МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ БУДІВНИЦТВА ТА ТРАНСПОРТУ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

Варіанти контрольних робіт
та приклади розв’язання завдань з курсу
КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ (Подвійні інтеграли).

Для студентів технічних спеціальностей.

КРОПІВНИЦЬКИЙ
2018

Варіанти контрольних робіт та приклади розв’язання завдань з курсу **Кратні інтеграли**. Методичні вказівки для студентів технічних спеціальностей./ Укл.: Кривоблоцька Л.М., – Кропівницький: ЦНТУ, 17с.

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
та фізики.
Протокол № 8
від 29.03.2018 р.

<u>Подвійні інтеграли</u>.
Теоретичні відомості.

Подвійні інтеграли представляють собою узагальнення визначеного інтеграла на випадок функцій двох змінних.

1.1. Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла

1) *Задача про об'єм циліндричного тіла.* Нехай маємо тіло, обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y) \geq 0$, знизу- замкненою обмеженою областю D площини Oxy, з боків - циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D, а твірні паралельні осі Oz (рис. 1). Таке тіло називають *циліндричним*.

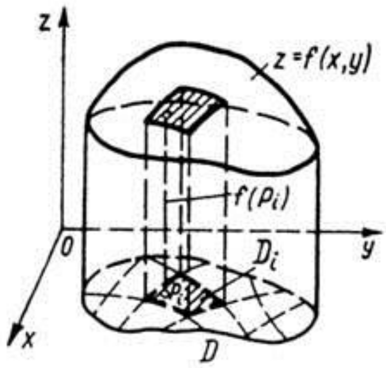

Рис. 1

Обчислимо його об'єм V. Для цього довільним способом розіб'ємо область D на n частин D_i, які не мають спільних внутрішніх точок, і площі яких дорівнюють $\Delta S_i, i = 1, 2, \dots, n$. У кожній області D_i виберемо довільну точку $P_i(\xi_i; \eta_i)$, знайдемо значення функції в цій точці $f(\xi_i, \eta_i)$ і обчислимо добуток $f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$. Цей добуток дорівнює об'єму циліндричного стовпчика з твірними, паралельними осі Oz, основою D_i і висотою $f(P_i) = f(\xi_i, \eta_i)$. Усього таких стовпчиків є n, і сума їхніх об'ємів

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i \tag{1}$$

наближено дорівнює об'єму циліндричного тіла $V \approx V_n$. Це наближення тим точніше, чим більше число n і чим менші розміри областей D_i. Назвемо діаметром $d(D)$ замкненої обмеженої області D найбільшу відстань між двома точками межі цієї області. Позначимо через λ найбільший з діаметрів областей D_i: $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(D_i)$. Тоді об'єм даного тіла визначається як границя суми (1) при $\lambda \to 0$:

$$V = \lim_{\lambda \to 0} V_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i. \qquad (2)$$

2) *Задача про масу пластинки*. Нехай маємо плоску неоднорідну матеріальну пластинку, формою якої є область D (рис. 2).

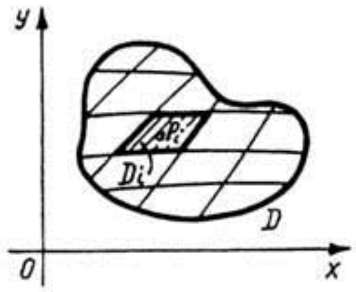

Рис. 2

В області D задана неперервна функція $\gamma = \gamma(x, y)$, яка визначає густину пластинки в точці $(x; y)$. Знайдемо масу m пластинки. Для цього довільним чином розіб'ємо область D на частини D_i, які не мають спільних внутрішніх точок, і площі яких дорівнюють $\Delta S_i, i = 1, 2, \ldots, n$. У кожній області D_i візьмемо яку-небудь точку $P_i(\xi_i; \eta_i)$ і знайдемо густину в цій точці:

$$\gamma(P_i) = \gamma(\xi_i, \eta_i).$$

Якщо розміри області D_i достатньо малі, то густина в кожній точці $(x; y) \in D_i$ мало відрізнятиметься від значення $\gamma(P_i)$. Тоді добуток $\gamma(P_i)\Delta S_i$ наближено визначає масу тієї частини пластинки, яка займає область D_i, а сума

$$m_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i \qquad (3)$$

є наближеним значенням маси m всієї пластинки. Точне значення маси дістанемо як границю суми (3) при $\lambda \to 0$:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} m_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i.$$

Таким чином, різні за змістом задачі ми звели до знаходження границь (2) і (4) одного й того самого виду. Кожна така границя називається *подвійним інтегралом*.

Припустимо, що границя області $D \subset \mathbb{R}^2$ складається із скінченної кількості кривих, заданих рівняннями вигляду $y = f(x)$ або $x = \varphi(y)$, де $f(x)$ і $\varphi(y)$ - неперервні функції. Такою областю, наприклад, є замкнений многокутник, границя якого складається зі скінченного числа відрізків, що представляють собою графіки неперервних функцій вигляду $y = kx + b$ або $x = a$. Розіб'ємо область D довільним чином на n частин D_i, які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють ΔS_i, $i = 1, 2, \dots, n$ (рис. 3). У кожній області D_i візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i; \eta_i)$ і утворимо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i, \qquad (5)$$

яку назвемо *інтегральною сумою для функції* $z = f(x, y)$ *по області* D.

Означення. *Якщо інтегральна сума (5) при* $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(D_i) \to 0$ *має скінченну границю* I, *яка не залежить ні від способу розбиття області* D *на частинні області* D_i, *ні від вибору точок* P_i *в них, то ця границя називається подвійним інтегралом від функції* $f(x, y)$ *по області* D *і позначається одним із символів:*

$$I = \iint\limits_D f(x, y)\,dS \quad \text{або} \quad I = \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy.$$

Таким чином, за означенням

$$I = \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i.$$

У цьому випадку функція $f(x, y)$ називається *інтегрованою в області* D, D - *областю інтегрування*, x і y - *змінними інтегрування*, dS (або $dxdy$) - *елементом площі*.

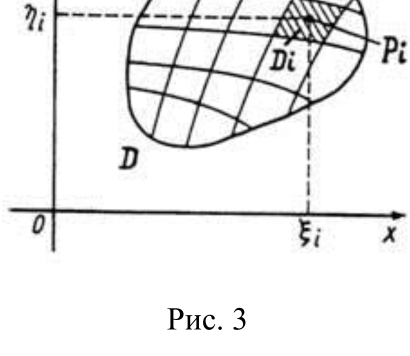

Рис. 3

Теорема *(достатня умова інтегрованості функції). Якщо функція* $f(x,y)$ *неперервна в замкненій обмеженій області* D*, то вона інтегрована в цій області.*

Є ще й інші умови існування подвійного інтеграла, але надалі ми вважатимемо, що підінтегральна функція $f(x,y)$ в області інтегрування D є неперервною.

Повертаючись до задач п. 1.1, ми можемо формули (2) і (4) записати з використанням рівності (6) в такому вигляді:

$$V = \iint_D f(x,y)\,dxdy, \tag{7}$$

$$m = \iint_D \gamma(x,y)\,dxdy. \tag{8}$$

Формула (7) дає нам геометричний зміст подвійного інтеграла.

Геометричний зміст подвійного інтеграла.

Якщо $f(x,y) > 0$*, то* $V = \iint_D f(x,y)\,dxdy,$

де V *– об'єм циліндричного тіла, обмеженого зверху поверхнею* $z = f(x,y) \ge 0$*, знизу - замкненою обмеженою областю* D *площини* Oxy*, з боків – циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області* D*, а твірні паралельні осі* Oz*.*

Довільну функцію $f(x,y)$ можна розглядати як густину. Формула (8) дає нам механічний зміст подвійного інтеграла.

Механічний зміст подвійного інтеграла.

Якщо $f(x,y) > 0$*, то* $m = \iint_D f(x,y)\,dxdy,$

де m *- маса пластинки з густиною* $f(x,y)$ *в точці* $(x,y) \in D$.

Зауважимо, що якщо $f(x,y)$ набуває від'ємних значень, то можна сказати, наприклад, що $f(x,y)$ - густина електрики, розподіленої в області D, тобто ввести в розгляд від'ємні маси. Тоді у цьому випадку можливо доцільніше говорити не про "механічний", а про фізичний зміст інтеграла.

Якщо у формулі (7) покласти $f(x,y) \equiv 1, (x;y) \in D$, то одержимо формулу для обчислення площі S області D:

$$S = \iint_D dxdy. \qquad (9)$$

<u>Основні властивості подвійного інтеграла</u>.

Основні властивості подвійного інтеграла аналогічні відповідним властивостям визначеного інтеграла .

Властивість 1. *(однорідність подвійного інтеграла)*.
Сталий множник можна винести за знак подвійного інтеграла:

$$\iint_D cf(x, y)\,dxdy = c\iint_D f(x, y)\,dxdy, \quad c = \mathrm{const}.$$

Властивість 2. Подвійний інтеграл від алгебраїчної суми скінченної кількості інтегрованих в області D функцій дорівнює алгебраїчній сумі подвійних інтегралів від цих функцій:

$$\iint_D \left(f_1(x,y) \pm f_2(x,y) \pm \cdots \pm f_n(x,y)\right)dxdy =$$

$$= \iint_D f_1(x, y)\,dxdy \pm \iint_D f_2(x, y)\,dxdy \pm \cdots \pm \iint_D f_n(x, y)\,dxdy.$$

Властивість 3. Якщо в області D функція $f(x, y) \geq 0$, то

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy \geq 0.$$

Властивість 4. *(інтегрування нерівності).* Якщо $f(x,y) \leq g(x, y)$ у довільній точці $(x, y) \in D$, то

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy \leq \iint_D g(x, y)\,dxdy.$$

Властивість 5. *(адитивність по області інтегрування).*

Якщо область інтегрування D функції $f(x,y)$ є об'єднанням областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, що не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy + \cdots + \iint_{D_n} f(x, y)\,dxdy.$$

Властивість 6. *(оцінка подвійного інтеграла).*

Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, яка має площу S, то

$$mS \leq \iint_D f(x, y)\,dxdy \leq MS,$$

де m і M - відповідно найменше і найбільше значення підінтегральної функції в області D.

Властивість 7. *(теорема про середнє значення).* Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, яка має площу S, то в цій області існує така точка $(x_0;y_0)$, що

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0)S.$$

Величину

$$f(x_0,y_0) = \frac{1}{S}\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

називають *середнім значенням функції* $f(x,y)$ в області D.

Означення подвійного інтеграла одночасно дає і спосіб його обчислення. Однак цей спосіб досить складний, тому розглянемо інший, який зводиться до обчислення так званого повторного інтеграла - двох визначених інтегралів.

Якщо $f(x,y) \geq 0$ для $(x,y) \in D$, то подвійний інтеграл виражає об’єм циліндричного тіла з основою D, обмеженого поверхнею $z = f(x,y)$ та циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz, а напрямною є межа області D (рис. 4).

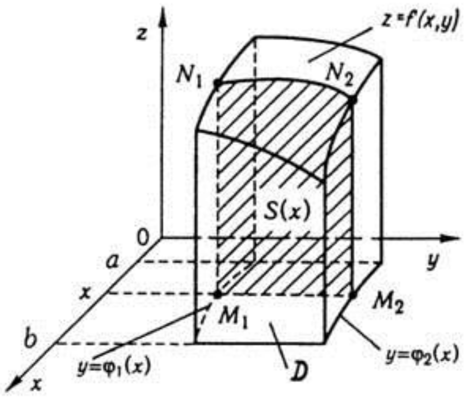

Рис. 4

Обчислимо цей об’єм за допомогою методу паралельних перерізів

$$V = \int_a^b S(x)\,dx, \tag{10}$$

де $S(x)$ - площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, а $x = a$ та $x = b$ - рівняння площин, що обмежують задане тіло.

Спочатку розглянемо випадок, коли область D обмежена прямими $x = a$, $x = b$, де $a < b$, та неперервними кривими $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, причому $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x), x \in [a;b]$ (рис. 5).

Провівши через точку $(x;0;0)$ ($a < x < b$), перпендикулярну до осі Ox площину, дістанемо у перерізі криволінійну трапецію $M_1N_1N_2M_2$, яка перетне область D по прямій M_1M_2. Точку M_1 називатимемо точкою входу в область D, а точку M_2 - точкою виходу з неї. Їх ординати позначимо відповідно $y_{вх}$, $y_{вих}$. Тоді $y_{вх} = \varphi_1(x)$, $y_{вих} = \varphi_2(x)$.

Визначена таким чином область називається *правильною в напрямі осі* Oy.

Означення. *Область D називається правильною в напрямі осі Oy (осі Ox), якщо довільна пряма, яка проходить через внутрішню точку області D D паралельно осі Oy (осі Ox), перетинає межу області не більше, ніж у двох точках.*

Правильна область в напрямі осі Oy зображена на рис. 5, а правильна область в напрямі осі Ox - на рис. 6.

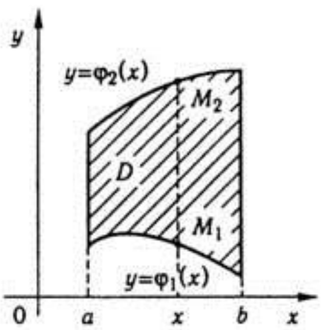

Рис. 5

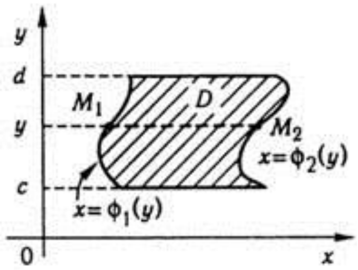

Рис. 6

Площа $S(x)$ трапеції $M_1N_1N_2M_2$ дорівнює визначеному інтегралу

$$S(x) = \int_{y_{вх}}^{y_{вих}} f(x,y)\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Підставляючи у рівність (10) вираз для $S(x)$, дістанемо то маємо

$$V = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Оскільки об’єм V циліндричного тіла дорівнює подвійному інтегралу

$\iint_D f(x,y)\,dxdy$, то маємо $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$ або

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \qquad (11)$$

Праву частину формули (11) називають *повторним інтегралом* від функції $f(x,y)$ по області D. У повторному інтегралі (11) інтегрування виконується спочатку по змінній y (при цьому x вважається сталою), а потім по змінній x. Інтеграл по змінній y називають *внутрішнім*, а по змінній x - *зовнішнім*. У результаті обчислення внутрішнього інтеграла одержуємо певну функцію від однієї змінної x. Інтегруючи цю функцію в межах від a до b, тобто обчислюючи зовнішній інтеграл, дістаємо деяке число - значення подвійного інтеграла.

Якщо область D обмежена двома неперервними кривими $x=\phi_1(y), x=\phi_2(y)$ і двома прямими $y=c, y=d\ (c<d)$, причому $\phi_1(y)\le\phi_2(y)$ для всіх $y\in[c;d]$, то справедлива формула

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx. \qquad (12)$$

У формулі (12) внутрішнім є інтеграл по змінній x. Обчислюючи його в межах від $\phi_1(y)$ до $\phi_2(y)$ (при цьому y вважається сталою), дістанемо деяку функцію від однієї змінної y. Інтегруючи потім цю функцію в межах від c до d, одержимо значення подвійного інтеграла.

Визначена таким чином область D є правильна в напрямі осі Ox.

Праві частини формул (11) і(12) також називають *двократними інтегралами* від функції $f(x,y)$ по області D. Для зведення подвійного інтеграла до повторного потрібно побудувати область інтегрування D, а потім визначити порядок інтегрування.

Контрольні завдання.

Варіант 1.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^2 dx \int_{-3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{2-\frac{x^2}{2}} f(x,y)dy$$

2. Обчислити подвійні інтеграли по області *D*, що обмежена заданими лініями:

а) $\iint\limits_{(D)} \left(x^3+3\right)dxdy; \quad D: y+x=1,\ x \ge 0$, б) $\iint\limits_{(D)} y^2 e^{\frac{xy}{4}}\ dxdy; \quad D: y=x, \quad y=2, \quad x=0.$

Варіант 2.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі**:**

$$\int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{e^x} f(x,y)dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D, що обмежена вказаними лініями**:**

а) $\iint\limits_{(D)} x^2 y\ dxdy; \quad D: y=2x^3, \quad y=0, \quad x=1.$ б) $\iint\limits_{(D)} x\ dxdy; D: y=\sqrt{x}, y=x$

Варіант 3

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі**:**

$$\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)dx + \int_2^3 dy \int_0^{3-y} f(x,y)dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D, що обмежена вказаними лініями**:**

а) $\iint\limits_{(D)} y^2 e^{-\frac{xy}{2}}\ dxdy; \quad D: y=x, \quad y=\sqrt{2}, \quad x=0.$ б) $\iint\limits_{(D)} \left(x+y^2\right)dxdy; D: y=x^2, y=x$

Варіант 4.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі**:** .

$$\int_2^4 dx \int_1^{\sqrt{\frac{x}{2}}} f(x,y)dy + \int_4^{\frac{9}{2}} dx \int_{x-3}^{\sqrt{\frac{x}{2}}} f(x,y)dy\ .$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D, що обмежена заданими лініями .

а) $\iint\limits_{(D)} e^y\ dxdy; \quad D: x=2, \quad y=ln\,x, \quad y=0.$

б) $\iint\limits_{(D)} \left(x^2+y+10\right)dxdy; D: y=0, y=2, x=0, x=1$

Варіант 5.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{0} f(x,y)dx + \int_2^3 dy \int_{y-3}^{0} f(x,y)dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D, що обмежена заданими лініями :

а) $\iint_{(D)} y^2 e^{-xy}\, dxdy; D: y = 2, y = x, x = 0.$ б) $\iint_{(D)} \frac{x^2}{y^2}\, dxdy; D: y = \frac{1}{x}, y = x, x = 2.$

Варіант 6.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{1-\sqrt{2y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області *D*, що обмежена заданими лініями:

а) $\iint_{(D)} xy\left(1-9x^4y^4\right)dxdy; \quad D: y = -x^2, \quad y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 1.$

б) $\iint e^{x+y}\, dx\, dy$, де D: $y = e^x, y = 3, x = 0$.

Варіант 7.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_1^3 dx \int_0^{\frac{x-1}{2}} f(x,y)dy + \int_3^4 dx \int_0^{\sqrt{4-x}} f(x,y)dy.$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області *D*, що обмежена заданими лініями:

а) $\iint_{(D)} y\cos 2xy\, dxdy; \quad D: y = \frac{\pi}{2}, \quad y = \frac{3\pi}{2}, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = 2.$

б) $\iint_D \frac{x}{\sqrt{y}}\, dx\, dy, \quad D: y \geq x^2, y \leq 4 - x^2.$

Варіант 8.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^3 dx \int_0^4 f(x,y)dy + \int_3^5 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy.$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області *D*, що обмежена заданими лініями:

а) $\iint_{(D)} \left(3x^2y - 6xy^3\right)dxdy; \quad D: y = x^3, \quad y = -\sqrt{x}, \quad x = 1.$

б) $\iint_{(D)} e^{3x-y}\, dxdy; \quad D: y = 2x, \quad y = 8 - 2x, \quad y = 0.$

Варіант 9.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2=y^2}} f(x,y)dx .$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D, що обмежена заданими лініями:

$$\text{а)} \iint_{(D)} y \sin xy \, dxdy; \quad D: y = \frac{\pi}{2}, \quad y = \pi, \quad x = 1, \quad x = 2.$$

$$\text{b)} \iint_{(D)} (x + y + 3)\, dxdy; \quad D: x + y = 2, \quad y = 0, \quad x = 0.$$

Варіант 10.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx .$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D, що обмежена заданими лініями.

$$\text{а)} \iint_{(D)} \left(9x^2y^2 + 16x^3y^3\right) dxdy; \quad D: y = x^2, \quad y = -\sqrt[3]{x}, \quad x = 1.$$

$$\text{б)} \iint_{(D)} y^2 \cos\frac{xy}{2} \, dxdy; \quad D: y = 2x, \quad y = \sqrt{2\pi}, \quad x = 0.$$

Варіант 11.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^3 dy \int_0^{\frac{4}{9}y^2} f(x,y)dx + \int_3^5 dy \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx .$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D, що обмежена заданими лініями.

$$\text{а)} \iint_{(D)} y^2 \sin 2xy \, dxdy; D: y = 2x, y = \sqrt{2\pi}, x = 0.$$

$$\text{б)} \iint_{(D)} \left(3x^2y^2 - 8x^3y^3\right) dxdy; D: y = -x^3, y = \sqrt[3]{x}, x = 1.$$

Варіант 12.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^2 dx \int_{4-2x}^{\sqrt{16-2x}} f(x,y) dy + \int_2^8 dx \int_0^{\sqrt{16-2x}} f(x,y) dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D, що обмежена заданими лініями.

а) $\iint\limits_{(D)}\left(4xy+3x^2y^2\right)dxdy; D: y=x^2, y=-\sqrt{x}, x=1.$

б) $\iint\limits_{(D)} y^2 e^{\frac{xy}{8}}\, dxdy; D: x=0, y=2x, y=4.$

Варіант 13.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^1 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{1-x} f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{8}} dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{2} f(x,y)dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D, що обмежена заданими лініями:

а) $\iint\limits_{(D)} y^2(1+2x)dxdy; D: x=2-y^2, x=0.$ б) $\iint\limits_{(D)} 6ye^{\frac{xy}{3}}\, dxdy; D: x=3, x=6, y=ln2, y=ln3.$

Варіант 14.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D, що обмежена заданими лініями:

а) $\iint\limits_{(D)}\left(x^3+3y\right)dxdy; D: x+y=1, y=x^2-1, x\ge 0.$

б) $\iint\limits_{(D)} y\cos xy\, dxdy; D: x=1, x=2, y=\pi, y=\frac{\pi}{2}.$

Варіант 15.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^4 dy \int_{\frac{1}{2}и+1}^{7-y} f(x,y)dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D, що обмежена заданими лініями:

а) $\iint\limits_{(D)}\left(36x^2y^2-96x^3y^3\right)dxdy; \quad D: x=1, y=-x^3, y=\sqrt[3]{x}.$

б) $\iint\limits_{(D)} y^2\cos xy\, dxdy; \quad D: x=0, \quad y=2x, y=\sqrt{\pi}.$

Варіант 16.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^1 dy \int_{2y+1}^{4-y^2} f(x,y)dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D, що обмежена заданими лініями.

а) $\iint\limits_{(D)} \frac{x^2}{y^2}\, dxdy; \quad D: y=x, y=\frac{1}{x}, x=2$**;** б) $\iint\limits_{(D)} x\, dxdy; \quad D: y=\sqrt{x}, \quad y=x,$

Варіант 17.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^2 dx \int_{\frac{1}{4}x^2}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області *D*, що обмежена заданими лініями:

а) $\iint\limits_{(D)} 2y\,dxdy; D: y=1, y=-x^3, x=0.$ б) $\iint\limits_{(D)} 3y^2 \sin\frac{xy}{2}\,dxdy; D: x=0, y=\frac{2}{3}x, y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}.$

Варіант 18.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області *D*, що обмежена заданими лініями.

а) $\iint\limits_{(D)} e^{\frac{x}{y}}\,dxdy; D: y^2=x, y=1, x=0.$ б) $\iint\limits_{(D)} x(5+y)dxdy; D: x+y+5=0, y=x+5, x\le 0.$

Варіант 19.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області *D*, що обмежена заданими лініями:

а) $\iint\limits_{(D)} x^2 y\,dxdy; D: y=2-x, y=x, x=0.$ б) $\iint\limits_{(D)} (x+y)dxdy; D: y=x^2-1, y=-x^2+1.$

Варіант 20.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^1 dy \int_{y^2}^{2-y} f(x,y)dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області *D*, що обмежена заданими лініями.

а) $\iint\limits_{(D)} (2x+y)dxdy; D: x+y=3, y=0, x=0.$ б) $\iint\limits_{(D)} 3y^2 e^{\frac{xy}{8}}\,dxdy; D: x=0, y=2, y=\frac{x}{2}.$

Варіант 21.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області *D*, що обмежена заданими лініями:

.

а) $\iint\limits_{(D)} (2y^3-x)dxdy; D: y=x+2, y=0, x=0.$ б) $\iint\limits_{(D)} (x+3xy)dxdy; D: 0\le x\le 2, 0\le y\le 1.$

Варіант 22.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_{1}^{e^2} dy \int_{0}^{\ln x} f(x,y)dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області *D*, що обмежена заданими лініями:

а) $\iint\limits_{(D)} (xy-4x+2y-1)\,dxdy; D: y=x^2, y=0, x=1.$

б) $\iint\limits_{(D)} \left(6xy+24x^3y^3\right)dxdy; \quad D: x=1, y=-x^2, y=\sqrt{x}.$

Варіант 23.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_{0}^{1} dx \int_{-x^2}^{x^2} f(x,y)dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області *D*, що обмежена заданими лініями.

, .

а) $\iint\limits_{(D)} 12xy+9x^2y^2\ dxdy; D: y=-x^2, y=\sqrt{x}, x=1.$ б) $\iint\limits_{(D)} e^{x+y}\,dxdy; D: y=e^x, y=2, x=0.$

Варіант 24.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_{0}^{1} dy \int_{2y^2}^{3-y} f(x,y)dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області *D*, що обмежена заданими лініями:

а) $\iint\limits_{(D)} (x+y)dxdy; D: y=x^3, y=8, y=0, x=3.$ б) $\iint\limits_{(D)} 4y^2\ \sin xydxdy; D: y=x, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, x=0.$

Варіант 25.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_{\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{\sqrt{2-x^2}}^{1-x} f(x,y)dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{0} f(x,y)dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області *D*, що обмежена заданими лініями.

а) $\iint\limits_{(D)} (x-y)dxdy; D: y=2-x^2, y=2x-1.$ б) $\iint\limits_{(D)} y^2 e^{-\frac{xy}{8}}\ dxdy; D: y=\frac{x}{2}, \quad y=2, \quad x=0.$

Варіант 26.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_{1}^{e^2} dx \int_{0}^{\ln x} f(x,y)dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області *G*, що обмежена заданими лініями:

а) $\iint\limits_{(D)} cos(x+y)dxdy; \quad D: x=0, y=\pi, y=x.$ б) $\iint\limits_{(D)} y(1-x)dxdy; \quad D: y^3=x, y=x.$

Варіант 27.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{-x^3}^{-x} f(x,y)dy + \int_{0}^{1} dx \int_{-x}^{-x^3} f(x,y)dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області *D*, що обмежена заданими лініями.

а) $\iint\limits_{(D)} \left(x+y^2+1\right)dxdy; D: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1.$

б) $\iint\limits_{(D)} x\,cos(x+y)dxdy; \quad D: y=x, y=0, x=\pi.$

Варіант 28.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області *D*, що обмежена заданими лініями:

а) $\iint\limits_{D} \left(x^2+2y\right)dxdy$, $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2.$

б) $\iint\limits_{(D)} \left(x^3+y\right)dxdy; D: x+y=1, x+y=2, x \le 1, x \ge 0.$

Варіант 29.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_{0}^{1} dx \int_{x-1}^{1-x} f(x,y)dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області *D*, що обмежена заданими лініями:

а) $\iint\limits_{D} \sqrt{x}\,ydydz, D: y^2=x, x=4.$ б) $\iint\limits_{(D)} x^3dxdy; \quad D: y{=}x^2, y=x+2.$

Варіант 30.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_{0}^{2} dx \int_{x}^{2x} f(x,y)dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області *D*, що обмежена заданими лініями:

а) $\iint\limits_{D} e^{x+y}dxdy$, $D:\ y=e^x$, $x = 0$, y=3. б) $\iint\limits_{(D)} (x-y)dxdy; \quad D: y{=}2-x^2, y=2x-1.$