

## Моделювання впливу резонансних коливань на режими роботи асинхронного приводу норії

В статті розглядається вплив резонансних коливань на втрати енергії у приводі норії на основі математичного моделювання  
електродвигун, сигнал, момент, енергія

При резонансних коливаннях різко зростає розсіювання енергії в пружних елементах механічної системи під дією дисипативних сил. В деяких випадках потужність електродвигуна стає недостатньою для того, щоб компенсувати втрати енергії при резонансі. [1]

Тоді машина не в змозі пройти через резонанс під час розгону і вийти на усталений резонансний режим. Це явище називають ефектом Зоммерфельда. [2]

З метою перевірки виникнення ефекту Зоммерфельда необхідно визначити залежність вібраційного моменту  $M_B$  від частоти обертання  $\omega_0$  [1]:

$$M_\epsilon = \frac{1}{2\pi_i} \int_0^{\omega_0} \left[ \epsilon (\dot{x} - \dot{y})^2 + s\dot{x}^2 + v\dot{y}^2 \right] \cdot dt, \quad (1)$$

де  $\dot{x} = \omega_{\partial x}(p) L_\partial + \omega_{\partial x}(p) L_m$ ;

$\dot{y} = \omega_{\partial y}(p) L_\partial + \omega_{\partial y}(p) L_m$ ;

$\omega_{\partial x}(p) = \frac{J_{M_0} p^2 + (v + b) p + c}{D(p)}$ ;

$\omega_{\partial x}(p) = \omega_{\partial y}(p) = \frac{bp}{D(p)}$ ;

$\omega_{\partial y}(p) = \frac{J_{D_0} p^2 + (s + b) p + c}{D(p)}$ ;

$D(p) = [J_{D_0} p^2 + (s + b) p + c] \cdot [J_{M_0} p^2 + (v + b) p + c] - (bp + c)^2$ ;

$J_{D_0}, J_{M_0}$  – моменти інерції, приведені до валу двигуна;

$L_m$  – амплітуда гармонічного збурення частоти  $\omega$  [1].

Вібраційний момент є усередненням за період моменту сил опору під дією дисипативних сил, що виникають при коливаннях [1].

Розглянемо більш детально вимушені коливання та резонанс, які виникають при запуску асинхронного двигуна, для більш точного моделювання.

Під час дії на тіло пружної сили  $F = -kx$  воно коливається з так званою частотою вільних коливань. Власну частоту будемо позначати через  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Складемо рівняння коливань:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - h \frac{dx}{dt} + f \cos \omega t, \quad (2)$$

де  $f \cos \omega t$  - зовнішня сила [ 3 ].

Поділивши обидві частини (2) на  $m$  та позначивши  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$  і враховуючи, що з такою частотою відбуваються власні коливання тіла (при відсутності тертя), відношення  $\frac{h}{m}$  позначимо  $2\gamma$ . Отримаємо

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2\gamma \frac{dx}{dt} + \frac{f}{m} \cos \omega t. \quad (3)$$

Під дією сили з частотою  $\omega$  тіло буде здійснювати коливання з тією ж частотою. Знайдемо рішення (3) у вигляді:

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t. \quad (4)$$

Підставивши (3) і (4) у (2) отримаємо:

$$-a\omega^2 \cos \omega t - b\omega^2 \sin \omega t = -a\omega_0^2 \cos \omega t - b\omega_0^2 \sin \omega t + 2\gamma a\omega \sin \omega t - 2\gamma b \cos \omega t + \frac{f}{m} \cos \omega t \quad (5)$$

Для того щоб (5) було вірним для будь яких значень  $t$ , повинні бути рівними між собою члени з  $\cos \omega t$  та  $\sin \omega t$ . Прирівнявши їх отримаємо:

$$\begin{cases} -a\omega_0^2 - 2\gamma b\omega + \frac{f}{m} = -a\omega^2 \\ -b\omega_0^2 + 2\gamma a\omega = -b\omega^2 \end{cases}. \quad (6)$$

З (6) знаходимо:

$$b = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} a. \quad (7)$$

Підставивши у (6), знаходимо:

$$a = \frac{f}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}. \quad (8)$$

Тоді

$$a = \frac{f}{m} \frac{2\gamma\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}. \quad (9)$$

Враховуючи, що:

$$C = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (10)$$

перейдемо до вигляду  $x = C \cos(\omega t + \gamma)$  та отримаємо амплітуду  $C$  коливань, які викликані зовнішньою силою:

$$C = \frac{f}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}, \quad (11)$$

нехай

$$K(\omega) = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}. \quad (12)$$

Звідси видно, що чим більше значення  $C$  тим ближче  $\omega$  до  $\omega_0$ . У випадку дослідження залежності частоти коливань під час запуску асинхронного двигуна очевидно (з урахуванням (12)), що  $C \approx \frac{M_D(\omega)}{K(\omega)}$ . Тоді крива залежності  $M_D$  від  $\omega$  при даному  $\omega_0$  і двох значеннях  $\gamma$  буде мати вигляд (рис.1).

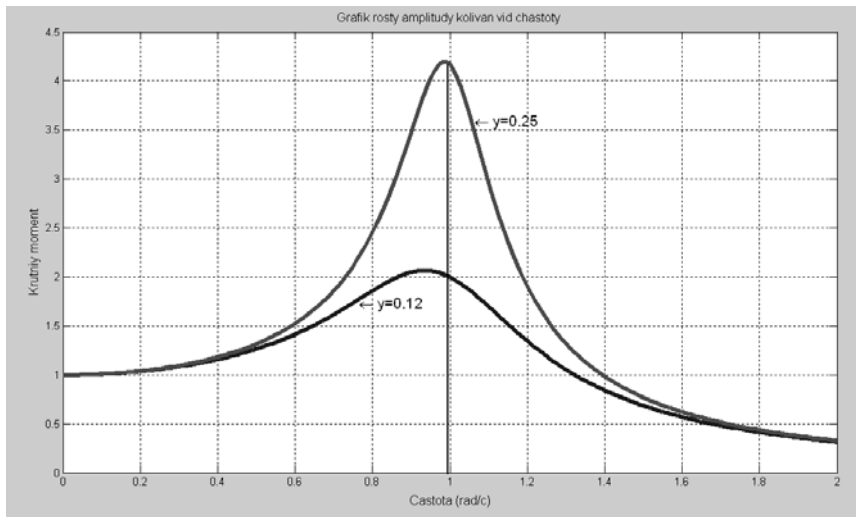


Рисунок 1 - Криві залежності  $M_D$  від  $\omega$ . Прийнято  $\frac{f}{m} = 1$ ,  $\omega_0 = 1$

Як видно з рис.1, чим менше тертя, тим більша крутизна амплітуди коливань і відповідно зростає  $M_D$  при однаковій частоті зовнішньої сили та власної частоти.

Характер зміни динамічного моменту під час запуску асинхронного двигуна є однією з важливих характеристик електромеханічних приводів різних машин і зокрема електроприводів норій.

Щоб мати достатньо точне уявлення про можливі наслідки виникнення резонансної частоти при керуванні електроприводом норій побудуємо математичну модель асинхронного двигуна з коротко замкнутим ротором.

Для виведення математичної моделі скористаємося рівняннями [3]:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{J} M_D - \frac{1}{J} M_C; \\ \frac{dM_D}{dt} &= 2 \frac{M_K}{T_E S_K} - \frac{1}{T_E} M_D - 2M_K \lambda \Omega, \end{aligned} \tag{13}$$

де  $\Omega$  – кутова швидкість валу двигуна;

$\lambda$  – кількість пар полюсів;

$M_D$  – рушійний момент;

$M_C$  – момент силу опору на валу двигуна;

$J$  – момент інерції ротора та жорстко пов'язаних з ним деталей;

$t$  – час розгону;

$T_E = \frac{1}{\omega_0^M S_K}$  – електромагнітна стала часу двигуна;

$\omega_0^M$  – колова частота мережі, яка живить двигун.

$S_K$  – критичне значення ковзання;

$M_K$  – критичний рушійний момент.

Початкові умови для рівнянь (13):

$$\Omega(0) \cong \Omega_{II};$$

$$M_D(0) \cong M_{II}.$$

Але модель побудована за рівняннями (13) буде громіздкою. У [2] запропоновані наступні рівняння математичної моделі асинхронного двигуна:

$$\frac{dM_D}{dt} = (\omega_0 - \lambda\Omega)\varphi - \frac{1}{T_E}M_D;$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2}{T_E}M_K - \frac{1}{T_E}\varphi - (\omega_0^M - \lambda\Omega)M_D;$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{J}M_D - \frac{1}{J}M_C,$$
(14)

де  $\varphi = \frac{S_R}{S}(M_D + T_E \frac{dM_D}{dt})$  - допоміжна змінна яка має розмірність моменту;

$S = \frac{\Omega_0 - \Omega}{\Omega_0}$  - ковзання двигуна;

$\Omega_0$  – синхронна частота обертання електромагнітного поля статора двигуна.

Схема реалізації рівнянь (14) у Matlab Simulink показано на рис.2.

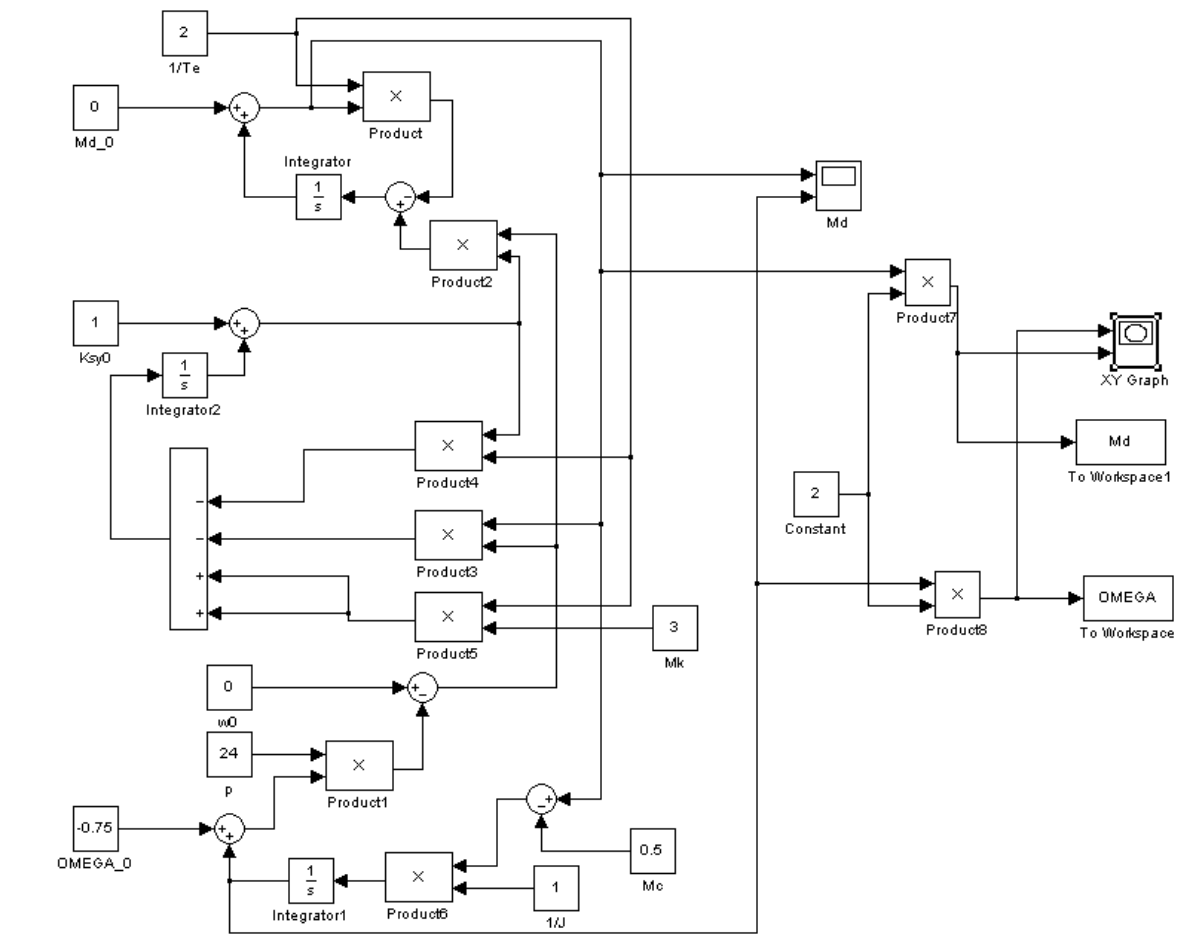


Рисунок 2 - Нелінійна модель асинхронного двигуна норії

Графіки залежності  $M_D$  та  $\omega$  показано на рис. 3

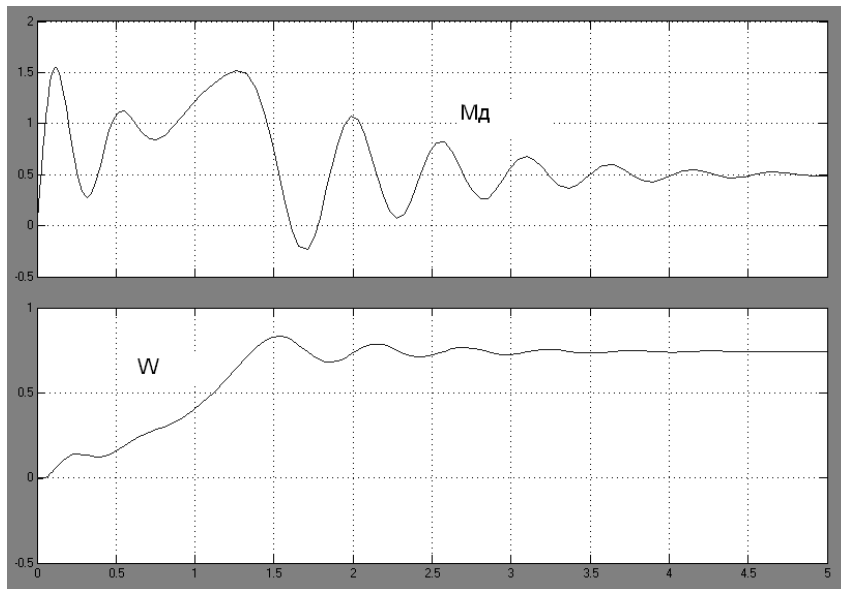


Рисунок 3 - Графіки залежності  $M_D(t)$  (верхній графік) та  $\omega(t)$  (нижній графік)

Плотер XYGraph (рис.4) відображує залежність  $M_D$  від  $\Omega$  яку показано на рис.3.

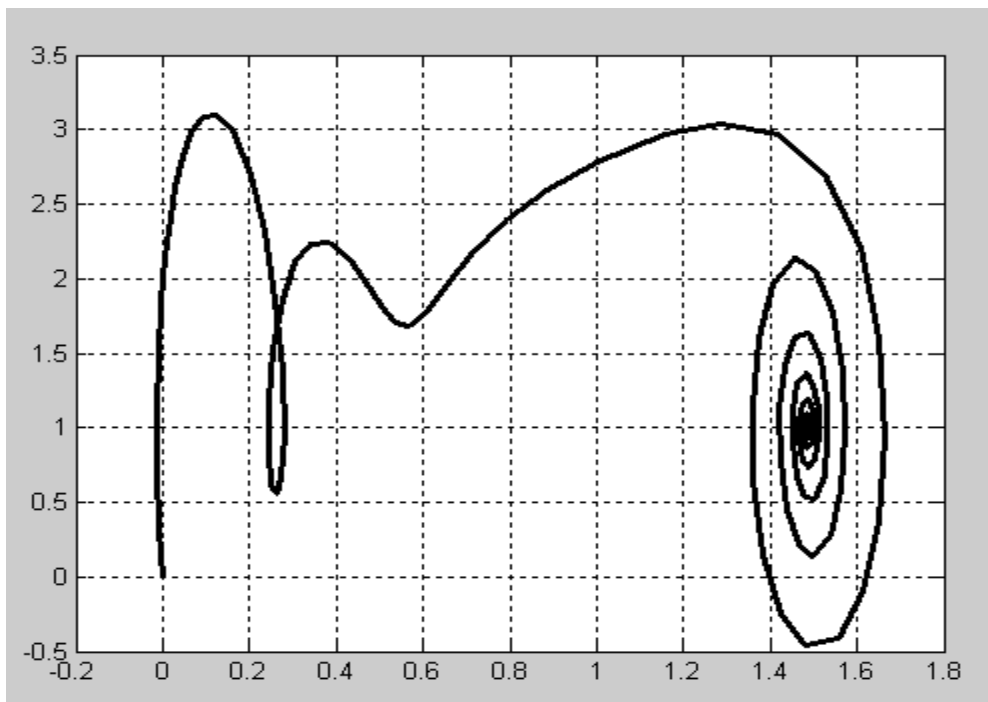


Рисунок 4 - Залежність  $M_D$  від  $\omega$

Сумістивши резонанс (рис.1) та  $M_D$  асинхронного двигуна (рис.4) побудуємо залежність повного середнього моменту сил опору  $M_{C_0}(\omega_0) + M_e(\omega_0)$  і покажемо статичну характеристику двигуна норії у відносних одиницях (рис.5):

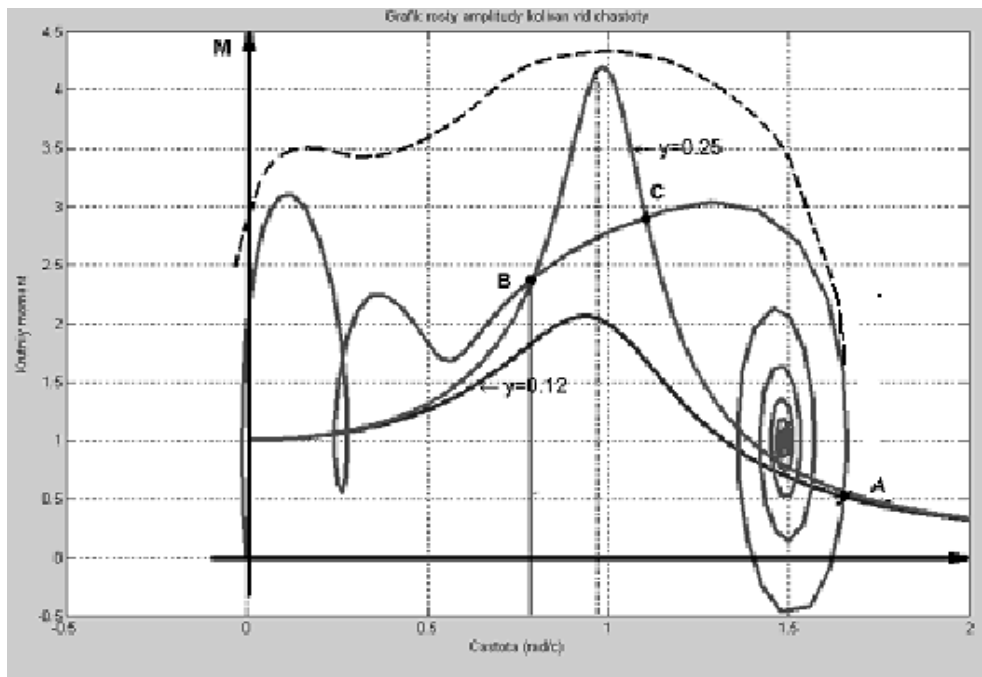


Рисунок 5 - Эффект Зоммерфельда

Точка А є перетином цих залежностей і відповідає тому усталеному режиму із середньою кутовою швидкістю  $\omega_0'$ , на який повинна вийти система в процесі розгону. Але коли обидві криві перетинаються ще й точках В і С, як показано на рис.5, то в системі можливий режим із середньою кутовою швидкістю ротора  $\omega_0''$ , близькою до добутку передатного співвідношення механізму  $i$  на власну частоту  $k_0$  ( $\nu = \omega_0''/i \approx k_0$ ).

Під час повільного розгону машина “застрягне” на цій кутовій швидкості і подальший розгін стане неможливим, оскільки коли  $\omega_0' > \omega_0''$  є область, в якій рушійний момент менший, за момент сил опору [1].

Тому, з метою проходження через резонанс, потрібно вибрати електродвигун з більшою потужністю, статичну характеристику якого показано на рис.5 пунктиром.

Підсилення дисипації в системі (збільшення коефіцієнту  $\nu$ ) також приводить до можливості переходу через резонанс, оскільки втрати енергії, пропорційні квадратам амплітуд коливань і першій степені  $\nu$ , при цьому зменшуються.

## Список літератури

1. Динамика машин и управление машинами: Справочник / В. К. Асташев, В. И. Бабицкий, И. И. Вульфсон и др., Под ред. Г. В. Крейна. – М.: Машиностроение, 1988. – 240 с.
2. Вибрации в технике: Справочник: В 6-ти т. М., 1978-1981. Т. 1-6.
3. Левин А. И. Математическое моделирование в исследованиях и проектировании станков. М., “Машиностроение”, 1978.– 184 с.

В статье рассматривается влияние резонансных колебаний на режимы работы асинхронного привода нории на основе математического моделирования.

In the article influence of resonance vibrations is examined on the losses of energy in the drive of noria on the basis of mathematical design.