. В роботі [13] дослідження проводились в рамках плоскої моделі, а в роботі [14] – в рамках просторової моделі жорсткого ротора. В розробленому підході враховується кінцева маса КВ. Тому диференціальні рівняння руху автобалансувальної системи занадто громіздкі і майже не піддаються математичному аналізу.

В роботі [15] досліджувалася стійкість динамічного балансування жорсткого ротора, який поміщений в корпусі на двох податливих опорах, двома пасивними АБ. Дослідження проведено за мінімальною кількістю динамічних змінних, що описують процес автобалансування ротора: дві узагальнені комплексні координати ротора; дві комплексні сумарні незрівноваженості ротора і АБ.

Отже, одержана в роботі [6] система диференціальних рівнянь, що описує процес настання автобалансування, може бути досліджена аналітично тільки при додаткових припущеннях.

### 3. Мета і задачі досліджень

Метою роботи є дослідження стійкості основних рухів гнучкого двохопорного ротора при його балансуванні двома АБ, розташованими біля опор, та оцінка особливостей перебігу ПП, що виникають при вказаному автобалансуванні.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі досліджень:

- обґрунтувати припущення щодо перебігу процесу автобалансування, що дозволять аналітично дослідити диференціальні рівняння, що описують цей процес;
- отримати умови стійкості основних рухів;
- встановити особливості перебігу ПП, що виникають при балансуванні гнучкого ротора, та оцінити вплив параметрів гнучкого ротора на тривалість перебігу ПП.

### 4. Методи досліджень стійкості основних рухів при балансуванні гнучкого ротора двома пасивними автобалансирами

Дослідження проводяться в рамках дискретної моделі гнучкого двохопорного ротора з пасивними АБ з багатьма КВ (рис. 1), що описана в роботі [6].

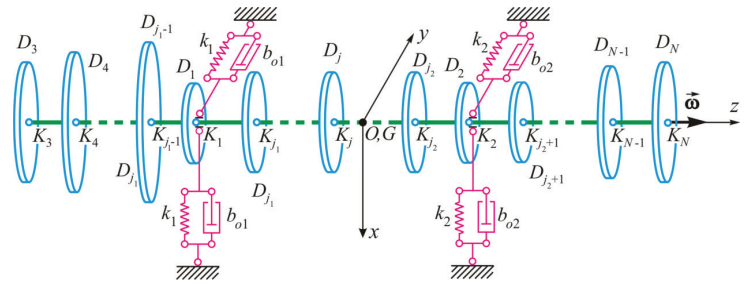


Рис. 1. Дискретна модель гнучкого двохопорного ротора

Використовується отримана в роботі [6] система диференціальних рівнянь, що описує процес автобалансування ротора в рамках зазначеної моделі:

$$\text{Left}_j = M_{zj} D_{\tau}^2 \Xi_{zj} - L_j^T K (Z - \Xi_{z1} L_1 - \Xi_{z2} L_2) + b_{0j} D_{\tau} \Xi_{zj} + k_j \Xi_{zj} + D_{\tau}^2 S_{z,zj} + \omega^2 L_j^T K (K - \omega^2 M)^{-1} S_{0,z} = 0,$$

$$\overline{\text{Left}}_j = 0, \quad /j = 1, 2/,$$

$$\text{Left} = M D_{\tau}^2 Z + K (Z - \Xi_{z1} L_1 - \Xi_{z2} L_2) - \omega^2 S_{0,z} = 0, \quad \overline{\text{Left}} = 0, \quad (1)$$

$$\text{Left}_{2N+j} = \ddot{S}_{z,zj} + b_j / (m_j \kappa_j) \cdot \dot{S}_{z,zj} + n_j m_j / (2\kappa_j) \cdot (D_{\tau}^2 \Xi_{zj} - p_j e^{i\theta_j} \overline{D_{\tau}^2 \Xi_{zj}}) = 0,$$

$$\overline{\text{Left}}_{2N+j} = 0, \quad /j = 1, 2/. \quad (2)$$

В рівняннях вище:

$$M_{zj} = M_j + m_{0j} + n_j m_j, \quad /j = 1, 2/, \quad M_{zj} = M_j + m_{0j}, \quad /j = \overline{1, N} /$$

сумарна маса j-го диска, де  $M_j, /j = \overline{1, N} /$  – маса j-го диска;  $m_{0j} /j = \overline{1, N} /$  – точкова маса, яка утворює статичну незрівноваженість  $s_{0j}$  в j-му диску;  $m_j, n_j, /j = 1, 2/$  – від-

повідно, маса та кількість КВ в j-му АБ;  $D_t \bullet = \ddot{\bullet} + i\omega \bullet -$  диференціальний оператор, де  $i$  – уявна одиниця,  $\omega$  – кутова швидкість обертання ротора;  $\Xi_{zj} = (x_j + iy_j)e^{-i\omega t}$ ,  $/j=1, N/$  – узагальнені координати центрів мас дисків в рухомій системі координат, де  $x_j, y_j$  – узагальнені координати центрів мас дисків в нерухомій системі координат;

$$L_1 = (1 - \bar{z}_3, 1 - \bar{z}_4, \dots, 1 - \bar{z}_N)^T, \quad L_2 = (\bar{z}_3, \bar{z}_4, \dots, \bar{z}_N)^T$$

вектори, в яких  $\bar{z}_j = (z_j - z_1) / (z_2 - z_1)$ ,  $/j=3, N/$ , де  $z_j$ ,  $/j=1, N/$  – поздовжня координата центра мас j-го диска;  $K = (k_{ij})$ ,  $/i, j=3, N/$  – матриця жорсткості, де  $k_{ij}$ ,  $/i, j=3, N/$  – коефіцієнти жорсткості, що визначаються як величина статичної вертикальної сили, яку потрібно прикласти до точки  $K_i$  вала для того, щоб внаслідок його згину виникло одиничне зміщення точки  $K_j$ ;

$Z = (\Xi_{z3}, \Xi_{z4}, \dots, \Xi_{zN})^T$  – вектор переміщень вала ротора в неопорних точках;

$k_j, b_{oj}$ ,  $/j=1, 2/$  – відповідно, коефіцієнти жорсткості і в'язкості опор;

$$S_{z, zj} = S_{zj} + L_j^T S_{0,z} + L_j^T M Z_0, \quad /j=1, 2/ \tag{3}$$

сумарні незрівноваженості гнучкого ротора, приведені до двох площин корекції (приведені сумарні незрівноваженості);

$$Z_0 = (\Xi_{z30}, \Xi_{z40}, \dots, \Xi_{zN0})^T = \omega^2 (K - \omega^2 M)^{-1} S_{0,z} \tag{4}$$

вектор складений з прогинів вала в площинах неопорних дисків псевдожорсткого ротора;

$S_{zj} = m_j r_j e^{-i\omega t} \sum_{i=0}^{n_j} e^{i\phi_{ij}}$ ,  $/j=1, 2/$  – сумарні незрівноваженості в площинах корекції, де  $\phi_{ij}$ ,  $/i=1, n_j/$  – кути, що визначають положення КВ;

$$M = \text{diag}(M_{\Sigma 3}, M_{\Sigma 4}, \dots, M_{\Sigma N});$$

$S_{0,z} = (S_{0,z3}, S_{0,z4}, \dots, S_{0,zN})^T$  – вектор, де  $S_{0,zj} = s_{0,j} e^{i(\phi_{0,j} - \omega t)}$ ,  $/j=3, N/$  – статичні незрівноваженості неопорних дисків;

$k_j = 1; 7/5; 3/2$ ,  $/j=1, 2/$  – відповідно, для маятників, куль та циліндричних роликів;

$$p_j = \sqrt{p_{1j}^2 + p_{2j}^2}, \quad /j=1, 2/;$$

$$p_{1j} = \left( \sum_{i=1}^{n_j} \cos 2\psi_{i,j} \right) / n_j, \quad p_{2j} = \left( \sum_{i=1}^{n_j} \sin 2\psi_{i,j} \right) / n_j,$$

$$\vartheta_j = \arccos(p_{1j} / p_j) / 2;$$

$\psi_{i,j}$ ,  $/i=1, n_j, j=1, 2/$  – кути, що задають положення КВ на основному руді.

Вважається, що гнучкий ротор достатньо жорсткий, тобто його резонансні швидкості є значно меншими за першу критичну швидкість.

Припускається, що після виходу гнучкого ротора на крейсерську швидкість обертання (близьку до першої критичної або більшу за неї) вал ротора спочатку досить швидко прогинається і в подальшому веде себе як псевдожорсткий.

Стійкість основних рухів псевдожорсткого ротора досліджується за запропонованими в роботі [6] узагальненими координатами –  $\Xi_{zj}, S_{zj}$ ,  $/j=1, 2/$ , які задають, відповідно, координати центрів мас опорних дисків і приведені сумарні незрівноваженості.

На основі зроблених припущень з системи (1), (2) отримується спрощена система диференціальних рівнянь, що описує процес автобалансування гнучкого ротора в рамках моделі.

Показується, що отримана система рівнянь з точністю до позначень співпадає з системою диференціальних рівнянь, що описує процес динамічного балансування жорсткого ротора на податливих опорах двома АБ [15].

## 5. Результати дослідження стійкості основних рухів гнучких роторів при їх балансуванні пасивними АБ

### 5. 1. Отримання рівнянь для дослідження стійкості основних рухів гнучкого ротора

Координати центрів мас неопорних і опорних дисків для псевдожорсткого ротора зв'язані наступним чином:

$$Z = Z_0 + L_1 \Xi_{z1} + L_2 \Xi_{z2}.$$

Підставимо  $Z$  в рівняння (1):

$$\text{Left}_j = M_{\Sigma j} D_t^2 \Xi_{zj} - L_j^T K Z_0 + b_{oj} D_t \Xi_{zj} + k_j \Xi_{zj} + D_t^2 S_{zj} + \omega^2 L_j^T K (K - \omega^2 M)^{-1} S_{0,z} = 0,$$

$$\overline{\text{Left}}_j = 0, \quad /j=1, 2/, \tag{5}$$

$$\text{Left} = (K - \omega^2 M) Z_0 + M L_1 D_t^2 \Xi_{z1} + M L_2 D_t^2 \Xi_{z2} - \omega^2 S_{0,z} = 0, \quad \overline{\text{Left}} = 0, \tag{6}$$

З рівняння (6) при  $\det(K - \omega^2 M) \neq 0$  можна виразити вектор  $Z_0$ :

$$Z_0 = -(K - \omega^2 M)^{-1} [M(L_1 D_t^2 \Xi_{z1} + L_2 D_t^2 \Xi_{z2}) - \omega^2 S_{0,z}]. \tag{7}$$

З (4), (7) слідує, що для псевдожорсткого ротора має місце рівність

$$(K - \omega^2 M)^{-1} M(L_1 D_t^2 \Xi_{z1} + L_2 D_t^2 \Xi_{z2}) = 0. \tag{8}$$

Підставимо (7) в рівняння (5). Враховуючи (8) отримуємо:

$$\text{Left}_j = (M_{\Sigma j} + L_j^T M L_j) D_t^2 \Xi_{zj} + L_j^T M L_{3-j} D_t^2 \Xi_{z,3-j} + b_{oj} D_t \Xi_{zj} + k_j \Xi_{zj} + D_t^2 S_{zj} = 0, \quad \overline{\text{Left}}_j = 0, \tag{9}$$

$/j=1, 2/.$

Рівняння (2), (9) описують процес автобалансування гнучкого ротора відносно змінних  $\Xi_{zj}, S_{zj}$ ,  $/j=1, 2/.$

Запишемо рівняння (9) відносно координат центра мас ротора –  $\Xi_z$  і положення осі обертання ротора –  $\Delta_z$ . Так як

$$\Xi_{zj} = \Xi_z - iz_j \Delta_z, \quad /j=1, 2/, \tag{10}$$

то рівняння (9) приймуть вигляд

$$\text{Left}_j = [M_{\Sigma j} + L_j^T M(L_1 + L_2)] D_t^2 \Xi_z - i[z_j M_j + L_j^T M(z_1 L_1 + z_2 L_2)] D_t^2 \Delta_z + b_{oj} D_t \Xi_z - i b_{oj} z_j D_t \Delta_z + k_j \Xi_z - i k_j z_j \Delta_z + D_t^2 S_{zj} = 0, \quad \overline{\text{Left}}_j = 0, \quad /j=1, 2/. \tag{11}$$

Спочатку додамо рівняння (11), а потім помножимо перші на  $z_1$ , а другі на  $z_2$ , і теж додамо (при цьому врахуємо, що  $(L_1+L_2)_{i1}=1$ ,  $(z_1L_1+z_2L_2)_{i1}=z_1/i=3N/\sum_{i=1}^N M_i z_i=0$ ):

$$\begin{aligned} \text{Left}_1 &= MD_\tau^2 \Xi_z + b_x D_\tau \Xi_z - i b_{y\alpha} D_\tau \Delta_z + \\ &+ k_x \Xi_z - i k_{y\alpha} \Delta_z + D_\tau^2 S_{z1} + D_\tau^2 S_{z2} = 0, \overline{\text{Left}}_1 = 0, \\ \text{Left}_2 &= AD_\tau^2 \Delta_z + i b_{y\alpha} D_\tau \Xi_z + b_\alpha D_\tau \Delta_z + \\ &+ i k_{y\alpha} \Xi_z + k_\alpha \Delta_z + i z_1 D_\tau^2 S_{z1} + i z_2 D_\tau^2 S_{z2} = 0, \overline{\text{Left}}_2 = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

де  $M = \sum_{i=1}^N M_i$ ,  $A = \sum_{i=1}^N M_i z_i^2$  – відповідно, маса та поперечний момент інерції псевдожорсткого ротора;

$$\begin{aligned} b_x &= b_{o1} + b_{o2}, k_x = k_1 + k_2, b_{y\alpha} = \\ &= z_1 b_{o1} + z_2 b_{o2}, k_{y\alpha} = z_1 k_1 + z_2 k_2, \end{aligned}$$

$$b_\alpha = z_1^2 b_{o1} + z_2^2 b_{o2}, k_\alpha = z_1^2 k_1 + z_2^2 k_2.$$

Рівняння (2), (12) описують процес автобалансування гнучкого ротора відносно змінних  $\Xi_z$ ,  $\Delta_z$ ,  $S_{zj}$ ,  $j=1,2/$ .

Рівняння (12) аналогічні відповідним рівнянням роботи [15], в якій досліджена стійкість основних рухів при динамічному балансуванні жорсткого ротора у масивному корпусі. Відмінність тільки в тому, що тут ротор абсолютно довгий (поздовжній момент інерції рівний нулю –  $C \rightarrow 0$ ) і роль сумарних незрівноваженостей  $S_{zj}$  відіграють приведені сумарні незрівноваженості  $S_{z,zj}$ .

З [15] слідує, що частотне і характеристичне рівняння гнучкого ротора, відповідно, мають вигляд:

$$\Delta_\omega = MA\omega^4 - (Ak_x + Mk_\alpha)\omega^2 + k_x k_\alpha - k_{y\alpha}^2 = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} X\bar{X} + \tilde{m}_1(\bar{X}Y_{11} + X\bar{Y}_{11}) + \tilde{m}_2(\bar{X}Y_{22} + X\bar{Y}_{22}) + \\ + \tilde{m}_1^2 Y_{11} \bar{Y}_{11} \Sigma_1 + \tilde{m}_2^2 Y_{22} \bar{Y}_{22} \Sigma_2 + \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 [X + \bar{X} + Y_{11} \bar{Y}_{22} + \\ + \bar{Y}_{11} Y_{22} - 2Y_{12} \bar{Y}_{12} p_1 p_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)] + \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 [\tilde{m}_1(Y_{11} + \bar{Y}_{11})\Sigma_1 + \\ + \tilde{m}_2(Y_{22} + \bar{Y}_{22})\Sigma_2] + \tilde{m}_1 \tilde{m}_2^2 \Sigma_1 \Sigma_2 = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$X = \lambda^2 (\lambda + \tilde{b}_1) (\lambda + \tilde{b}_2) (a_{11} a_{33} - a_{13}^2) / [\Lambda^8 (\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2)^2],$$

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= -\sqrt{\lambda^2 (\lambda + \tilde{b}_1) (\lambda + \tilde{b}_2)} \times \\ &\times [a_{11} \tilde{z}_i \tilde{z}_j - a_{13} (\tilde{z}_i + \tilde{z}_j) + a_{33}] / [\Lambda^4 (\tilde{z}_i - \tilde{z}_j)^2], \\ &/i, j = 1, 2/, \end{aligned}$$

$$\tilde{m}_j = m_j n_j / (2k_j M), \tilde{b}_j = b_j / (m_j k_j \omega_0),$$

$$\Sigma_j = 1 - p^2, /j = 1, 2/, \Lambda = \lambda + i\tilde{\omega},$$

$$a_{11} = \Lambda^2 + \tilde{b}_x \Lambda + \tilde{k}_x, a_{13} = \tilde{b}_{y\alpha} \Lambda + \tilde{k}_{y\alpha}, a_{33} = \Lambda^2 + \tilde{b}_\alpha \Lambda + 1.$$

З рівняння (13) знаходимо резонансні швидкості

$$\begin{aligned} \omega_{\text{рез}1,2} = \\ = \sqrt{[k_x/M + k_\alpha/A \pm \sqrt{(k_x/M - k_\alpha/A)^2 + 4k_{y\alpha}^2/(MA)}] / 2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для коренів характеристичного рівняння (14) з точністю до малих першого порядку включно відносно

сил опору в опорах і при виконанні умов  $k_{y\alpha} \sim 0$ ,  $b_{y\alpha} \sim 0$  отримуємо наступні співвідношення та вирази

$$\lambda_{1,4} = \left( \min\{\lambda_{1,4}^{(1)}, \lambda_{1,4}^{(2)}\}; \max\{\lambda_{1,4}^{(1)}, \lambda_{1,4}^{(2)}\} \right), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{5,6} &\approx -\sqrt{A/k_\alpha} b_1 / m_1 + O(m_1, m_2, b_\alpha^2), \lambda_{7,8} \approx \\ &\approx -\sqrt{A/k_\alpha} b_2 / m_2 + O(m_1, m_2, b_\alpha^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{9,10} &\approx -b_\alpha / (2\sqrt{Ak_\alpha}) - i(\omega\sqrt{A/k_\alpha} \pm 1) + \\ &+ O(m_1, m_2, b_\alpha^2), \lambda_{11,12} = \bar{\lambda}_{9,10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{13,14} &= -\sqrt{A/k_\alpha} [b_x / (2M) + k_x b_\alpha / (Ak_x + k_\alpha M) + \\ &+ i(\omega \pm \sqrt{k_x/M})] + O(m_1, m_2, b_\alpha^2), \lambda_{15,16} = \bar{\lambda}_{13,14}, \end{aligned} \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} \lambda_{1,4}^{(q)} &= -[c_1 P_{1,2}^{(1,q)} + c_2 P_{1,2}^{(2,q)} \pm \\ &\pm \sqrt{(c_1 P_{1,2}^{(1,q)} - c_2 P_{1,2}^{(2,q)})^2 + 4c_1 c_2 P_{1,2}^{(1,q)} P_{1,2}^{(2,q)} g_{12}^2 / (g_{11} g_{22})}] / 2 + \\ &+ O(m_1^2, m_2^2, b_\alpha^2); \end{aligned}$$

$$c_j = \tilde{m}_j \tilde{\omega}^4 g_{jj} / [\tilde{b}_j (A\omega^2 - k_x)(M\omega^2 - k_\alpha)], /j = 1, 2/;$$

$$g_{ij} = \omega^2 (A + Mz_j z_j) / k_\alpha - z_i z_j k_x / k_\alpha - 1,$$

$$P_{1,2}^{(j,q)} = 1 \mp (-1)^{(j-1)q} p_j.$$

Корені  $\lambda_{1,4}$  є стійкими (мають від'ємну дійсну частину) на області  $\omega \in (\max\{\omega_{\text{рез}1,2}\}; \infty)$ , а корені  $\lambda_{5,16}$  – на усій області зміни масо-інерційних параметрів. Тому основні рухи, якщо вони існують, є стійкими на зарезонансних швидкостях обертання ротора.

З (3) слідує, що в околі будь-якої критичної швидкості, що є розв'язком рівняння  $\det(K - \omega^2 M) = 0$ , суттєво збільшуються приведені сумарні незрівноваженості і, як наслідок, можуть не виконуватися умови існування основних рухів [3] – не вистачатиме балансувальної ємності АБ:

$$|S_{0,zj} + L_j^T S_{0,z} + L_j^T M Z_0| \leq S_{j\text{max}}, /j = 1, 2/,$$

де  $S_{1\text{max}}$ ,  $S_{2\text{max}}$  – балансувальні ємності АБ.

З (16), (17) слідує, що ПП при балансуванні гнучкого ротора діляться на:

- швидкі (корені  $\lambda_{5,16}$ ), при яких зупиняються швидкі відносні рухи КВ та встановлюється рух ротора, що відповідає поточним приведеним сумарним незрівноваженостям псевдожорсткого ротора і АБ;
- повільні, при яких КВ приходять в автобалансувальне положення.

Тривалість перебігу швидких ПП не залежить від незрівноваженості псевдожорсткого ротора, яка утворилася на крейсерській швидкості, кількості і поточного положення КВ в АБ, а повільних – від сил опору в опорах.

Тривалість перебігу повільних ПП:

- має локальний мінімум відносно сил в'язкого опору відносно руху КВ;
- є не зростаючою функцією відносно мас КВ, жорсткості опор, віддаленості центрів опорних дисків від центра мас гнучкого ротора та досягає найменшого

значення при перевищенні цими параметрами певних характерних значень;

– не збільшується при зростанні швидкості обертання ротора (на швидкостях більших за першу критичну).

## 6. Обговорення результатів дослідження стійкості балансування гнучких роторів пасивними автобалансирами

Дослідження стійкості основних рухів, проведені у рамках дискретної моделі гнучкого двоопорного ротора з двома АБ і при припущенні, що маса КВ та незрівноваженостей дисків є малими величинами по відношенню до маси гнучкого ротора, дозволяють встановити наступне:

– основні рухи, якщо вони існують, є завжди стійкими на зарезонансних швидкостях обертання ротора;

– для розширення області існування основних рухів потрібно використовувати АБ з більшою балансувальною ємністю;

– ПП діляться на: швидкі, при яких зупиняються швидкі відносні рухи КВ та встановлюється рух ротора, що відповідає поточним приведеним сумарним незрівноваженостям; повільні, при яких КВ приходять в автобалансувальне положення;

– при збільшенні сил опору відносному руху КВ: зменшується тривалість швидких ПП для КВ (КВ швидше виходять на крейсерську швидкість ротора); збільшується тривалість повільних ПП (КВ довше приходять в автобалансувальні положення);

– тривалість перебігу ПП не зменшується при зменшенні: маси КВ, жорсткості опор, віддаленості центрів опорних дисків від центра мас гнучкого ротора;

– тривалість перебігу ПП не збільшується при зростанні крейсерської швидкості ротора на швидкостях більших за першу критичну (якщо при цьому не порушуються умови існування основних рухів).

Перевагами запропонованого підходу є можливість аналітично встановлювати умови настання автобалансування та оцінювати тривалість перебігу ПП при балансуванні гнучких роторів пасивними АБ з багатьма КВ.

До недоліків запропонованого підходу можна віднести необхідність додаткових припущень щодо руху гнучкого ротора, співвідношень малості між параметрами тощо.

Результати роботи можна застосовувати при проектуванні АБ для балансування на ходу роторів: турбоагрегатів газо- та нафтотранспортної галузі, газотурбінних двигунів літаків, бітерів зернозбиральних комбайнів тощо.

У подальшому планується перевірити працездатність запропонованого способу автобалансування гнучкого ротора на реальних роторних машинах.

## 7. Висновки

Проведені дослідження у рамках дискретної моделі гнучкого двоопорного ротора з двома АБ, при зроблених припущеннях щодо руху гнучкого ротора та співвідношень малості між параметрами, дозволяють встановити наступне.

1. Отримано спрощену систему диференціальних рівнянь, яка описує процес автобалансування гнучкого двоопорного ротора з двома АБ біля опор у рамках його дискретної моделі. Система записана відносно чотирьох динамічних змінних – відхилень центрів мас опорних дисків та приведених сумарних незрівноваженостей від їх значень на основних рухах.

Отримана система з точністю до позначень співпадає з системою рівнянь, що описує процес динамічного балансування жорсткого ротора на податливих опорах двома АБ. Але в прийнятій моделі ротора поздовжній момент інерції рівний нулю, а роль сумарних незрівноваженостей відіграють приведені сумарні незрівноваженості, які залежать від швидкості обертання ротора.

2. Основні рухи за умови їх існування є стійкими на зарезонансних швидкостях обертання ротора. В околі будь-якої критичної швидкості можуть порушуватися умови існування основних рухів. Для розширення області стійкості основних рухів потрібно збільшувати балансувальну ємність АБ.

3. Встановлено, що

а) ПП при балансуванні гнучкого ротора діляться на: швидкі, при яких зупиняються швидкі відносні рухи КВ та встановлюється рух ротора, що відповідає поточним приведеним сумарним незрівноваженостям псевдожорсткого ротора і АБ;

– повільні, при яких КВ приходять в автобалансувальні положення;

б) при збільшенні сил опору відносному руху куль: збільшується тривалість виходу КВ в автобалансувальні положення;

– зменшується тривалість виходу КВ на крейсерську швидкість ротора;

в) тривалість перебігу ПП:

– не зменшується при зменшенні: маси КВ, жорсткості опор, віддаленості центрів опорних дисків від центра мас гнучкого ротора;

– не збільшується при зростанні крейсерської швидкості ротора (якщо при цьому не порушуються умови існування основних рухів).

## Література

1. Симоновский, В. И. Динамика роторов центробежных машин [Текст] / В. И. Симоновский. – Сумы: Вид-во СумДУ, 2002. – 143 с.
2. Yamamoto, T. Linear and Nonlinear Rotordynamics: A Modern Treatment with Applications. 2nd edition [Text] / T. Yamamoto, Y. Ishida. – Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2012. – 474 p. doi: 10.1002/9783527651894
3. Пат. 107719 України (на 20 р.), МПК G01M 1/32. Спосіб балансування гнучкого двоопорного ротора пасивними автобалансирами [Текст] / Філімоніхін Г. Б., Гадяка В. Г., Паненко В. Г., Гончаров В. В. – заявник та патентовласник Кіровоградський нац. техн. університет. – № a201301213; заявл. 11.08.2014; опубл. 10.02.2015, Бюл. № 3. – 8 с.
4. Детинко, Ф. М. Об устойчивости работы автобалансира для динамической балансировки [Текст] / Ф. М. Детинко // Известия АН СССР. ОТН. Мех. и Машиностр. – 1956. – № 4. – С. 38–45.

5. Majewski, T. Self-balancing system of the disk on an elastic shaft [Text] / T. Majewski, D. Szwedowicz, A. Marco, M. A. M. Melo // Journal of Sound and Vibration. – 2015– Vol. 359. – P. 2–20. doi: 10.1016/j.jsv.2015.06.035
6. Goncharov, V. Studying the peculiarities of balancing of flexible double-support rotors by two passive automatic balancers placed near supports [Text] / V. Goncharov, G. Filimonikhin, K. Dumenko, M. Lychuk // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2016. – Vol. 4, Issue 7 (82). – P. 4–9. doi: 10.15587/1729-4061.2016.75115
7. Filimonikhina, I. I. Conditions for balancing a rotating body in an isolated system with automatic balancers [Text] / I. I. Filimonikhina, G. B. Filimonikhin // International Applied Mechanics. – 2007. – Vol. 43, Issue 11. – P. 1276–1282. doi: 10.1007/s10778-007-0132-5
8. Filimonikhin, G. Empirical criterion for the occurrence of auto-balancing and its application for axisymmetric rotor with a fixed point and isotropic elastic support [Text] / G. Filimonikhin, I. Filimonikhina, K. Dumenko, M. Lichuk // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2016. – Vol. 5, Issue 7 (83). – P. 11–18. doi: 10.15587/1729-4061.2016.79970
9. Блехман, И. И. Синхронизация динамических систем [Текст] / И. И. Блехман. – М.: Наука, 1971. – 896 с.
10. Sperling, L. Single-Plain Auto-Balancing of Rigid Rotors [Text] / L. Sperling, B. Ryzhik, H. Duckstein // Technische Mechanik. – 2004. – Vol. 24, Issue 1. – P. 1–24.
11. Sperling, L. Two-plain automatic balancing [Text] / L. Sperling, B. Ryzhik, H. Duckstein // Machine Dynamics Problems. – 2001. – Vol. 25, Issue 3/4. – P. 139–152.
12. Rodrigues, D. J. Two-plane automatic balancing: a symmetry breaking analysis [Text] / D. J. Rodrigues, A. R. Champneys, M. I. Friswell, R. E. Wilson // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2011. – Vol. 46, Issue 9. – P. 1139–1154. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2011.04.033
13. Горбенко, А. Н. Общая структура уравнений движения роторных машин с автобалансиром пассивного типа [Текст] / А. Н. Горбенко // Авиационно-космическая техника и технология. Двигатели и энергоустановки аэрокосмических летательных аппаратов. – 2011. – № 8 (85). – С. 71–76.
14. Горбенко, А. Н. Массо-инерционные характеристики и безразмерные уравнения движения двухопорного ротора с автобалансиром с учетом массы компенсирующих грузов [Текст] / А. Н. Горбенко // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана. – 2015. – № 12. – С. 266–294. doi: 10.7463/1215.0827773
15. Гончаров, В. В. Дослідження стійкості ротора в корпусі на податливих опорах, який динамічно зрівноважується двома автобалансирами [Текст] / В. В. Гончаров // Вібрації в техніці та технологіях. – 2015. – № 4 (80). – С. 10–18.

